Capítulo 1

Introdução

A noção de verdade em lógica é uma noção central, e ligada a ela está a noção de conseqüência lógica. Ou seja, procura-se saber se a veracidade de um conjunto de fórmulas implica na veracidade de uma fórmula: essa é uma atividade importante em lógica. Mais precisamente, trata-se de provar que um certo conjunto Γ tem uma sentença α como conseqüência lógica. Tal prova pode ser feita semanticamente, interpretando as sentenças de Γ e a sentença α, e mostrando matematicamente como a suposição das primeiras implica na última. Mas para isso, muito mais prático é o uso de um cálculo, um ambiente no qual podemos derivar sentenças a partir de outras de uma maneira mais mecânica; onde a leitura seja tão simples que o simples fato de escrever a derivação nesse ambiente serve de prova "óbvia" para afirmar que tal sentença é conseqüência lógica de tais outras.

Existem muitos cálculos dedutivos, cada um com suas vantagens e desvantagens, sendo que os mais freqüentemente desenvolvidos são aqueles chamados de axiomáticos (ou sistemas à la Hilbert, ou à la Frege). São provavelmente os mais comuns por serem aqueles que permitem uma exposição imediata das propriedades que se deseja ter na lógica (axiomas). Embora comuns, as provas nesses sistemas não fornecem grande interesse do ponto de vista da teoria da prova. Em teoria da prova, como o nome indica, não estamos interessados apenas nos teoremas de uma teoria, mas também em como se chega a esses teoremas. Logo, o cálculo dedutivo usado é de extrema importância. Ou seja, se formos estudar as provas em si, é necessário apresentar um sistema dedutivo onde as provas em questão sejam mais "interessantes": onde possamos estabelecer propriedades relevantes para as provas do sistema dedutivo em questão. Por exemplo, podemos tentar mostrar que se $\Gamma \vdash \alpha$, então existe uma prova de $\Gamma \vdash \alpha$ que só usa subfórmulas das fórmulas de $\Gamma \cup \{\alpha\}$. Um desses sistemas é o sistema em dedução natural. Os sistemas em dedução natural são caracterizados por um tratamento mais “intuitivo”dos conectivos. Queremos dizer com isso que as regras dos sistemas nos deixam ver mais claramente qual o sentido daquele conectivo. Habitualmente tem-se pelo menos um par de regras para cada conectivo, uma de introdução e outra de eliminação. A regra de introdução é muitas vezes uma resposta direta à pergunta: “quando é que eu tenho uma prova de α? (onde o conectivo principal de α é o conectivo em questão)”; e simetricamente, a regra de eliminação responde à pergunta: “o que eu posso concluir de uma prova de α?”.

Logo uma tarefa importante é encontrar uma versão em dedução natural de uma lógica já existente. Uma vez em dedução natural, podemos então nos concentrar na tarefa de estudar a estrutura das provas obtidas, o que permite em muitos casos observações importantes, como a possibilidade de normalizar as provas. Também é relevante o simples fato de o sistema encontrado ser sempre mais simples de usar do que original, e ser também mais “natural”(permite uma melhor compreensão dos conectivos e quantificadores usados). Nessa tarefa, a abordagem tem em geral sido o estudo caso a caso. O que procuramos aqui é, então, disponibilizar algumas ferramentas que auxiliem nessa tarefa de transformar os quantificadores de um sistema dedutivo para o estilo natural. É claro que não pretendemos provar que qualquer lógica se prestará a essa transformação, mas, pela exposição de vários casos bem sucedidos, esperamos facilitar essa tarefa deixando disponível uma técnica que talvez permita resolver muitos outros casos.

Não se trata então aqui de inventar novas lógicas, e sim de dar uma nova abordagem a lógicas que já existem. Assumindo que sistemas em dedução natural têm um interesse em si, nosso esforço será todo na direção de facilitar o desenvolvimento de tais sistemas para lógicas que já foram axiomatizadas.

Uma característica importante dessa abordagem é o uso de rótulos ([Queiroz1999], e [Gabbay1996]). Na tentativa de se achar um sistema em dedução natural para uma lógica existente temos que traduzir por regras “naturais”o “sentido”dos conectivos e quantificadores usados. Isso se faz mediante regras que nos deixam ver claramente, para um certo conectivo, em que situação podemos deduzir uma fórmula cujo conectivo principal é o conectivo em questão. O mesmo vale para quantificadores. Porém, as regras para quantificadores são quase que obrigatoriamente parecidas: ao introduzir, tínhamos uma fórmula com variável livre que passou a ser ligada quando introduzimos o quantificador em questão (e vice-versa na eliminação). Logo, as variáveis livres não podem ter todas o mesmo “valor”: algumas podem ser quantificadas de uma forma, outras de outra forma. Isso se traduz então por condições exigidas na introdução dos quantificadores. Em contrapartida, algo é necessário na eliminação, algum tipo de marca que traduza o “valor”daquela variável livre. Enfim, a ordem em que essas eliminações foram feitas é muitas vezes relevante. Assim, aparece então a idéia de se usar como rótulo uma lista (ordenada) de variáveis que podem carregar marcas distintas.

Dessa maneira, a introdução ou eliminação de um quantificador poderá depender do rótulo associado à fórmula em questão. Mais precisamente, ao quantificar uma variável, condições sobre onde, em que ordem, em que quantidade e com que marca essa variável ocorre no rótulo poderão ser observadas e servirem de condição para a regra de quantificação que queremos definir.

Considere então, como exemplo, o uso de rótulos onde só ocorra um tipo de variável: variáveis não marcadas. Um exemplo de rótulo poderia ser então x, ou z, x, y, y, v. Mesmo usando apenas um tipo de variável, tem-se muitas possibilidades para a estrutura do rótulo: por exemplo, o rótulo pode ter a estrutura de um conjunto, ou de um multiconjunto, ou de uma lista ordenada de variáveis, ou de uma lista ordenada de conjuntos. De acordo com a estrutura usada, tem-se possibilidades variadas para as condições impostas na introdução ou eliminação do quantificador que se deseja modelar. Damos a seguir uma série de exemplos de regras que não se referem a nenhuma lógica em especial.

Se o rótulo tem estrutura de conjunto, tem-se por exemplo, as seguintes regras:

$$\frac{\varphi^L}{Qx\varphi^{L'}}\ \textit{se } x \in L \textit{ e } L' = L\backslash\{x\}$$
$$\frac{\varphi^L}{Qx\varphi^{L'}}\ \textit{se } x \notin L \textit{ e } L' = L \cup \{x\}$$
$$\frac{\varphi^L}{Qx\varphi^{L'}}\ \textit{se } x \textit{ é livre em } \varphi \textit{ e } L' = L \cup \{x\}$$
$$\frac{\varphi^L}{Qx\varphi^{L}}$$
$$\frac{\varphi^L}{Qx\varphi^{L}}\ \textit{se } L \textit{ é vazio}$$

Se o rótulo tem estrutura de multiconjunto, pode-se citar os seguintes exemplos:

$$\frac{\varphi^L}{Qx\varphi^L} \textit{ se } x \textit{ ocorre duas vezes em } L$$

$$\frac{\varphi^L}{Qx\varphi^{L'}} \textit{ se } L' = L \textit{ com uma ocorrência a menos de } x$$

Se o rótulo for uma lista ordenada:

$$\frac{\varphi^{x,L}}{Qx\varphi^L}$$

$$\frac{\varphi^L}{Qx\varphi^{x,L}} \textit{ se } x \textit{ ocorre livre em } \varphi$$

E se o rótulo for uma lista ordenada de conjuntos:

$$\frac{\varphi^{A,L}}{Qx\varphi^{A',L}} \textit{ se } x \in A \textit{ e } A' = A\backslash\{x\}$$

$$\frac{\varphi^L}{Qx\varphi^L} \textit{ se } x \textit{ ocorre em um dos conjuntos de } L$$

Exemplos semelhantes podem ser encontrados para a regra de eliminação do quantificador. Esses exemplos não representam nenhum quantificador específico, mas servem para ilustrar a variedade que pode haver no uso de um rótulo.

Como mencionado anteriormente, pode-se ter vários tipos de variáveis, o que leva a uma variedade ainda maior de estruturas para os rótulos, e de condições associadas às regras.

Por exemplo, se tivermos variáveis de três tipos, digamos x, $\overline{x}$ e x^*, então podemos ter um rótulo que seja uma lista ordenada de conjuntos onde as variáveis marcadas por - e * não podem ocorrer num mesmo conjunto da lista, e podemos usar esse rótulo para controlar a introdução ou eliminação de 5 (cinco) quantificadores diferentes. Um deles poderia exigir que a variável em questão ocorra em todos os conjuntos da lista, o outro que a variável ocorra não marcada e marcada com * em um dos conjuntos da lista.

Temos, teoricamente, uma infinidade de condições que podem ser associadas às regras. Porém, é bom lembrar que vários casos práticos foram analisados, e observou-se alguns padrões na estrutura dos rótulos e nas condições impostas sobre as regras de eliminação e introdução dos quantificadores. Embora não sejam padrões absolutos (alguns exemplos não seguem esses padrões), podemos citar as seguintes tendências:

- a ordem das variáveis no rótulo é relevante.

- Quando se tem mais de um tipo de variável no rótulo, um dos tipos requer uma ordenação de suas variáveis enquanto que as variáveis do outro tipo podem ser permutadas entre elas, dando assim ao rótulo uma estrutura de lista ordenada de conjuntos (conjuntos que são unitários no caso das variáveis do tipo que requer uma ordenação).

- Existe alguma regra permutativa que deixa clara essa liberdade em trocar a ordem das variáveis. Por exemplo:

$$\frac{\varphi^{L_1,x,y,L_2}}{\varphi^{L_1,y,x,L_2}}$$

- As regras para os conectivos clássicos do sistema devem especificar algum tipo de união ou "merge" das variáveis provenientes de dois rótulos associados às premissas da regra. Por exemplo:

$$\frac{\alpha^u \quad \beta^v}{\alpha \wedge \beta^w} \wedge I$$

especificando por exemplo que w é o resultado da concatenação de u com v.

- Todas as variáveis de um rótulo ocorrem livres na fórmula associada.

Vamos encerrar então esse capítulo com um último exemplo um pouco mais elaborado. Digamos que na lógica K existe um quantificador ∇ tal que $\nabla x \varphi(x)$ é verdadeira se a extensão $\{x : \varphi(x)\}$ pertence a uma família $\mathcal{F}$. Nossas regras de introdução e eliminação para este quantificador poderiam ser por exemplo:

$$\frac{\varphi^{L,\overline{x}}}{\nabla x \varphi^L} \quad \text{e} \quad \frac{\nabla x \varphi^L}{\varphi^{L,\overline{x}}}$$

onde a variável $\overline{x}$ está marcada para indicar sua relação com a família $\mathcal{F}$.

Esse exemplo que acaba de ser apresentado corresponde a um par de regras que serão usadas no capítulo 3, que trata da lógica de ultrafiltros.

Passaremos agora para o capítulo 2, onde veremos o estudo de um caso real, o da lógica clássica de 1a ordem, que servirá de ilustração para a técnica que desejamos desenvolver. Encerraremos assim a primeira parte da tese, que descreve intuitivamente a técnica que desenvolvemos. Na segunda parte veremos então uma série de aplicações da técnica apresentada: no capítulo 3 veremos a lógica de ultrafiltros; no capítulo 4 a lógica de filtros, que é uma lógica relacionada à lógica de ultrafiltros. No capítulo 5 trataremos de CTL, uma lógica temporal. Em seguida, no capítulo 6, veremos a lógica de Keisler, uma lógica que expressa o não enumerável; e por fim veremos a lógica CTL* no capítulo 7. O capítulo 8 contém algumas observações sobre o que se conseguiu fazer.