Capítulo 4

Lógica de Filtros

No capítulo anterior vimos a lógica de ultrafiltros, para a qual o sistema obtido em dedução natural é correto, completo e normalizável. Veremos agora a lógica de filtros, que pode ser encarada como uma variação da lógica de ultrafiltros. A diferença é que filtros não são maximais, ou seja, podemos ter um conjunto B tal que nem B nem seu complemento $\overline{B}$ pertencem à família $\mathcal{F}$.

No decorrer desse capítulo tentaremos fazer referência ao capítulo anterior sempre que possível, pois esses dois capítulos têm muitas semelhanças.

4.1 Axiomatização

A axiomatização usada para lógica de ultrafiltros é a seguinte (além da axiomatização clássica para lógica de 1a ordem):
$\nabla x\varphi \rightarrow \exists x\varphi$
$\neg\nabla x\varphi \rightarrow \nabla x\neg\varphi$
$\nabla x\varphi \wedge \nabla x\psi \rightarrow \nabla x(\varphi \wedge \psi)$
$\nabla x\varphi \rightarrow \nabla y\varphi[x \leftarrow y], y \notin VAR(\varphi)$
com a generalização desses axiomas.

Em função dos axiomas (dentre esses quatro) que preservarmos, teremos uma lógica diferente. Temos assim uma família de lógicas relacionadas. No artigo [Veloso2002] temos um tratamento sistemático dessas variações.

A axiomatização da lógica de filtros é obtida eliminando o segundo axioma e introduzindo dois outros. Assim, uma axiomatização correta e completa para lógica de filtros é obtida juntando uma axiomatização para lógica de 1a ordem aos axiomas seguintes ([Veloso2002]):
$\forall x\varphi \rightarrow \nabla x\varphi$

$\nabla x\varphi \to \exists x\varphi$
$\nabla x\varphi \wedge \nabla x\psi \to \nabla x(\varphi \wedge \psi)$
$\nabla x\varphi \to \nabla y\varphi[x \leftarrow y], y \notin VAR(\varphi)$
$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\nabla x\varphi \to \nabla x\psi)$

4.2 Sintaxe e Semântica

A sintaxe da lógica de filtros é a mesma que a da lógica de ultrafiltros. Quanto à semântica, é quase a mesma, bastando mudar toda referência a ultrafiltro para uma referência a filtro. Assim, em resumo,

$(\mathfrak{A}, \mathcal{F}) \models \nabla x\varphi$ sse a extensão de $\varphi(x)$ pertence a $\mathcal{F}$.

onde $\mathcal{F}$ é um filtro definido sobre A (universo da estrutura $\mathfrak{A}$).

A estrutura dos rótulos é exatamente a mesma dos rótulos usados para a lógica de ultrafiltros.

4.3 Regras

Como comentado anteriormente, filtros não são maximais. Por este motivo, a regra do absurdo tal como ela existe em $\mathcal{NUL}$ deixa de ser correta. Pois $[\neg\nabla x\varphi]$ não implica em $[\nabla x\neg\varphi]$.

Dessa forma tivemos que acrescentar uma restrição à regra do absurdo (regra 14), que se tornou:

$$\cfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi^{<u>}] \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi^{<u>}}\ \bot$$

com a restrição: onde $< u >$ contém apenas variáveis não marcadas.

Por outro lado, a regra $\to I$ teve que ser modificada pois sua correção também depende de $\neg\nabla x\varphi$ implicar em $\nabla x\neg\varphi$. Por isso, ela se torna:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi^{<u>}]\\ \vdots \\ \psi^{<v>}\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi^{<w>}} \rightarrow I$$

com a restrição: onde $< u >$ contém apenas variáveis não marcadas.

4.4 Correção

A prova de correção é a mesma, uma vez que a maximalidade do ultrafiltro só foi usada nas provas de correção das regras do absurdo e de introdução da implicação, as quais foram alteradas para não mais depender dessa propriedade.

4.5 Completude

O cálculo é completo uma vez que podemos reproduzir todas as provas relevantes que tínhamos em $\mathcal{NUL}$, e que podemos mostrar provas para os dois axiomas que foram introduzidos. Esses dois axiomas são provados a seguir:

$\forall x\varphi \rightarrow \nabla x\varphi$

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\varphi}{\varphi^{\overline{x}}}}{\nabla x\varphi}$$

$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\nabla x\varphi \rightarrow \nabla x\psi)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(\varphi \rightarrow \psi)}{\varphi \rightarrow \psi^{\overline{x}}} \quad \dfrac{\nabla x\varphi}{\varphi^{\overline{x}}}}{\psi^{\overline{x}}}}{\nabla x\psi}$$

4.6 Normalização

Não podemos mais restringir o uso da regra do absurdo apenas a fórmulas atômicas, uma vez que a redução correspondente a fórmulas do tipo $\nabla x\varphi$ (ver apêndice 2) não é mais correta, pois viola a restrição imposta na regra do absurdo para a lógica de filtros:

$$\begin{array}{c}[\neg\nabla x\varphi]^1\\ \vdots\\ \dfrac{\perp}{\nabla x\varphi}\perp_1\end{array} \qquad \text{não se reduz a} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi^{\overline{x}}]^2 \qquad \dfrac{[\nabla x\varphi]^1}{\varphi^{\overline{x}}}\nabla E}{\perp}\to E}{\neg\nabla x\varphi}\to I_1\\ \vdots\\ \dfrac{\dfrac{\perp}{\varphi^{\overline{x}}}\perp_2}{\nabla x\varphi}\nabla I\end{array}$$

pois observe que na prova da direita a aplicação da regra $\perp$ não respeita as novas condições impostas. Porém, ainda deve ser investigado se esse sistema tem normalização ou não.