

# Capítulo 6

## Lógica de Keisler

### 6.1 Introdução

A lógica da quantificação não-enumerável, que chamaremos aqui de lógica de Keisler, foi apresentada pela primeira vez em 1970 [Keisler1970], num artigo contendo um sistema dedutivo axiomático. Em [Ebbinghaus1994] foi apresentada uma versão em cálculo de seqüentes. Porém, nenhuma discussão do ponto de vista da teoria da prova foi feita até hoje.

A lógica de Keisler consiste em uma extensão da lógica clássica na qual acrescentou-se um quantificador, que notaremos  $Q$ , cuja intenção é expressar que uma quantidade não enumerável de valores satisfaz uma certa propriedade. Mais precisamente, usa-se  $Qx\varphi(x)$  para expressar que o conjunto  $\{a \mid a \in |\mathfrak{A}| \text{ e } \varphi(a)\}$  tem cardinalidade  $\aleph_1$  pelo menos.

Associada a essa lógica tem-se a seguinte axiomatização correta e completa [Keisler1970] (que deve ser acrescentada a uma axiomatização para a lógica clássica de 1ª ordem):

$$\neg Qx(x = y \vee x = z)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (Qx\varphi \rightarrow Qx\psi)$$

$$Qx\varphi(x, \dots) \leftrightarrow Qy\varphi(y, \dots)$$

$$Qy\exists x\varphi \rightarrow \exists xQy\varphi \vee Qx\exists y\varphi$$

### 6.2 O sistema $ND_Q$

Apresentamos a seguir o sistema  $ND_Q$  (Dedução Natural para lógica de Keisler). Por simplicidade os termos da linguagem serão variáveis ou constantes. Quanto aos símbolos lógicos, serão usados  $\perp$ ,  $\rightarrow$ ,  $\vee$ ,  $\exists$  e  $Q$ . O símbolo  $\forall$  poderá ser

usado também como abreviação:  $\forall x$  abrevia  $\neg\exists x\neg$ , onde  $\neg\varphi$  abrevia  $\varphi \rightarrow \perp$ .

### Rótulos

Nesse sistema teremos um rótulo associado às fórmulas, sendo que as variáveis desse rótulo podem ser não marcadas, como  $x, y, \dots$ , ou marcadas, como  $x^*, y^*, \dots$

Variáveis não marcadas terão uma extensão ao menos unitária (existencial) enquanto que as marcadas terão uma extensão não enumerável.

O rótulo deve ser visto como uma lista ordenada, ou seja, a ordem na qual as variáveis ocorrem é relevante.

Formalmente, tem-se a seguinte definição para rótulo:

### Definição

A lista vazia, notada  $\langle \rangle$ , é um rótulo.

Se  $L$  é um rótulo e  $r$  é uma variável, que pode ser marcada ou não, então  $L, r$  é um rótulo, que consiste na lista cujo último elemento é  $r$  e os elementos anteriores são os elementos de  $L$ , na mesma ordem em que aparecem em  $L$ .

O sistema desenvolvido manipula então fórmulas rotuladas.

Obtém-se então o seguinte conjunto de regras:

$$\begin{array}{c}
\overline{\neg Qx(x = y \vee x = z)} \text{ Axioma(1)} \\
\\
\frac{\varphi^{L,x}}{\exists x \varphi^L} \exists I \text{ (2)} \qquad \frac{\exists x \varphi^L}{\varphi^{<L,x>}} \exists E \text{ (3)} \\
\\
\frac{\varphi^{L,x^*}}{Qy \varphi(y)^L} QI \text{ (4)} \qquad \frac{Qx \varphi^L}{\varphi^{<L,x^*>}} QE \text{ (5)} \\
\\
\frac{\varphi^L}{\psi^L} \xrightarrow{\frac{\Pi}{\varphi \rightarrow \psi}} \rightarrow E \text{ (6)} \qquad \frac{\varphi^L \dots \psi^L}{(\varphi \rightarrow \psi)^L} \rightarrow I \text{ (7)} \\
\\
\frac{\varphi \vee \psi^L \quad \varphi^L \dots \gamma^{L'} \quad \psi^L \dots \gamma^{L'}}{\gamma^{L'}} \vee E \text{ (8)} \\
\\
\frac{\psi^L}{\psi \vee \varphi^L} \vee I \text{ (9)} \qquad \frac{[\varphi \rightarrow \perp^L] \dots \perp}{\varphi^K} RAA \text{ (10)} \\
\\
\frac{[Qx \exists y \varphi] \dots \perp \quad \varphi^{L,y^*,x}}{\varphi^{L,x,y^*}} \aleph \text{ (11)} \qquad \frac{[\varphi] \dots \varphi^L \quad \psi}{\psi^L} * \text{ (12)}
\end{array}$$

Com as seguintes restrições:

(6) as variáveis livres de  $L$  não ocorrem livres nas hipóteses de  $\Pi$ .

(7)  $L$  não contém variável marcada.

(10)  $L$  não contém variável marcada e  $K \subseteq L$

(12) as variáveis de  $L$  não ocorrem livre em nenhuma hipótese da qual  $\psi$  dependa, com exceção de  $\varphi$

### 6.2.1 Exemplo

Damos a seguir um exemplo de prova realizada em  $ND_Q$ .

$$\begin{array}{c}
 \frac{[x = w^{x^*}]^2}{x = w \vee x = k^{x^*}} \\
 \frac{\frac{\frac{[x = y \vee x = z^*]^1}{Qx(x = y \vee x = z)} \quad \frac{Qx(x = w \vee x = k)}{\neg Qx(x = w \vee x = k)}}{\perp} \quad \perp}{\perp} \quad 1, 2 \\
 \frac{\frac{[Qx((x = y \vee x = z) \vee x = w)]^3}{(x = y \vee x = z) \vee x = w^{x^*}} \quad \perp}{\perp} \quad 3 \\
 \frac{\perp}{\neg Qx((x = y \vee x = z) \vee x = w)} \quad 3
 \end{array}$$

### 6.3 Correção

*Semântica*

A noção de satisfação para fórmulas rotuladas pode ser definida em

relação à noção usual de satisfação para a lógica de Keisler, bastando para isso associar a cada fórmula rotulada, uma fórmula não rotulada equivalente. A associação é bem simples: basta considerar o rótulo como uma lista de quantificadores, existenciais ou não enumeráveis, que deve ser colocada na frente da fórmula. Ou seja, por exemplo, a fórmula  $\varphi^{y^*,x}$  é equivalente à fórmula  $Qy\exists x\varphi$ . Formalmente,  $\varphi^{L,x}$  está relacionada com  $\exists x\varphi^L$ , e  $\varphi^{L,x^*}$  está relacionada com  $Qx\varphi^L$ . Logo, considerando o fecho transitivo dessa relação, para toda fórmula rotulada  $\varphi^L$  existe uma única fórmula não rotulada  $\psi$  tal que  $\varphi^L$  e  $\psi$  são relacionadas. Definimos então que  $\varphi^L$  e  $\psi$  são equivalentes.

Podemos então enunciar as seguintes propriedades:

**O sistema  $ND_Q$  é correto.**

Ou seja, se  $\Gamma \vdash_{ND_Q} \varphi$  então  $\Gamma \models \varphi$ .

Prova: a prova é feita mostrando que as regras, uma a uma, e o axioma são corretos.

- Axioma: o axioma é obviamente correto uma vez que é o mesmo do sistema original.

- $\frac{\varphi^{L,x}}{\exists x\varphi^L}$ ,  $\frac{\exists x\varphi^L}{\varphi^{L,x}}$ ,  $\frac{Qx\varphi^L}{\varphi^{L,x^*}}$  são obviamente corretas pois a fórmula de cima

e a de baixo representam a mesma fórmula não rotulada.

- $\frac{\varphi^{L,x^*}}{Qy\varphi(y)^L}$  é equivalente a  $\frac{Qx\varphi^L}{Qy\varphi(y)^L}$ , que é correta (pois decorre diretamente do axioma original  $Qx\varphi(x, \dots) \leftrightarrow Qy\varphi(y, \dots)$ ).

$$\bullet \frac{\varphi^L \quad \frac{\Pi}{\varphi \rightarrow \psi}}{\psi^L}$$

Como as variáveis de  $L$  não ocorrem livres nas hipóteses de  $\Pi$ , podemos obter o fecho universal de  $\varphi \rightarrow \psi$  para as variáveis de  $L$ . Dessa forma, se  $\varphi$  é verdadeira no domínio definido por  $L$ , então  $\psi$  também é.

$$\bullet \frac{\begin{array}{c} \varphi^L \\ \vdots \\ \psi^L \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi^L}$$

$L$  tem um valor puramente existencial. Se  $\mathfrak{A} \models H$  (onde  $H$  representa as outras hipóteses) mas  $\mathfrak{A} \not\models \varphi \rightarrow \psi^L$ , então  $\mathfrak{A} \models \neg(\varphi \rightarrow \psi)[a_1, \dots, a_n]$  para todo  $a_1, \dots, a_n$ , onde os  $a_1, \dots, a_n$  estão atribuídos às variáveis de  $L$ . Logo  $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$  e  $\mathfrak{A} \not\models \psi[a_1, \dots, a_n]$  para todo  $a_1, \dots, a_n$ . Logo  $\mathfrak{A} \models \varphi^L$  e  $\mathfrak{A} \not\models \psi^L$ , o que contradiz a hipótese de indução.

$$\bullet \frac{\begin{array}{c} \varphi \vee \psi^L \\ \vdots \\ \gamma^{L'} \end{array} \quad \begin{array}{c} \varphi^L \\ \vdots \\ \psi^L \\ \vdots \\ \gamma^{L'} \end{array}}{\gamma^{L'}} \quad \text{e} \quad \frac{\psi^L}{\psi \vee \varphi^L}$$

Decorrem diretamente da lógica clássica e dos fatos que a união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável, e qualquer superconjunto de um conjunto não enumerável também é não enumerável.

$$\bullet \frac{\begin{array}{c} [\varphi \rightarrow \perp^L] \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\varphi^K}$$

Como  $L$  tem um valor existencial, a fórmula superior está associada a  $\exists x_1 \dots \exists x_n \neg \varphi$ . Como  $\perp$  foi obtida, por hipótese de indução tem-se  $H \models \neg \exists x_1 \dots \exists x_n \neg \varphi$ , onde  $H$  representa as outras hipóteses da prova. Logo  $H \models \varphi^K$ .

$$\bullet \frac{\begin{array}{c} [Qx \exists y \varphi] \\ \vdots \\ \perp \end{array} \quad \varphi^{L, y^*, x}}{\varphi^{L, x, y^*}}$$

Observando as fórmulas não rotuladas representadas pelas fórmulas dessa regra, vemos que a regra decorre diretamente do axioma  $Qy\exists x\varphi \rightarrow \exists xQy\varphi \vee Qx\exists y\varphi$ .

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \varphi^L \quad \psi \end{array}}{\psi^L} *$$

Como as variáveis de  $L$  não ocorrem livre em nenhuma hipótese fora  $\varphi$ , a correção dessa regra decorre diretamente da correção da regra  $\rightarrow E$ .

## 6.4 Completude

O sistema  $ND_Q$  é completo em relação à lógica de Keisler.

Ou seja, para fórmulas não rotuladas, se  $\Gamma \models \varphi$  então  $\Gamma \vdash_{ND_Q} \varphi$ .

Prova: podemos reproduzir os axiomas da lógica de Keisler (incluindo os da lógica clássica) como mostrado a seguir para os axiomas não clássicos.

- $\neg Qx(x = y \vee x = z)$

O axioma é o mesmo nos dois sistemas.

- $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (Qx\varphi \rightarrow Qx\psi)$

$$\frac{\frac{Qx\varphi}{\varphi^{x*}} \quad \frac{\frac{[\neg(\varphi \rightarrow \psi)^x]}{\exists x\neg(\varphi \rightarrow \psi)} \quad \neg\exists x\neg(\varphi \rightarrow \psi)}{\perp} RAA}{\psi^{x*}}}{Qx\psi} Qx\varphi \rightarrow Qx\psi$$

- $Qx\varphi(x, \dots) \leftrightarrow Qy\varphi(y, \dots)$

$$\frac{Qx\varphi(x)}{\varphi(x)^{<x^*>} QE} \quad \frac{\varphi(x)^{<x^*>}}{Qy\varphi(y)} QI$$

- $Qy\exists x\varphi \rightarrow \exists xQy\varphi \vee Qx\exists y\varphi$

$$\frac{\frac{\frac{Qy\exists x\varphi}{\exists x\varphi^{<y^*>} QE} \quad \frac{[\neg Qx\exists y\varphi(x, y)]^1 \quad \varphi(x, y)^{<x, y^*>}}{\varphi(x, y)^{<y^*, x>}} \exists E}{\frac{\frac{\varphi(x, y)^{<y^*, x>}}{Qy\varphi(x, y)^{<x>} QI} \quad \exists I}{\exists xQy\varphi(x, y)} \exists I} \quad \frac{[Qx\exists y\varphi(x, y)]^2}{\exists xQy\varphi(x, y) \vee Qx\exists y\varphi(x, y)} \exists E}{\frac{Qx\exists y\varphi(x, y) \vee \neg Qx\exists y\varphi(x, y) \quad \exists xQy\varphi(x, y) \vee Qx\exists y\varphi(x, y) \quad \exists xQy\varphi(x, y) \vee Qx\exists y\varphi(x, y)}{\exists xQy\varphi(x, y) \vee Qx\exists y\varphi(x, y)} \text{1,2}}$$

## 6.5 Normalização

Analisa-se aqui a questão da normalização das provas obtidas nesse sistema. Para isso, procura-se eliminar fórmulas máximas de uma prova (tradicionalmente uma fórmula é considerada máxima quando ela é conclusão de uma regra de introdução e premissa maior de uma regra de eliminação). Isso é feito através de “reduções” na prova, ou seja, transformações aplicáveis à prova que permitem eliminar uma fórmula máxima. Idealmente tem-se uma redução para cada tipo de fórmula máxima:

$$\frac{\frac{\frac{\Pi}{\varphi(x)^{L, x^*}}{Qy\varphi(y)^L} QI}{\varphi(y)^{L, y^*}} QE}{\varphi(y)^{L, y^*}} \quad \text{se reduz a} \quad \frac{\Pi[x \leftarrow y]}{\varphi(y)^{L, y^*}}$$

A prova de que a redução indicada gera realmente uma prova requer alguns cuidados como aqueles usados em lógica clássica para separar variáveis



livres de variáveis ligadas (ver [Prawitz1965] e [VanDalen1994]).

$$\frac{\varphi^{L,x}}{\exists \varphi^L} \exists I \quad \text{se reduz a} \quad \varphi^{L,x} \quad \frac{\varphi^{L,x}}{\exists \varphi^L} \exists E$$

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \psi \end{array} \rightarrow I \quad \varphi \rightarrow \psi \quad \varphi^K}{\psi^K} \rightarrow E \quad \text{se reduz a} \quad \frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \psi \quad \varphi^K \end{array}}{\psi^K} *$$

Essa redução é correta porque as condições sobre a aplicação de  $\rightarrow I$  na derivação da esquerda leva às condições exigidas para uma aplicação correta da regra  $*$  na derivação da direita.

$$\frac{\frac{\varphi^L}{\varphi \vee \psi^L} \vee I \quad \begin{array}{c} [\varphi^L] \\ \vdots \\ \gamma^K \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi^L] \\ \vdots \\ \gamma^K \end{array}}{\gamma^K} \vee E \quad \text{se reduz a} \quad \begin{array}{c} \varphi^L \\ \vdots \\ \gamma^K \end{array}$$

O exemplo a seguir tenta ilustrar um possível caso de fórmula máxima que não pode ser eliminada com uma redução:

$$\frac{\begin{array}{c} [Qx\exists yA(x, y)] \\ \vdots \\ \perp \end{array} \quad \frac{\frac{Qy\exists xA(x, y)}{\exists xA(x, y)^{<y^*>}}}{A(x, y)^{y^*,x}}}{\frac{A(x, y)^{x,y^*}}{QyA(x, y)^{<x>}}}{\exists xQyA(x, y)}$$

A possível fórmula máxima é a hipótese  $Qx\exists yA(x, y)$  que foi eliminada e que talvez não seja subfórmula de nenhuma das hipóteses restantes.

O que se deseja então é uma propriedade que permita evitar essa situação.

Considere então a seguinte propriedade, relativa às provas de  $ND_Q$ :

se  $H, Qx\exists yA(x, y) \vdash \perp$  então  $Qx\exists yA(x, y)$  é subfórmula de  $H$ , ou,  $A(x, y) \vdash \perp$

e chame essa propriedade de  $P$ .

Teorema:

**Se  $P$  for verdadeira então o sistema  $ND_Q$  é normalizável.**

*Prova:*

Considere a seguinte aplicação da regra  $\aleph$ :

$$\frac{\begin{array}{c} [Qx\exists yA(x, y)] \\ \vdots \\ \perp \end{array} \quad A(x, y)^{<x, y^*>}}{A(x, y)^{<y^*, x>}} \aleph$$

Seja  $H$  o conjunto das hipóteses que, com  $Qx\exists yA(x, y)$ , levam a  $\perp$ .

Logo, por  $P$ , temos dois casos:

(1)  $Qx\exists yA(x, y)$  é subfórmula de alguma fórmula de  $H$ :

então a eliminação de  $Qx\exists yA(x, y)$  não interfere com a propriedade da subfórmula.

(2)  $A(x, y) \vdash \perp$ :

nesse caso a derivação acima pode se reduzir a

$$\frac{\begin{array}{c} A(x, y)^{x, y^*} \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{A(x, y)^{y^*, x}}$$

Uma vez que temos reduções para todos os possíveis casos de fórmula máxima, as provas são normalizáveis.

Deve se observar porém, que a propriedade  $P$  não foi provada.

Ainda assim, mesmo que  $P$  não seja verdadeira, tem-se um certo “bom comportamento” do sistema, do ponto de vista da teoria da prova: ao realizar uma prova  $\Gamma \vdash \varphi$ , se não for possível respeitar a propriedade da subfórmula (pelo motivo citado acima), observa-se porém que as únicas fórmulas envolvidas na prova serão subfórmulas de  $\Gamma \cup \{\varphi\}$ , ou subfórmulas nas quais permutou-se a ordem de dois quantificadores.