3
Construção de Espaços de Busca

Neste capítulo, abordamos a construção de espaços de busca do ponto de vista de Teoria das Categorias. A definição de uma heurística pressupõe uma estratégia de construção de espaços de busca (um espaço de busca para cada problema). Cada estratégia possível é encarada como um objeto de uma categoria de estratégias, e esta categoria é um *topos*.

3.1
Espaços de Busca

3.1.1 Grafos de estados. Tradicionalmente, espaços de busca são definidos como grafos de estados: grafos direcionados cujos arcos são rotulados por operadores ou ações, e cujos nós são descritos em algum formalismo lógico, de forma que um nó corresponde a um certo "estado das coisas". Esta visão é comum na modelagem de heurísticas construtivas (incrementais), onde uma resposta é montada passo-a-passo. Cada estado representa um estágio na montagem da resposta, e os arcos representam as possíveis escolhas no processo de montagem.

3.1.2 Heurísticas "sem estados". Em algumas estratégias heurísticas (e.g. busca local, *heuristic repair*), parece não existir uma noção explícita de "estado", pelo menos não no sentido do parágrafo anterior; a cada momento durante a execução da busca, apenas uma resposta ou uma população de respostas é considerada. Assim, um "grafo de estados" para uma estratégia deste tipo poderia consistir de

- nós que correspondem a (conjuntos de) respostas, e
- arcos que representam as possíveis alterações que a resposta (ou população) pode sofrer.

3.1.3 Funções heurísticas. Heurísticas costumam associar um valor numérico a cada nó do grafo de busca, representando a qualidade do estado representado pelo nó (em relação à instância sendo resolvida). Esta associação é feita por uma função heurística, que mapeia pares (estado, instância) em valores numéricos. Sem perda de generalidade, como nosso universo é um conjunto enumerável, podemos considerar que estes valores são números naturais e que valores menores significam respostas de maior qualidade.

3.2
Florestas de Respostas

3.2.1 Estados como conjuntos de respostas. Os primeiros artigos sobre modelos formais para algoritmos *branch-and-bound* para problemas de otimização ([17], por exemplo) fornecem uma indicação de como as duas visões acima podem ser conciliadas. Como discutido em [1], o processo de montar uma resposta passo-a-passo é análogo ao processo de "podar" um conjunto de respostas viáveis.

Considere uma instância do problema do Caixeiro Viajante Construtivo (CVC, ver 2.1.6) com as cidades A, B, C e D. Uma heurística construtiva poderia seguir os seguintes passos:

1. Iniciar com a turnê vazia;
2. Escolher a cidade B como a primeira da turnê;
3. Escolher a cidade D como a segunda da turnê.

Neste ponto, temos a "resposta" parcial $\rightarrow B \rightarrow D$, que corresponde a um estado no grafo de busca.

O processo análogo, envolvendo "poda" de conjuntos de respostas, consiste em

1. Iniciar com o conjunto de todas as turnês possíveis;
2. Descartar todas as turnês que *não* têm B como a primeira cidade;
3. Descartar, do conjunto resultante do passo anterior, todas as turnês que *não* têm D como a segunda cidade;

Neste ponto, temos um conjunto de respostas que consiste em todas as turnês cuja primeira cidade é B e cuja segunda cidade é D.

Dito de maneira simples, temos uma *representação* de respostas parciais em termos de conjuntos de respostas. Neste caso específico, uma turnê parcial é representada pelo conjunto de todas as suas extensões.

Desta forma, grafos de busca, tanto de heurísticas construtivas quanto de meta-heurísticas, podem ser considerados como grafos consistindo de nós que estão associados a conjuntos de respostas.

3.2.2 Florestas em vez de grafos. Todo grafo com um nó inicial designado pode ser representado por sua árvore de sincronização (ver 1.2.4). Quando o grafo não possui nó inicial, obtemos uma "floresta de sincronização" em vez de uma árvore. Cada árvore da floresta corresponde à escolha de um nó do grafo como inicial.

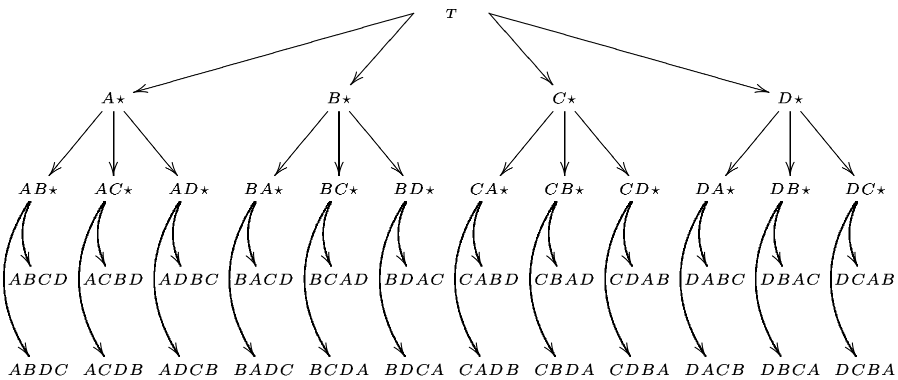
Por causa do relacionamento especial que existe entre uma floresta de sincronização e o grafo que lhe deu origem, efetuar uma busca na floresta corresponde a efetuar uma busca no grafo. Assim, concentrar-nos-emos em buscas em florestas, apenas.

3.2.3 Definição: Florestas de Respostas. Dado um problema $\langle\, D, R, p\,\rangle$, uma floresta de respostas para P é uma floresta T cujos nós são rotulados por uma função $\lambda : N \to \wp(R) \times \mathbb{N}$, onde N é o conjunto de nós da floresta T, e $\wp(R)$ é o conjunto das partes de R.

3.2.4 Nós semelhantes com qualidades diferentes. A definição é bem abrangente. Nós diferentes n e n' podem possuir rótulos $\lambda(n) = (A, k)$ e $\lambda(n') = (A', k')$, com $A = A'$ mas $k \neq k'$. Isto é conveniente para modelar funções heurísticas dinâmicas, que retornam valores diferentes para o mesmo estado em momentos diferentes durante a execução da busca; um exemplo é o algoritmo $A^\star$, onde a avaliação de um nó n do grafo de estados varia segundo o custo do menor caminho (encontrado até então) do estado inicial até n.

3.2.5 Exemplo. Um fragmento (uma árvore) de uma possível floresta de respostas para o problema CVC discutido acima, considerando um conjunto de cidades $\{A, B, C, D\}$, é mostrado a seguir.

Os nós estão rotulados de acordo com uma notação onde "$AB*$", por exemplo, denota o conjunto de todas as turnês cujas duas primeiras cidades são A e B, nesta ordem (i.e., o conjunto $\{ABCD, ABDC\}$). Por razões de espaço, os valores representando a qualidade dos nós foram omitidos. O nó raiz, representado por T, está associado ao conjunto de todas as turnês formadas pelas cidades A, B, C e D.



3.3
Estratégias de Construção de Florestas de Respostas

3.3.1 Associando florestas de respostas a problemas. Uma estratégia de construção de florestas de respostas deve associar uma floresta de respostas a cada problema através de um funtor. Para tanto, precisamos definir a ação do funtor sobre os morfismos de **Prob** (reduções entre problemas).

Um homomorfismo $T_1 \xrightarrow{f} T_2$ entre florestas é uma função $f : N_1 \to N_2$ entre os conjuntos de nós tal que

- Se n é uma raiz de T_1, então $f(n)$ é uma raiz de T_2;
- Se n' é filho de n, então $f(n')$ é filho de $f(n)$.

Dada uma redução $P \xrightarrow{(\tau,\sigma)} P'$ e duas florestas de respostas T e T' associadas a P e P', respectivamente, é razoável pensar que visitar um nó da floresta T' rotulado por (A', k) equivale a visitar um nó de T rotulado por $(\sigma(A'), k)$, onde $\sigma(A') = \bigcup_{r' \in A'} \sigma(r')$. Em outras palavras, nossas ações na floresta T' são mapeadas pela função σ em ações na floresta T. Isto nos faz concluir que uma redução $P \xrightarrow{(\tau,\sigma)} P'$ deve ser mapeada em um homomorfismo de florestas $T' \xrightarrow{m} T$, e este homomorfismo m deve "concordar" com σ em relação aos rótulos dos nós.

Assim, uma redução $P \longrightarrow P'$ é mapeada em um homomorfismo $T' \longrightarrow T$, no sentido inverso da redução, resultando em um funtor contravariante. Isto nos leva a uma primeira definição de estratégia de construção de florestas de respostas:

3.3.2 Definição (provisória): Estratégia de Construção de Florestas de Respostas. Seja a categoria **RFloresta**, que tem como objetos todas as florestas T com nós rotulados, e como morfismos $m : T \to T'$ todos os homomorfismos de florestas. Definimos uma Estratégia de Construção de Florestas de Respostas (ECFR) como um funtor $S : \mathbf{Prob}^{op} \to \mathbf{RFloresta}$ tal que para cada problema $\langle\ D, R, p\ \rangle$, a floresta rotulada SP é uma floresta de respostas para P conforme descrito em 3.2.3.[1]

A ação de S sobre uma redução

$$P \xrightarrow{(\tau,\sigma)} P'$$

é mapear tal redução em um homomorfismo de florestas

$$SP' \xrightarrow{S(\tau,\sigma)} SP$$

que "concorda" com σ, no sentido de que cada nó de SP' rotulado por um par (A', k) deve ser mapeado em um nó de SP rotulado pelo par $(\sigma(A'), k)$, com $\sigma(A') = \bigcup_{r' \in A'} \sigma(r')$.

3.3.3 Um problema: a quantidade de reduções entre dois problemas. Entre dois problemas P e P', podem existir diversas (possivelmente infinitas) reduções. Este fato, de certa forma, exige demais do nosso funtor S definido acima: SP e SP' são florestas fixas, que precisam comportar tantos homomorfismos $SP' \longrightarrow SP$ diferentes quanto forem as diferentes funções σ das reduções $P \longrightarrow P'$, conforme ilustrado na figura abaixo.

[1] Aqui, $\mathbf{Prob}^{op}$ é a categoria oposta de **Prob**; i.e., consistindo dos mesmos objetos que **Prob**, mas com cada morfismo no sentido contrário do morfismo correspondente em **Prob**. Dizer que S é um funtor $S : \mathbf{Prob}^{op} \to \mathbf{RFloresta}$ é dizer que S é um funtor contravariante, que mapeia um morfismo $P \to P'$ de **Prob** em um morfismo $SP \leftarrow SP'$ de **RFloresta**.

Prob **RFloresta**

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "(\tau_3,\sigma_3)\ \cdots"] \arrow[d, bend right=80, "(\tau_1,\sigma_1)"'] \arrow[d, bend right=40, "(\tau_2,\sigma_2)"'] \\ P' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} SP \\ SP' \arrow[u, "S(\tau_3,\sigma_3)\ \cdots"'] \arrow[u, bend left=80, "S(\tau_1,\sigma_1)"] \arrow[u, bend left=40, "S(\tau_2,\sigma_2)"] \end{tikzcd}$$

Dependendo dos problemas P e P', se a quantidade de reduções diferentes de P para P' em **Prob** for grande o suficiente, pode ocorrer que a floresta SP precise conter um nó rotulado com A para cada conjunto de respostas A de P. Para evitar essa situação extrema – i.e., para não exigir que a floresta SP dê conta de todas as reduções de P para P' –, estipulamos uma restrição:

Ao associarmos uma floresta de respostas SP a cada problema P, devemos considerar apenas uma redução entre cada par de problemas P, P'.

Isto corresponde à intuição de que, quando usamos a solução de um problema P' para obter uma solução de um problema P redutível a P', costumamos pensar em uma única redução específica de P para P', e não em todas tais reduções.

Esta restrição será operacionalizada no restante desta seção.

3.3.4 Trabalhando com um conjunto parcialmente ordenado de problemas.

A idéia é trabalhar com uma categoria de problemas onde exista no máximo uma única redução entre dois problemas quaisquer. Ou seja, queremos tomar um *poset* (um conjunto parcialmente ordenado) de problemas. Assim, tomaremos uma subcategoria $\mathbf{Prob}_0$ de **Prob** tal que, para cada par de problemas P, P' em $\mathbf{Prob}_0$, existe no máximo uma redução envolvendo P e P' em $\mathbf{Prob}_0$; i.e., uma redução $P \to P'$ ou uma redução $P' \to P$, mas não ambas.

3.3.5 Escolhendo instâncias.

O problema

$$P_1 = \langle\ \{\star\}, \{\star\}, \{(\star,\star)\}\ \rangle$$

é redutível a todos os outros problemas P de **Prob**. Mais ainda, uma redução $P_1 \xrightarrow{(\tau,\sigma)} P$ determina uma instância específica de P: a instância $d = \tau(\star)$.

Na escolha da subcategoria $\mathbf{Prob}_0$ de **Prob**, decidiremos proceder sempre de forma que o problema P_1 acima seja um objeto de $\mathbf{Prob}_0$, e sempre de forma que exista exatamente um morfismo em $\mathbf{Prob}_0$ de P_1 para cada problema P em $\mathbf{Prob}_0$. Em outras palavras, P_1 é o objeto inicial de $\mathbf{Prob}_0$.

3.3.6 Uma nova definição de Estratégia de Construção de Florestas de Respostas. Uma categoria $\mathbf{C}$ é dita *rarefeita* se, para todo par de objetos A, B de $\mathbf{C}$, existe no máximo um morfismo $A \to B$ em $\mathbf{C}$. Uma categoria $\mathbf{C}$ é dita *esquelética* se todo objeto de $\mathbf{C}$ é isomorfo apenas a si mesmo. Uma categoria rarefeita e esquelética corresponde a um conjunto parcialmente ordenado visto como uma categoria, e vice-versa.

Agora, nossa definição de ECFR tornou-se parametrizada pela subcategoria $\mathbf{Prob}_0$ de $\mathbf{Prob}$ (compare com a definição anterior em 3.3.2):

3.3.7 Definição (revista): Estratégia de Construção de Florestas de Respostas. Seja $\mathbf{Prob}_0$ uma subcategoria rarefeita e esquelética de $\mathbf{Prob}$ tal que o problema P_1 definido em 3.3.5 acima é o objeto inicial de $\mathbf{Prob}_0$. Uma Estratégia de Construção de Florestas de Respostas (ECFR) sobre $\mathbf{Prob}_0$ é um funtor $S : \mathbf{Prob}_0^{op} \to \mathbf{RFloresta}$ tal que, para cada problema $P = \langle\, D, R, p \,\rangle$, a floresta SP é uma floresta de respostas para P segundo a definição 3.2.3.

A ação de S sobre uma redução

$$P \xrightarrow{(\tau,\sigma)} P'$$

é mapear tal redução em um homomorfismo de florestas

$$SP' \xrightarrow{S(\tau,\sigma)} SP$$

que "concorda" com σ, no sentido de que cada nó de SP' rotulado por um par (A', k) deve ser mapeado em um nó de SP rotulado pelo par $(\sigma(A'), k)$, com $\sigma(A') = \bigcup_{r' \in A'} \sigma(r')$.

3.4
Categorias de Estratégias de Construção de Florestas

3.4.1 Relacionando estratégias. Como uma de nossas metas é estudar ECFRs e os relacionamentos entre elas, gostaríamos de definir uma categoria $\mathbf{ECFR}^0$ de Estratégias de Construção de Florestas de Respostas. O sobrescrito "0" significa que esta será uma definição preliminar, a ser refinada mais adiante. Neste tipo de categoria, os objetos são funtores, e os morfismos são transformações naturais entre funtores.

3.4.2 Definicão: a categoria $\mathbf{ECFR}^0$. Seja $\mathbf{Prob}_0$ uma subcategoria rarefeita e esquelética de $\mathbf{Prob}$ tal que o problema P_1 definido em 3.3.5 é o objeto inicial de $\mathbf{Prob}_0$. A categoria $\mathbf{ECFR}^0$ possui, como objetos, ECFRs sobre $\mathbf{Prob}_0$ (funtores S de $\mathbf{Prob}_0^{op}$ para $\mathbf{RFloresta}$ que satisfazem a definição 3.3.7). Um morfismo de uma ECFR S para uma ECFR S' é uma transformação natural de S para S', i.e., uma coleção de homomorfismos de florestas

$$\{h_P \mid P \in \mathbf{Prob}_0\}$$

em $\mathbf{RFloresta}$ tais que, para cada par de problemas P e P', o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Prob}_0 & & \mathbf{RFloresta} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "{(\tau,\sigma)}"'] & \arrow[r, "S"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h"] & {} & SP \arrow[r, "h_P"] & S'P \\
P' & \arrow[r, "S'"'] & {} & SP' \arrow[u, "{S(\tau,\sigma)}"] \arrow[r, "h_{P'}"'] & S'P' \arrow[u, "{S'(\tau,\sigma)}"']
\end{tikzcd}$$

3.4.3 Caracterizando ECFRs. Pelas definições acima, nem todo funtor de $\mathbf{Prob}_0^{op}$ para $\mathbf{RFloresta}$ é uma ECFR, mas apenas aqueles que mapeiam cada problema P de $\mathbf{Prob}_0$ em uma floresta de respostas (def. 3.2.3) para P. Isto significa que $\mathbf{ECFR}^0$ é uma subcategoria própria da categoria funtorial $\mathbf{RFloresta}^{\mathbf{Prob}_0^{op}}$.

Acontece que podemos caracterizar ECFRs como objetos de outra categoria, mais conveniente. Esta nova categoria, **ECFR**, será isomorfa a $\mathbf{ECFR}^0$ como definida acima. Na nova categoria, o codomínio dos funtores S será a categoria **Floresta** das florestas *sem rótulos*, e o rotulamento dos nós será feito através de um funtor especial e uma transformação natural.

O mais interessante é que a nova categoria **ECFR** se revelará um *topos* (significando, obviamente, que $\mathbf{ECFR}^0$ também é um *topos*). As seguintes definições conduzem à caracterização desejada.

3.4.4 Definição: o funtor L. Seja **Floresta** a categoria de florestas (sem rótulos) e homomorfismos de florestas. Seja $\mathbf{Prob}_0$ uma subcategoria rarefeita e esquelética de **Prob**, com objeto inicial P_1 como definido em 3.3.5.

Defina $L : \mathbf{Prob}_0^{op} \to \mathbf{Floresta}$ como sendo o funtor que mapeia cada problema $P = \langle\ D, R, p\ \rangle$ na floresta LP tal que o conjunto de nós do nível 0 (as raízes) é

$$C = \wp(R) \times \mathbb{N} = \{(A, k) \mid A \subseteq R,\ k \in \mathbb{N}\}$$

Em geral, o conjunto de nós do nível i é

$$C^{i+1} = \underbrace{C \times C \times \cdots \times C}_{i+1}$$

e cada nó da forma

$$((A_1, k_1), \cdots, (A_i, k_i), (A_{i+1}, k_{i+1}))$$

é filho do nó

$$((A_1, k_1), \cdots, (A_i, k_i))$$

Quanto a morfismos, L mapeia uma redução

$$P \xrightarrow{(\tau,\sigma)} P'$$

no homomorfismo de florestas

$$LP' \xrightarrow{L(\tau,\sigma)} LP$$

que mapeia cada nó do nível i de LP' da forma

$$((A'_1, k'_1), \cdots, (A'_i, k'_i))$$

no nó do nível i de LP

$$((\sigma(A'_1), k'_1), \cdots, (\sigma(A'_i), k'_i))$$

3.4.5 O significado do funtor L. O funtor L é especialmente útil para rotular os nós de outras florestas. Dada uma floresta T em **Floresta**, qualquer homomorfismo de T para LP determina um rotulamento de cada nó de T por um par (A, k) de tal forma que a floresta rotulada resultante é uma floresta de respostas para P segundo a definição 3.2.3.

(Para ver como tal rotulamento se dá, basta considerar que cada nó de T cuja imagem é um nó da forma

$$((A_1, k_1), \cdots, (A_i, k_i))$$

está sendo rotulado com o par (A_i, k_i). Os outros componentes da tupla servem apenas para armazenar o caminho da raiz até o nó.)

Assim, dada uma ECFR S e um problema P, a floresta de respostas (rotulada) SP corresponde ao par $\langle\ GP, \lambda_P\ \rangle$, onde GP é uma floresta isomorfa a SP (mas sem os rótulos), e λ_P é o homomorfismo de GP para LP que determina os rótulos.

Quanto às reduções, lembremos (def. 3.3.7) que dada uma redução

$$P \xrightarrow{(\tau,\sigma)} P'$$

$S(\tau, \sigma)$ deve "concordar" com σ. Isto significa que λ_P é componente de uma transformação natural do funtor G (que mapeia cada problema na versão sem rótulos da floresta SP e que mapeia cada redução no mesmo homomorfismo que S) para o funtor L.

Estas idéias estão ilustradas no diagrama abaixo, sendo formalizadas nas definições e resultados a seguir.

$\mathbf{Prob}_0$ **Floresta**

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dd, "(\tau,\sigma)"'] & {\begin{array}{c}\xrightarrow{G}\\ \lambda\downarrow \\ \xrightarrow[L]{}\end{array}} & GP \arrow[rr, "\lambda_P"] & & LP \\
& & & & \\
P' & & GP' \arrow[uu, "G(\tau,\sigma)"'] \arrow[rr, "\lambda_{P'}]"'] & & LP' \arrow[uu, "L(\tau,\sigma)"']
\end{tikzcd}$$

3.4.6 Definição: a categoria $\mathbf{ECFR}$. Seja $\mathbf{Prob}_0$ uma subcategoria rarefeita e esquelética de $\mathbf{Prob}$ tal que o problema P_1 definido em 3.3.5 é o objeto inicial de $\mathbf{Prob}_0$; a categoria $\mathbf{ECFR}$ possui como objetos todos os pares

$$\langle\, G, \lambda \,\rangle$$

com $G : \mathbf{Prob}_0^{op} \to \mathbf{Floresta}$ um funtor e $\lambda : G \stackrel{.}{\to} L$ uma transformação natural.

Um morfismo

$$\langle\, G, \lambda \,\rangle \xrightarrow{\alpha} \langle\, G', \lambda' \,\rangle$$

é uma transformação natural $\alpha : G \stackrel{.}{\to} G'$ tal que

$$\lambda = \lambda' \circ \alpha$$

como visto no seguinte diagrama, na categoria funtorial $\mathbf{Floresta}^{\mathbf{Prob}_0^{op}}$:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & G' \arrow[dl, "\lambda'"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

3.4.7 Proposição: $\mathbf{ECFR}$ é isomorfa a $\mathbf{ECFR}^0$.

3.4.8 Teorema: $\mathbf{ECFR}$ é um *topos.*

3.4.9 Notação. Na verdade, para cada subcategoria rarefeita e esquelética $\mathbf{Prob}_0$ de $\mathbf{Prob}$ tal que o problema P_1 definido em 3.3.5 é o objeto inicial de $\mathbf{Prob}_0$, existe um funtor $L : \mathbf{Prob}_0^{op} \to \mathbf{Floresta}$ e um *topos* $\mathbf{ECFR}_{\mathbf{Prob}_0}$. Para não carregar a notação, omitiremos o subscrito "$\mathbf{Prob}_0$", como fizemos nesta seção, chamando o *topos* apenas de $\mathbf{ECFR}$ quando não houver possibilidade de confusão. Na próxima seção, veremos como relacionar os diferentes *topoi* definidos por diferentes subcategorias $\mathbf{Prob}_0$ de $\mathbf{Prob}$.

3.5
Uma Categoria Indexada

3.5.1 Variando a subcategoria $\mathbf{Prob}_0$. Os resultados acima mostram que, para cada subcategoria rarefeita e esquelética $\mathbf{Prob}_0$ de $\mathbf{Prob}$ tal que o problema P_1 definido em 3.3.5 é o objeto inicial de $\mathbf{Prob}_0$, a categoria $\mathbf{ECFR}_{\mathbf{Prob}_0}$ é um *topos*. Perguntamo-nos, então: dada uma outra subcategoria rarefeita e esquelética $\mathbf{Prob}'_0$ de $\mathbf{Prob}$ tal que o problema P_1 é o objeto inicial de $\mathbf{Prob}'_0$, qual o relacionamento entre $\mathbf{ECFR}_{\mathbf{Prob}_0}$ e $\mathbf{ECFR}_{\mathbf{Prob}'_0}$?

3.5.2 Uma categoria de subcategorias de $\mathbf{Prob}$. Vamos nos ater ao caso mais simples em que $\mathbf{Prob}_0 \subseteq \mathbf{Prob}'_0 \subseteq \mathbf{Prob}$. Isto equivale a definir uma categoria $\mathbf{SubProb}$ cujos objetos são todas as subcategorias rarefeitas esqueléticas de $\mathbf{Prob}$, cada uma destas subcategorias tendo o problema P_1 definido em 3.3.5 como objeto inicial. A existência de um morfismo $\mathbf{Prob}_0 \to \mathbf{Prob}'_0$ em $\mathbf{SubProb}$ equivale à inclusão de categorias $\mathbf{Prob}_0 \subseteq \mathbf{Prob}'_0$.

Variando a subcategoria $\mathbf{Prob}_0$, obteremos naturalmente um funtor contravariante de $\mathbf{SubProb}$ para $\mathbf{CAT}$, ou seja, uma categoria indexada onde cada componente é um *topos*. Este funtor é definido a seguir:

3.5.3 Definição: o funtor A. O funtor $A : \mathbf{SubProb}^{op} \to \mathbf{CAT}$ é definido por

$$\mathbf{Prob}_0 \quad \mapsto \quad \mathbf{ECFR}_{\mathbf{Prob}_0}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Prob}_0 \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & \mapsto & \mathbf{ECFR}_{\mathbf{Prob}_0} \\
\mathbf{Prob}'_0 & & \mathbf{ECFR}_{\mathbf{Prob}'_0} \arrow[u, "A(\mathrm{inc})"']
\end{tikzcd}$$

onde $A(\mathrm{inc}) : \mathbf{ECFR}_{\mathbf{Prob}'_0} \to \mathbf{ECFR}_{\mathbf{Prob}_0}$ é o funtor cuja ação sobre objetos é

$$\langle\, G', \lambda' \,\rangle \quad \mapsto \quad \langle\, G' \downharpoonright \mathbf{Prob}_0,\ \lambda' \downharpoonright \mathbf{Prob}_0 \,\rangle$$

onde o funtor $G' \downharpoonright \mathbf{Prob}_0$ é a restrição do funtor G' à subcategoria $\mathbf{Prob}_0$ de $\mathbf{Prob}'_0$, e a transformação natural $\lambda' \downharpoonright \mathbf{Prob}_0$ é a restrição da transformação natural λ' à subcategoria $\mathbf{Prob}_0$ de $\mathbf{Prob}'_0$.

A ação de $A(\text{inc})$ sobre um morfismo

$$\langle\ G'_1, \lambda'_1\ \rangle \xrightarrow{m'} \langle\ G'_2, \lambda'_2\ \rangle$$

(lembrando que m' também é uma transformação natural) é a de restringir m' a $\mathbf{Prob}_0$, dando

$$\langle\ G'_1 \downharpoonright \mathbf{Prob}_0,\ \lambda'_1 \downharpoonright \mathbf{Prob}_0\ \rangle \xrightarrow{m' \downharpoonright \mathbf{Prob}_0} \langle\ G'_2 \downharpoonright \mathbf{Prob}_0,\ \lambda'_2 \downharpoonright \mathbf{Prob}_0\ \rangle$$

3.6
Conclusões do Capítulo

3.6.1 Resumo. Os elementos envolvidos na definição de um espaço de busca para uma instância d de um problema $\langle\ D, R, p\ \rangle$ são:

- Uma subcategoria rarefeita e esquelética $\mathbf{Prob}_0$ de $\mathbf{Prob}$ tal que o problema P_1 definido em 3.3.5 é o objeto inicial de $\mathbf{Prob}_0$. O problema P em questão deve ser um objeto de $\mathbf{Prob}_0$, e a redução $P_1 \xrightarrow{(\tau,\sigma)} P$ deve ser tal que $\tau(\star) = d$, com d a instância em questão;
- Um funtor $S : \mathbf{Prob}_0 \to \mathbf{RFloresta}$, satisfazendo as condições definidas em 3.3.7, que associa uma floresta de respostas SP à instância d de interesse.

Ao longo do capítulo, vimos que

- Fixada a subcategoria $\mathbf{Prob}_0$, a categoria de todos os funtores $S : \mathbf{Prob}_0 \to \mathbf{RFloresta}$ é um *topos*, chamado de $\mathbf{ECFR}^0$;
- Cada funtor $S : \mathbf{Prob}_0 \to \mathbf{RFloresta}$ corresponde a um par $\langle\ G, \lambda\ \rangle$, com $G : \mathbf{Prob}_0 \to \mathbf{Floresta}$ um funtor e $\lambda : G \dot{\to} L$ uma transformação natural, onde L é o funtor definido em 3.4.4. Reciprocamente, cada par $\langle\ G, \lambda\ \rangle$ corresponde a um funtor $S : \mathbf{Prob}_0 \to \mathbf{RFloresta}$.
- O *topos* $\mathbf{ECFR}^0$ é isomorfo à categoria de todos os pares $\langle\ G, \lambda\ \rangle$; chamamos esta categoria de $\mathbf{ECFR}$.

No próximo capítulo, examinaremos estes dois *topoi* isomorfos, $\mathbf{ECFR}^0$ e $\mathbf{ECFR}$, além do *topos* $\mathbf{ECF} = \mathbf{Floresta}^{(\mathbf{Prob}_0^{op})}$, intimamente relacionado aos dois primeiros.