

2

Modelagem Matemática

2.1

Formulação Matemática para Escoamento Bifásico em Meios Porosos

Ao longo do texto, as fases de água e óleo serão representadas por w e o , respectivamente. Por simplicidade de notação, descrevemos o escoamento horizontal sem fontes ou sorvedouros. Também desprezamos efeitos térmicos e da compressibilidade.

Para o fluido $l = w, o$, s_l é a saturação, isto é, a fração do volume poroso ocupado pelo fluido, ρ_l é a densidade, u_l é a velocidade de escoamento do fluido l , e μ_l é a viscosidade. Como os fluidos ocupam o espaço inteiro dos poros, $s_w + s_o = 1$. Conseqüentemente, podemos escolher ou s_w ou s_o para determinarmos ambas as saturações.

A permeabilidade relativa do fluido l , representada por k_l , é uma função adimensional da saturação s_l , Kk_l é a capacidade do meio poroso de permitir a passagem do fluido l , onde K é a permeabilidade absoluta da rocha, que mede a sua capacidade de escoamento de um fluido não misturado. Outra propriedade da rocha é a porosidade ϕ , *i.e.*, a fração do volume total ocupada pelos poros. Por simplicidade, consideraremos ambos K e ϕ constantes.

O escoamento em um meio poroso de duas fases fluidas imiscíveis, misturadas a nível macroscópico, pode ser modelado pelo sistema de equações diferenciais parciais (ver [13], [4] e [3]) mostrado abaixo:

Sejam $u = (u_o + u_w)$, $\beta_w = \frac{k_w}{\mu_w}$, $\beta_o = \frac{k_o}{\mu_o}$, $\beta = \beta_w + \beta_o$. Sendo $f_l = \frac{\beta_l}{\beta}$ as funções de fluxo fracionais do óleo e da água, temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 - 1.1 : \mathbf{u} = -K\beta\nabla p. \\ 2 - 1.2 : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \\ 2 - 1.3 : \phi \frac{\partial s_w}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_w}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_w}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (2-1)$$

onde $\beta = \beta(s_w)$, $f_w = f_w(s_w)$, $s_w = s_w(x, y, t)$ e $p = p(x, y, t)$.

Queremos saber, ao longo do tempo, o valor do campo da saturação s_w . Com a equação (2-1.3) podemos encontrar o valor de s_w desde que saibamos a velocidade que pode ser calculada usando (2-1.1) e (2-1.2). Uma vez que em um tempo t_0 tenhamos a pressão p , por (2-1.1) temos $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$, e assim obtemos $\frac{\partial s_w}{\partial t}$.

Dessa forma sabemos aproximadamente s_w no tempo subsequente t_1 e resolvendo novamente (2-1.1) com (2-1.2), encontramos a pressão p e a velocidade \mathbf{u} em um próximo tempo t_1 .

Suporemos as condições iniciais $s(x, t = 0) = 0$ conhecidas e $p = p_0$ na fronteira $\partial\Omega$. O vetor η é unitário e normal à superfície do domínio Ω .

O algoritmo que descreve o procedimento para resolvermos o sistema (2-1) é simbolicamente o seguinte:

Algorithm 1 Sistema Geral

Require: $s(x, y, 0)$ (saturação no tempo $t = 0$) e Tf (tempo discreto final)

Ensure: $t = Tf$

- 1: **for** $t = 0$ to Tf **do**
 - 2: De $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ temos $p(x, y, t)$ onde $\beta = \beta(s(x, y, t))$
 - 3: De (2-1.1) encontramos $\mathbf{u}(x, y, t)$
 - 4: Uma vez que $\mathbf{u}(x, y, t)$ é conhecido, pela equação (2-1.3) podemos calcular $\frac{\partial s}{\partial t}(x, y, t)$
 - 5: $s(x, y, t + \Delta t) \simeq s(x, y, t) + \Delta t \frac{\partial s}{\partial t}(x, y, t)$
 - 6: $t = t + \Delta t(x, y, t)$
 - 7: **end for**
-

O objetivo principal deste trabalho é resolver as linhas 2 e 3 do algoritmo 1 com boa precisão na variável \mathbf{u} , em paralelo e escalável.

2.2

Método de Elementos Finitos Mistos

Queremos resolver a equação abaixo com uma aproximação para a velocidade $\mathbf{u} = -\lambda(s)\nabla p$, $\lambda(s) = K(s)\beta(s)$ e secundariamente p .

$$\begin{cases} \mathbf{u} = -\lambda(s)\nabla p \text{ no domínio } \Omega & \text{(Eq. Darcy)} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ no domínio } \Omega & \text{(Eq. Cons. Massa)} \end{cases} \quad (2-2)$$

$$p = p_0 \text{ na fronteira } \partial\Omega$$

A principal variável de interesse físico em (2-2) é a saturação $s(x, y, t)$, que nos indicará quanto de petróleo poderá ser recuperado.

Uma questão importante na simulação de fluidos em meios porosos é a maneira na qual a velocidade \mathbf{u} de Darcy é calculada. Uma vez que desejamos saber com precisão a saturação s precisaremos de boa aproximação para \mathbf{u} . As propriedades dos meios porosos, no entanto, variam abruptamente (K por exemplo), e também as viscosidades $\mu_l(l = o, w)$ mudam rapidamente na interface dos fluidos. Estas mudanças agudas são acompanhadas por mudanças bruscas no gradiente de pressão, o qual, de uma maneira compensatória, leva a uma suave velocidade de Darcy. Os métodos padronizados de diferenças finitas e de elementos finitos resolvem o sistema (2-2) para a pressão p , que não necessariamente é suave devido ao impacto de coeficientes. A resultante p é então numericamente diferenciada e então multiplicada por um coeficiente possivelmente brusco para obtermos \mathbf{u} . Assim, estes métodos geram velocidades freqüentemente pouco precisas, o que reduz a precisão da saturação s que queremos encontrar. O método de elementos finitos mistos aproxima simultaneamente p e \mathbf{u} do sistema (2-2) levando a uma maior precisão da velocidade \mathbf{u} (ver [6]). A chave para alcançarmos tais aproximações é o uso de um espaço de polinômios lineares por partes como proposto por Raviart-Thomas (ver [1]). Para referência de aplicações de sucesso na simulação de reservatórios de petróleo ver [5].

A variável $\lambda(s(x, y))$ que depende da posição, pode possuir uma estrutura muito complexa, dependendo do meio poroso e do fluido, mas assumiremos como simplificação do nosso modelo que λ é limitada e integrável em Ω .

Notação para produto interno entre dois vetores x e y : $\langle x, y \rangle$.

O espaço vetorial de funções $L^2(\Omega)$ é tal que $v \in L^2(\Omega) \Leftrightarrow \int_{\Omega} v^2 < \infty$, e $H(\nabla \cdot, \Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}$.

Fazendo:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= -\lambda(s)\nabla p \text{ no domínio } \Omega, \\ \lambda^{-1}\mathbf{u} &= -\nabla p, \\ \lambda^{-1}\mathbf{u} + \nabla p &= 0, \\ (\lambda^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\nabla p, \mathbf{v}) &= 0, \quad \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega).\end{aligned}$$

E também:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \text{ no domínio } \Omega, \\ q(\nabla \cdot \mathbf{u}) &= 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega).\end{aligned}$$

O problema variacional equivalente ao sistema (2-2) fica então sendo o seguinte: encontrar o par $(\mathbf{u}, p) \in (H(\nabla \cdot, \Omega), L^2(\Omega))$ tal que

$$\begin{cases} 2 - 3.1 : \int_{\Omega} \langle \lambda^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle dx dy + \int_{\Omega} \langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle dx dy = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in H(\nabla \cdot, \Omega) \\ 2 - 3.2 : \int_{\Omega} q(\nabla \cdot \mathbf{u}) dx dy = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega) \end{cases} \quad (2-3)$$

Integrando o segundo termo da equação (2 – 3.1) por partes, temos:

$$\int_{\Omega} \langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle dx dy = - \int_{\Omega} \langle \nabla \mathbf{v}, p \rangle dx dy + \int_{\partial \Omega} p \langle \mathbf{v}, \eta \rangle ds,$$

onde η é a normal à superfície. E então o sistema (2-1) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \langle \lambda^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle dx dy - \int_{\Omega} ((\nabla \cdot \mathbf{v})p) dx dy = - \int_{\partial \Omega} \langle p \mathbf{v}, \eta \rangle ds \quad \forall \mathbf{v} \in H(\nabla \cdot, \Omega), \\ - \int_{\Omega} (q(\nabla \cdot \mathbf{u})) dx dy = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (2-4)$$

O sistema (2-4) será discretizado por elementos formados por uma malha retangular como mostrado na figura (2.1).

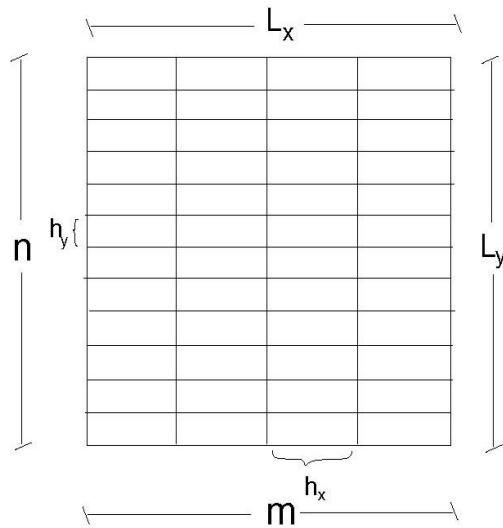


Figura 2.1: Malha Retangular para Discretização.

Para discretizar o sistema (2-4) consideraremos constantes h_x e h_y , onde $h_x = L_x/m$ e $h_y = L_y/n$, sendo m, n o número de divisões e L_x, L_y o

tamanho dos eixos x, y , respectivamente. Associaremos com $h = (h_x, h_y)$ um subespaço de elementos finitos $Q_h \times V_h$ de $H(\nabla \cdot, \Omega) \times L^2(\Omega)$; o espaço velocidade então será $Q_h = Q_x \times Q_y$, onde Q_x e Q_y contém funções lineares por partes e contínuas na direção x e y respectivamente. O espaço pressão V_h consiste de funções que são constantes por partes em cada retângulo; isto é, dado h_x e h_y a pressão é constante como pode ser visto na equação (2-5). Para visualizarmos o formato de $Q_h \times V_h$, seja κ o elemento descrito na figura (2.2) (observemos que κ define os respectivos i, j).

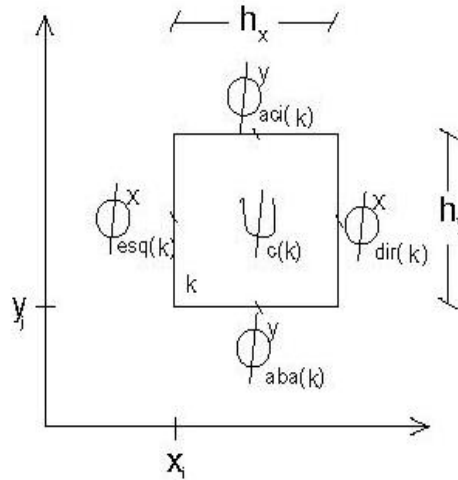


Figura 2.2: Elemento κ .

Onde temos:
$$\begin{cases} aci(\kappa) = (i + 1, j) \\ aba(\kappa) = (i, j) \\ esq(\kappa) = (i, j) \\ dir(\kappa) = (i, j + 1) \\ c(\kappa) = (i, j) \end{cases}$$

Sendo $x_i = x_0 + h_x i$ e $y_i = y_0 + h_y i$. Para cada elemento κ considerado temos:

$$Q_h(\kappa) = \begin{cases} \phi_{i,j}^x = \begin{pmatrix} 1 - (x - x_i)/h_x \\ 0 \end{pmatrix} \\ \phi_{i,j}^y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - (y - y_j)/h_y \end{pmatrix} \\ e = 0 \text{ fora do elemento } \kappa. \end{cases} \quad \phi_{i,j+1}^x = \begin{pmatrix} (x - x_i)/h_x \\ 0 \end{pmatrix} \\ \phi_{i+1,j}^y = \begin{pmatrix} 0 \\ (y - y_j)/h_y \end{pmatrix},$$

$$V_h(\kappa) = \begin{cases} \psi_{i,j} = \text{constante} = 1, \\ e = 0 \text{ fora do elemento } \kappa. \end{cases} \quad (2-5)$$

Assim temos bem definidos $Q_h = \sum_{\kappa=1}^{mn} Q_h(\kappa)$, e $V_h = \sum_{\kappa=1}^{mn} V_h(\kappa)$.

Agora coloquemos as variáveis relativas à pressão e à velocidade em uma malha retangular, tomando como exemplo $m = 4$ e $n = 3$ (ver figura (2.3)).

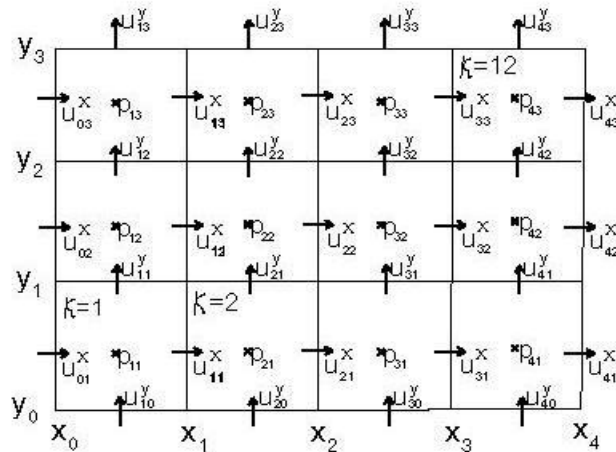


Figura 2.3: Malha Retangular mostrando velocidade e pressão discretas.

Em seguida veremos como associar estes coeficientes aos nós de uma malha retangular. Fazemos $u \in \mathbb{R}^{2mn+m+n}$ e $p \in \mathbb{R}^{mn}$ os vetores que contêm as variáveis descritas na malha, com a seguinte ordenação:

$$u = (u_{0,1}^x, u_{1,1}^x, \dots, u_{m,1}^x, \dots, u_{0,n}^x, u_{1,n}^x, \dots, u_{m,n}^x, u_{1,0}^y, u_{1,1}^y, \dots, u_{1,n}^y, \dots, u_{m,0}^y, u_{m,1}^y, \dots, u_{m,n}^y),$$

$$p = (p_{1,1}, p_{2,1}, \dots, p_{m,1}, \dots, p_{1,n}, p_{2,n}, \dots, p_{m,n}).$$

Considerando esta discretização, o problema de elementos finitos mistos correspondente para resolver o sistema (2-4) fica sendo:

Encontrar o par $(\mathbf{u}_h, p_h) \in Q_h \times V_h$, tal que:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\lambda^{-1} \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) dx dy - \int_{\Omega} ((\nabla \cdot \mathbf{v}_h) p_h) dx dy = - \int_{\partial\Omega} (p_h \langle \mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta} \rangle) ds \quad \forall \mathbf{v}_h \in Q_h, \\ - \int_{\Omega} (q_h (\nabla \cdot \mathbf{u}_h)) dx dy = 0 \quad \forall q_h \in V_h. \end{cases} \quad (2-6)$$

Analisemos agora as equações de álgebra linear envolvidas com a discretização realizada em (2-6). Consideremos a seguinte expansão para \mathbf{u}_h e p_h :

$$\begin{aligned} u_h(x, y) &= \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n u_{i,j}^x \phi_{i,j}^x(x, y), \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n u_{i,j}^y \phi_{i,j}^y(x, y) \right), \\ p_h(x, y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{i,j} \psi_{i,j}(x, y), \end{aligned}$$

onde $\phi_{i,j}^x, \phi_{i,j}^y$ e $\psi_{i,j}$ são funções bases definidas no domínio Ω , agora representado pela malha de retângulos nos nós bases para os subespaços Q_h^x, Q_h^y e V_h .

Assim o sistema (2-6) assume o seguinte formato:

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad (2-7)$$

A matriz possui uma estrutura em blocos da forma:

$$A = \begin{pmatrix} A^x & 0 \\ 0 & A^y \end{pmatrix},$$

na qual $A^x = \mathfrak{R}^{(m+1)n \times (m+1)n}$ e $A^y = \mathfrak{R}^{(n+1)m \times (n+1)m}$ possuem entradas da forma

$$\int_{\Omega} (\lambda^{-1} \phi_{i,j}^x \phi_{k,l}^x) dx dy \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} (\lambda^{-1} \phi_{i,j}^y \phi_{k,l}^y) dx dy, \quad (2-8)$$

respectivamente. Reparemos que estas entradas possuem informações relacionadas com a variável espacial $\lambda(s(x, y))$.

A matriz B possui a estrutura em blocos:

$$B = \begin{pmatrix} B^x \\ B^y \end{pmatrix}^T,$$

onde $B^x \in \mathfrak{R}^{(m+1)n \times mn}$ e $B^y \in \mathfrak{R}^{(n+1)m \times mn}$ possuem entradas que são respectivamente:

$$-\int_{\Omega} \psi_{i,j} \frac{\partial \phi_{k,l}^x}{\partial x} dx dy \quad \text{e} \quad -\int_{\Omega} \psi_{i,j} \frac{\partial \phi_{k,l}^y}{\partial y} dx dy. \quad (2-9)$$

Calculando essas integrais, podemos observar que B^x e B^y são reduzidas a aproximações em diferenças finitas de $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$, respectivamente. No entanto a formulação usada pode ser estendida a malhas não estruturadas e neste caso B^x e B^y não formam uma diferença finita diretamente.

O vetor f possui o seguinte formato

$$f = \begin{pmatrix} f^x \\ f^y \end{pmatrix},$$

onde $f^x \in \mathfrak{R}^{(m+1)n \times 1}$ e $f^y \in \mathfrak{R}^{(n+1)m \times 1}$ possuem entradas que são formadas respectivamente por:

$$-\int_{\partial\Omega} p_h \langle \phi_{k,l}^x, \eta \rangle ds, \quad -\int_{\partial\Omega} p_h \langle \phi_{k,l}^y, \eta \rangle ds.$$

Para o exemplo que estamos estudando, $g \in \mathfrak{R}^{mn \times 1}$ anula-se.