

## 4 Resultados Numéricos e discussões

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados que obtivemos a partir da simulação com o modelo CDS. Alguns resultados aqui apresentados já foram obtidos por outros métodos. No entanto, nosso objetivo em apresentá-los é mostrar a confiabilidade do modelo CDS para a descrição da dinâmica de sistemas granulares.

### 4.1 Grãos Dentro de Uma Caixa quadrada (2D)

Sistemas constituídos por gases granulares confinados em uma caixa bidimensional já têm sido bem estudado por diversos autores (Menon<sup>7</sup> Kudrolli<sup>37</sup>, etc.), embora muitos fenômenos não estejam ainda bem entendidos. Nosso principal objetivo ao estudar um sistema semelhante é comparar nossos resultados com os de outros autores. Um resultado novo que poderíamos obter seria a rehomogenização do sistema depois de um longo tempo transiente, devido a volta do sistema à elasticidade. Contudo, nosso modelo ainda não é capaz de explorar esse comportamento de maneira satisfatória. Isso será discutido adiante.

#### 4.1.1 Gás Infinito

Consideraremos uma caixa quadrada de lado  $L_x = L_y = L$ , contendo  $N$  grãos que colidem inelasticamente entre si. A densidade em número de grãos será  $n = N/L^2$ . Tomemos um reticulado de  $L^2$  células unitárias para cobrir o sistema. Inicializamos o sistema com as seguintes condições:

$$\begin{aligned}Tg^*(i, j, 0) &= T_{g0}^* \left(1 + \frac{\zeta(i, j)}{10}\right), \\n^*(i, j, 0) &= n_0^* \left(1 + \frac{\zeta(i, j)}{10}\right), \\u^*(i, j, 0) &= 0,\end{aligned}$$

onde os  $0 < \zeta(i, j) < 1$  são números aleatórios com distribuição uniforme. Estas condições garantem que o sistema inicialmente tem pequenas flutuações na densidade e temperatura granular (da ordem de um décimo do seus valores médios). Sem essas flutuações o CDS geraria estados sempre homogêneos. Essas flutuações iniciais farão com que surjam flutuações também no fluxo de grãos. Escolhemos os valores iniciais das constantes  $T_{g0}^* = 10$  e  $n_0^* = 0.1$

e deixamos o sistema evoluir até atingir o estado estacionário. O valor de  $n_0$  garante a condição de baixa densidade e está dentro da faixa de valores utilizados por outros autores<sup>37,35</sup>. As condições de contornos usadas são periódicas em todos os lados da caixa. Os valores de  $\eta$  a  $\lambda$  foram 0,005 e 0,002 respectivamente. Substituindo esses valores na eq. (3.31 ou 3.32), temos:

$$\left(\frac{d}{a}\right) \approx \frac{1}{31} \Rightarrow a \approx 31d. \quad (4.1)$$

Pela eq (3.33)  $a \approx 3,1l$ . Esses valores foram escolhidos de modo que cada célula de lado  $a$  contenha um número razoável de grãos, a fim de que possamos estudar a evolução das variáveis dentro da células. Para esses valores de parâmetros, podemos esperar que ocorram muitas colisões dentro de cada célula<sup>a</sup>. Além disso nesse caso usamos  $L = 32$  de modo que o tamanho do sistema físico que estamos simulando é dado por  $aL \approx 99,2l$ .

Durante a fase inicial da simulação, enquanto o sistema se “resfria”, injetamos energia no mesmo de acordo com um mecanismo dado por:

$$Tg(i, j, t + 1) = Tg(i, j, t) + \zeta(i, j) \frac{n(i, j, t)}{n_0}, \quad (4.2)$$

Esta forma de injeção de energia favorece a uniformização da distribuição de densidade durante o estado estacionário. Deixamos então o sistema atingir o estado estacionário. Isto ocorre para  $t \approx 5000$ . A fig. (4.1) mostra a evolução da temperatura granular média, mostrando os regimes pelos quais o sistema passa.

O primeiro declive da curva mostra um regime onde a taxa de energia perdida devido às colisões é maior do que a taxa de injeção, portanto a energia decresce até atingir o estado estacionário. Fisicamente, isso traduz o fato de que à medida em que a temperatura granular decresce as velocidades típicas das partículas ( $v_0 \propto \sqrt{T_{g0}}$ ) também decrescem, ficando o sistema cada vez mais elástico. No regime estacionário, as taxas de perda e injeção de energia são iguais. No regime de resfriamento homogêneo não há injeção de energia e o sistema, portanto, sempre se resfriará. É sobre o regime de resfriamento que estamos interessados.

Quando “desligamos” a injeção de energia, a temperatura granular média começa a decrescer obedecendo a lei de Haff, como mostra a figura(4.2). À medida que o sistema vai “congelando” observamos a formação de vórtices (fig. 4.3), e a tendência de glomeração.

A fig.(4.4) mostra uma seqüência de configurações desde  $t = 10000$ , quando o sistema começa a se resfriar, até  $t = 85000$ . Observemos que

---

<sup>a</sup>Estado de resfriamento homogêneo.

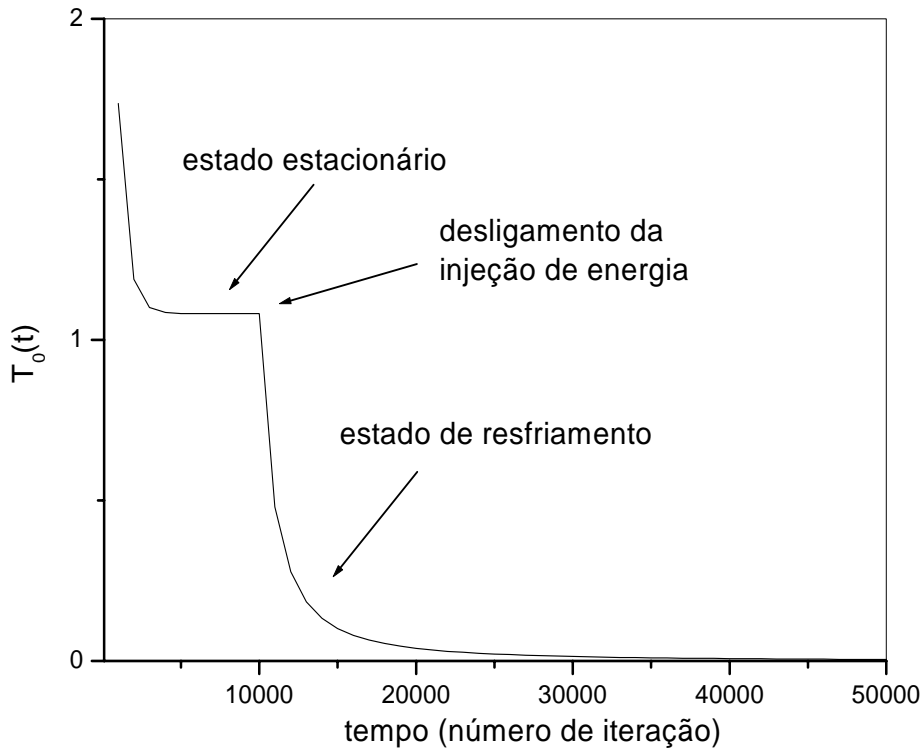


Figura 4.1: Estado do sistema em termos da evolução temporal da temperatura granular.

o sistema começa em um estado quase homogêneo (observe a ausência de vortices) em  $t = 10000$ . Observemos ainda que embora o sistema não seja homogêneo, não observamos desvio na lei de Haff. Isso acontece pois nosso sistema é quase homogêneo. No regime em que estamos estudando, ainda não há aglomerados, mas apenas a incipiência deles. Isso pode ser visto pela pequena variação típica da densidade, como mostra a fig.(4.4.a), onde  $0,85 \leq n^*/n_0^* \leq 1,20$ . Observando ainda a fig.(4.4.b), observamos que a temperatura também varia muito pouco através do sistema, com  $0,85 \leq \frac{T_g^*(t)}{T_0^*(t)} \leq 1,20$ . Esses valores justificam a escolha do regime de baixas densidades ( $n_0^* \approx 0.1$ ) e pequenos gradientes.

É interessante destacar que o fator de escala  $1/\sqrt{T_0^*(t)}$  para o campo de velocidade na fig.(4.3) foi introduzido, pois é nesta escala que as flutuações aparecem, como já mencionamos anteriormente quando rescalamos as flutuações pela eq.(2.72). Um fator de 20 vezes foi introduzido a fim de facilitar a visualização das setas e não desempenha nenhum papel na dinâmica do sistema.

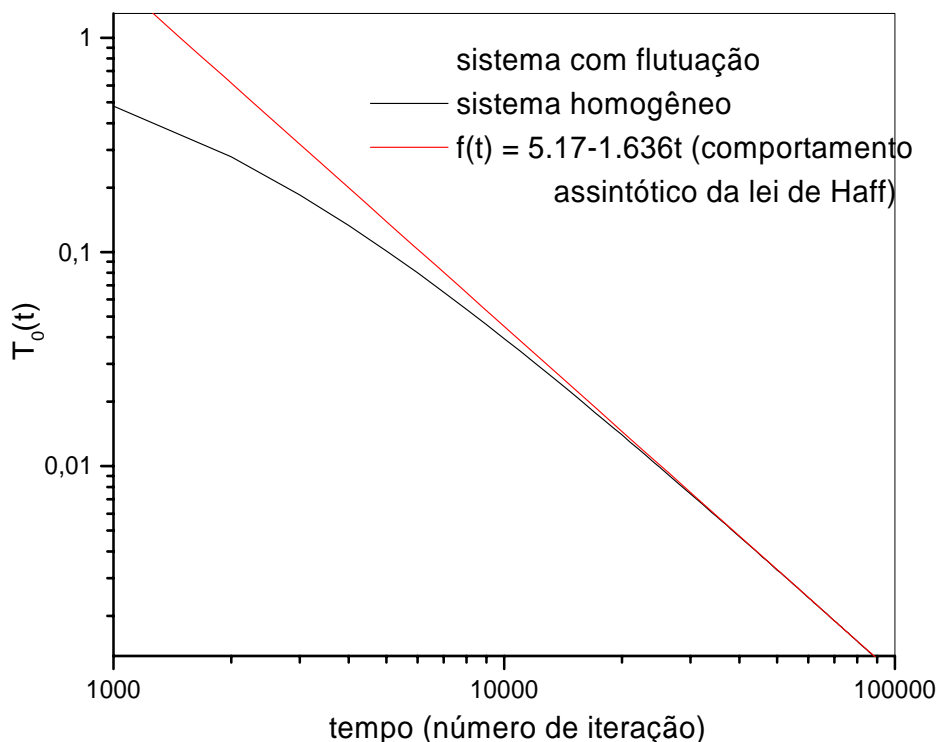


Figura 4.2: Dependência da temperatura granular média com o tempo. A função  $f$  (em vermelho) mostra o comportamento assintótico da lei de Haff.

#### 4.1.2 Discussões

Os resultados acima expostos estão em bom acordo numérico-qualitativo com os resultados obtidos por outros métodos. Lembremos que de nosso modelo não esperamos resultados extremamente acurados do ponto de vista quantitativo.

Voltemos a olhar a fig.(4.3) do ponto de vista qualitativo. Observemos que os vórtices se formam em pares (vórtice e antivórtice). Isso se deve ao fato de que o momento angular total do sistema deve se conservar, uma vez que não há torques externos atuando sobre o mesmo. Ainda na fig.(4.3), se formos cuidadosos, podemos observar que os vórtices menores (menores comprimentos de onda) vão desaparecendo, dando lugar aos vórtices maiores (maiores comprimentos de onda). Isso já havia sido predito na nossa análise de instabilidades.

Os vórtices aparecem devido à tendência das velocidades se colimarem após as colisões (veja fig. 2.1) e como o momento total deve se conservar, vórtices aparecem.

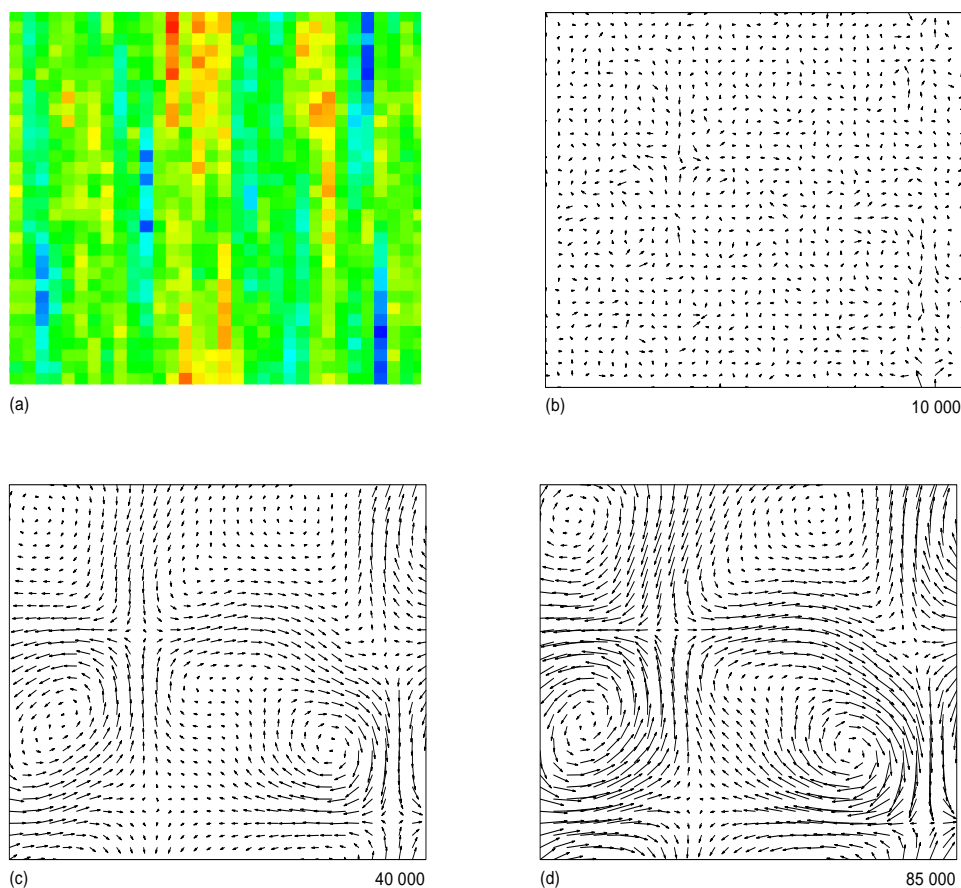


Figura 4.3: Distribuição de densidade e Campo de velocidade escalado ( $20\mathbf{u}^*/\sqrt{T_0^*(t)}$ ). Na fig. (a) e (b) temos a distribuição de densidade e o campo de velocidade respectivamente, no instante do desligamento da injeção de energia. As demais fig. mostram a evolução dos vórtices. As setas representam a velocidade de fluxo de uma célula. As velocidades são muito baixas, por isso os vórtices aparecem parados.

Comparando os gráficos da densidade e temperatura granular na fig(4.4), observamos que elas são quase que complementares uma da outra, isto é, onde a densidade é alta a temperatura granular é baixa, e vice versa. Isso é análogo ao caso de um gás ideal sob pressão uniforme<sup>29</sup>, onde  $\rho \propto 1/T$ .

É fácil entender fisicamente os resultados acima. Dentro das regiões de maior densidade o número de colisões por unidade de tempo aumenta, fazendo com que a temperatura granular diminua mais rapidamente, ao contrário do que ocorre nas regiões de baixas densidades. Com a diminuição mais rápida da temperatura nessas regiões, as velocidades dos grãos nessas regiões também diminuem rapidamente, e, portanto, o sistema deve ficar aglomerado e menos inelástico. Contudo, esperamos a homogeneização<sup>30</sup>

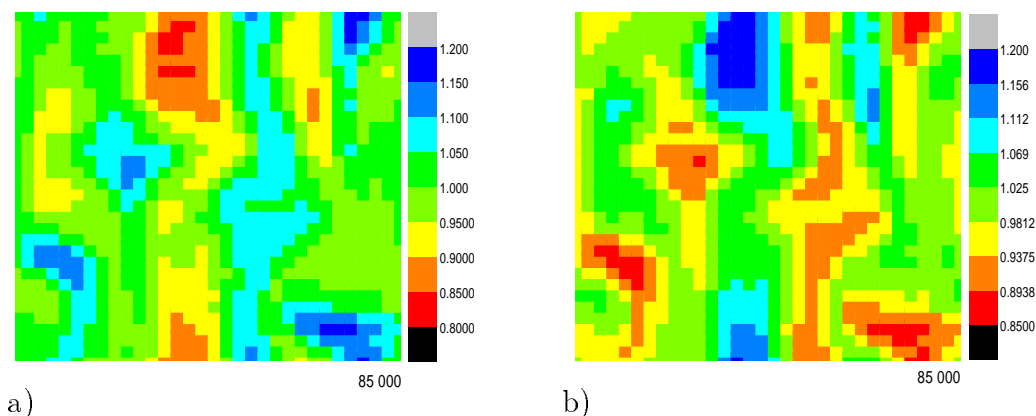


Figura 4.4: Mapa de distribuição de densidade (a) e temperatura granular (b). Os valores plotados são escalados como:  $n^*/n_0^*$  para a densidade e  $T_g^*/T_0^*$  para a temperatura granular.

para  $t \rightarrow \infty$ .

O leitor pode legitimamente se perguntar: se o sistema vai cada vez se tornando mais elástico como foi previsto, porquê não foi deixado evoluir até que voltasse a se homogeneizar novamente? O fato é que nosso modelo, bem como as próprias equações hidrodinâmicas de Navier-Stokes, como foi inicialmente destacado, só são aplicáveis a gases granulares suficientemente diluídos. Se deixarmos o sistema evoluir indefinidamente, em algumas regiões a densidade vai aumentar muito com a formação dos aglomerados, de modo que o modelo já não consegue descrever mais a dinâmica do sistema devido a presença deles. Isso é de fato uma limitação do nosso modelo que deverá ser tratada com a introdução de um outro parâmetro que descreverá a interação dos aglomerados<sup>b</sup>.

## 4.2 Fluxo de Grãos Através de um Tubo Retangular 2D

Prosseguindo com a aplicação do nosso modelo, consideramos um tubo retangular 2D de largura  $L = 48$  com um gás granular fluindo no seu interior. A fim de fazer o sistema ficar mais interessante, imaginemos um estrangulamento causado por uma válvula semi aberta interrompendo a passagem dos grãos. Sistemas semelhantes em 3D podem ser encontrados,

<sup>b</sup>Eis aqui, portanto, uma grande vantagem do CDS no estudo de sistemas granulares: a possibilidade de introduzir novos parâmetros que não estão presentes nas equações hidrodinâmicas. Esses novos parâmetros de ordem não serão introduzidos neste trabalho, mas serão implementados num posterior trabalho.

por exemplo, em tubulações de máquinas agrárias como as de moer milho, onde os pequenos pedaços de grãos triturados são soprados por um tubo até a saída para o envasamento.

A fim de simular um sistema semelhante a esses consideraremos uma caixa retangular idêntica à da seção anterior. Neste caso as condições de contorno são periódicas em duas paredes e paredes rígidas e elásticas nas outras duas. O fluxo é estimulado por um campo, adicionando um termo  $\gamma g$  à eq. (3.19). Este termo faz com que aumente a velocidade de fluxo na direção do eixo  $x$ . A condição periódica de contorno faz com que o fluxo seja contínuo. O estrangulamento é feito introduzindo uma barreira retangular através das condições de contorno.

A fig.(4.5) mostra a configuração da velocidade, densidade e temperatura granular. Podemos observar que a densidade aumenta na região onde os grãos encontram com a barreira e diminui na região oposta. Isto acontece pois quando os grãos encontram a parede eles são comprimidos, aumentando assim a densidade e o inverso acontece do outro lado, onde há uma região onde o gás é rarefeito. A distribuição de temperatura por sua vez não aparece também uniforme. Podemos observar que ela aumenta na região de encontro dos grãos com a barreira e diminui no região oposta, analogamente ao comportamento da densidade. Isto é porque há um aumento da pressão na região de chegada, causando o aumento na temperatura granular.

Na fig. (4.6) trocamos a barreira retangular por uma outra em forma de cunha. Neste caso aumentamos o tamanho do sistema para  $L = 192$  a fim de minimizar a rugosidade do contorno da “cunha”. Para melhor visualização, mostramos apenas a componente perpendicular (em relação à direção do fluxo no tubo) da velocidade. Obtemos um comportamento análogo ao caso anterior. Imediatamente após os grãos deixarem o contorno da cunha eles avançam em direção à região de baixa densidade. Ao longo de toda a região inclinada há um aumento da densidade, devido à rugoridade do contorno. Esse resultado é similar ao obtido por Rericha<sup>38</sup> *et al.*

Além das configurações que apresentamos aqui, podemos com nosso método estudar sistemas sujeitos a diversos tipos de condições de contornos.

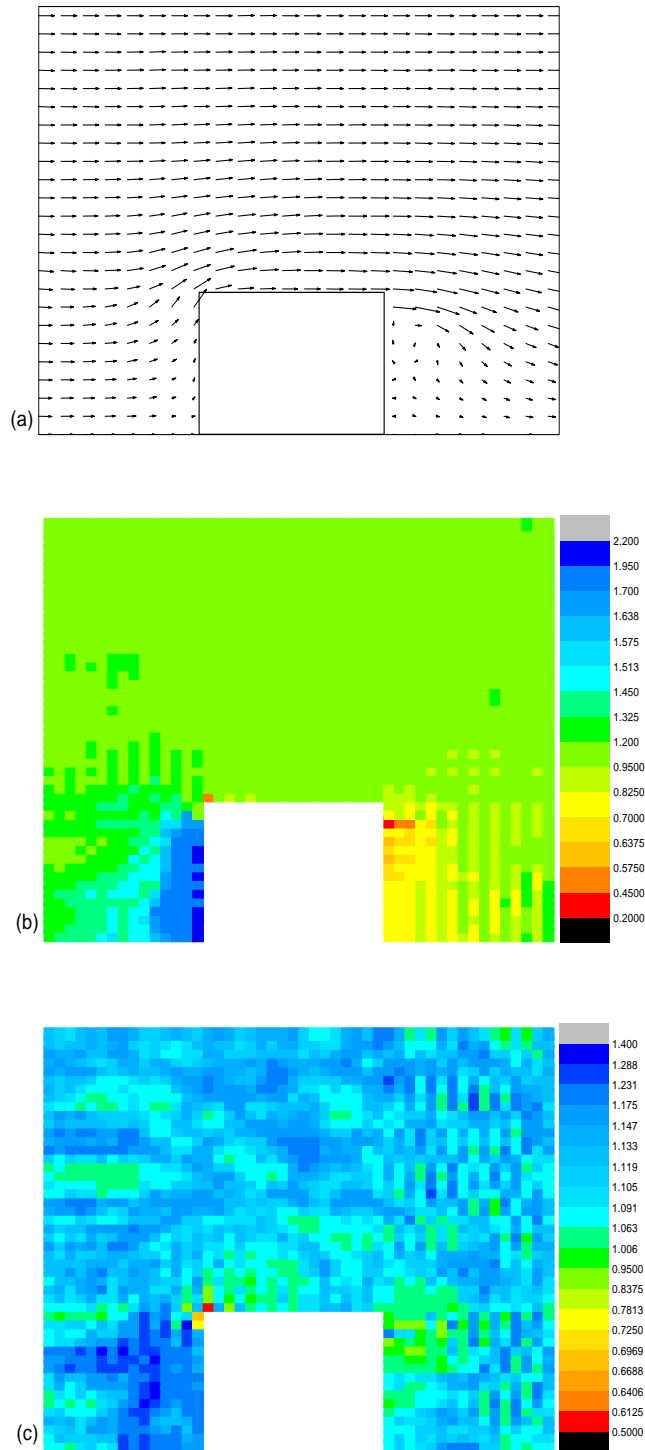


Figura 4.5: Fluxo de um gás granular através de um tubo retangular 2D, com uma barreira quadrada de altura  $50l$ , aproximadamente. a) velocidade, b) densidade e c) temperatura granular.



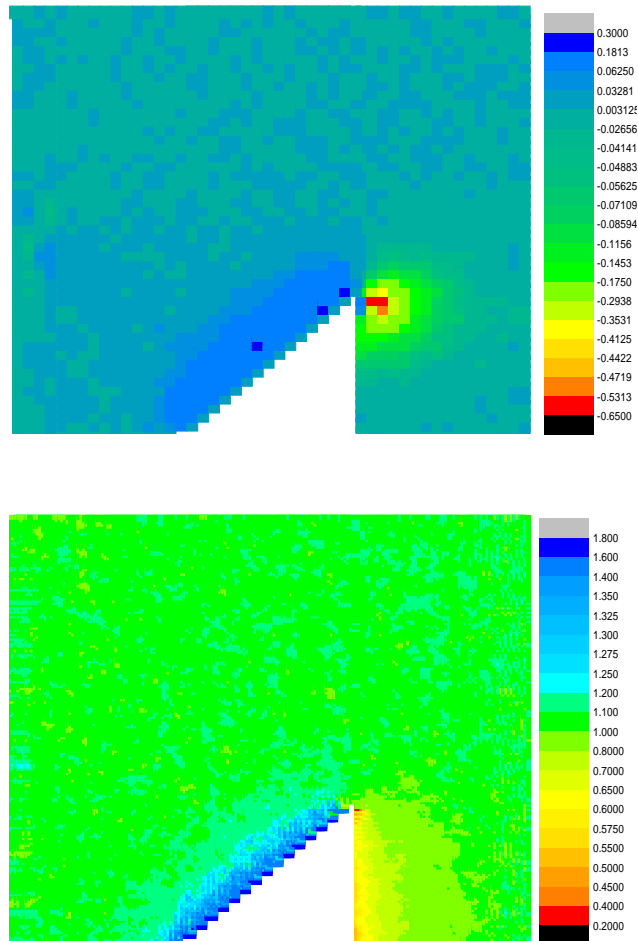


Figura 4.6: Fluxo de um gás granular através de um tubo retangular 2D, com uma barreira tipo cunha de altura  $198l$ , aproximadamente. a) componente perpendicular da velocidade, b) densidade.