2
Considerações Teóricas

2.1.
Generalidades sobre a produção industrial

Segundo Krajewsky & Ritzman (2002), os processos industriais podem ser classificados em cinco principais tipos:

- Processo por Projeto
- Processo com Fluxo Geral
- Processo por Fornadas
- Processo em Linha
- Processo Contínuo

Estes tipos de processos são possíveis de serem encontrados tanto na manufatura de bens físicos como na produção de serviços. O processo a ser adotado por uma determinada empresa vai depender do volume e do grau de customização demandados pelos seus clientes.

A Figura 2.1 mostra a relação entre a customização e o volume de produção, segundo o tipo de processo adotado.

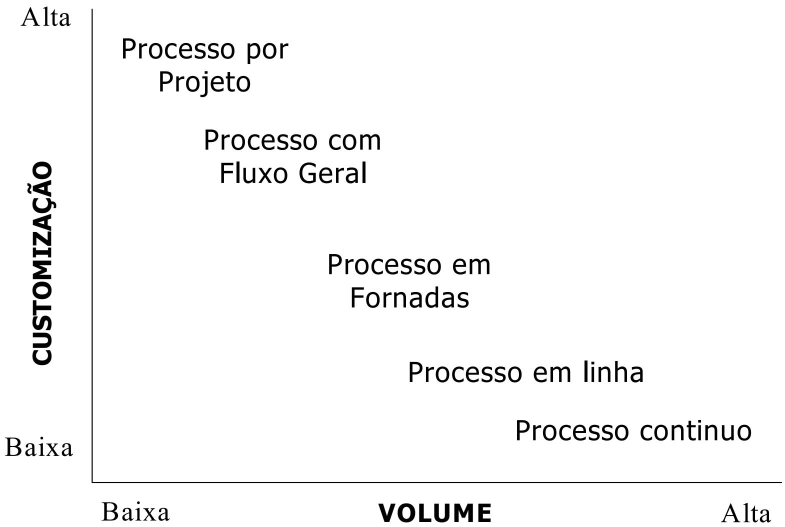

Figura 2.1 – Customização vs. Volume, nos tipos de processos
FONTE: Adaptado de Krajewsky & Ritzman (2002)

Por sua parte, Graves (1981) classifica em dois grandes grupos a geração de necessidades de produção: *Open Shop* e *Closed Shop*. Num *Open Shop*, todas as ordens de produção são feitas pelo cliente e não se conservam inventários de produtos terminados. Num *Closed Shop*, todas as necessidades dos clientes são satisfeitas pelo inventário acumulado.

Fazendo um paralelo com a classificação fornecida por Krajewsky & Ritzman (2002), os três primeiros tipos de processos da sua lista são apropriados para um *Open Shop*, e os dois últimos para um *Closed Shop*.

Para um *Open Shop*, a programação da produção em sua forma mais simples é um problema de estabelecimento de seqüências, em que as ordens são seqüenciadas nos diferentes equipamentos. Já em um *Closed Shop*, a programação da produção não só contempla decisões a respeito de seqüências, também analisa os tamanhos dos lotes juntamente com políticas de reposição de inventários.

2.2. A Programação e o Seqüenciamento

De acordo com Morton & Pentico (1993), a programação tem lugar em uma ampla variedade de atividades econômicas. Esta programação envolve a realização de um certo número de ações, todas elas relacionadas com o uso de vários recursos por determinados períodos de tempo. Tais recursos são de fornecimento limitado. As diferentes ações a serem realizadas podem ser chamadas de “trabalhos”, “projetos”, ou “tarefas” e são compostas de partes elementares conhecidas como “atividades” ou “operações” e “retardos”. Para a realização de cada atividade se requer certas quantidades específicas de recursos, necessários para um particular período de tempo chamado “tempo de processamento”. Os recursos também estão constituídos por partes elementares chamadas “máquinas”, “células”, “transportes”, “retardos” etc.

Os problemas de programação são freqüentemente complicados por terem um grande número de restrições que relacionam atividades uma com as outras, recursos com atividades; e de igual modo relacionam recursos ou atividades que acontecem no ambiente externo ao sistema.

O seqüenciamento, de maneira geral, é aquela parte da programação da produção que se encarrega de estabelecer a ordem na qual os produtos vão circular pelas distintas estações de trabalho. Esta ordem deve ser tal que se minimizem os tempos ociosos das máquinas e se gerem os menores custos por preparação de máquinas e por manutenção de inventário.

Conway et al. (1967) argumentam que a dificuldade de estudar o seqüenciamento em aplicações reais se deve ao fato que as questões que o compõem não são completamente separáveis (o seqüenciamento interage e se confunde com outros tipos de decisões). Constantemente, a ordem de execução das tarefas terá alguma influência sobre o desempenho de tais atividades ou sobre o método de trabalho que será empregado. Portanto, o seqüenciamento está necessariamente envolvido com as decisões de “o que” vai ser feito e “como” isto será realizado. Em tais casos, a engenharia e o bom senso administrativo são requeridos para estabelecer o seqüenciamento adequado. Infelizmente, cada problema é único nas suas particulares e circunstâncias, e assim não existem muitas metodologias de interesse geral que possam ser estudadas fora do contexto.

Conseqüentemente, o estabelecimento de uma seqüência começa por extrair do contexto complexo um problema que ignore as possibilidades de mudança do entorno, e considere somente questões propriamente de seqüenciamento. Tal problema não é realista no sentido que não representa exatamente alguma situação individual real, mas fornece geralmente bons resultados. Os resultados obtidos do estudo deste modelo abstrato idealizado não representam uma solução para algum problema real de seqüenciamento; senão, eles representam informação que deveria ser disponível junto com um bom critério administrativo e com os dados referentes a outros aspectos do entorno do problema. O tomador de decisões deve ter idéia sobre as conseqüências que se gerariam ao empregar alguma alternativa de ordenamento, e acontecessem possíveis mudanças não tomadas em conta pelo modelo usado.

2.3.
A programação da produção numa indústria com processo em linha

A produção em linha é um processo caracterizado pela fabricação de produtos em altos volumes para estocar e em grande medida padronizados.

Krajewsky e Ritzman (2002) citam como exemplos as indústrias de automóveis, eletrodomésticos e brinquedos, assim como os restaurantes de comida rápida e lanchonetes (caso de serviços). Nesses exemplos existem fluxos em linha, com pequenos inventários entre as estações de trabalho. Cada estação realiza a mesma operação, com pouca variabilidade nos produtos ou serviços fornecidos. A diferença principal com respeito a um “processo contínuo” (referenciado na classificação) se encontra no fato que este vem a ser o extremo da produção de alto volume, muito padronizada e com fluxos de linha extremamente rígidos; por exemplo, os processos nas refinarias de petróleo, fábricas de produtos químicos, usinas geradoras de energia elétrica etc.

Outras características de um processo em linha são sua capacidade instalada bem definida, seu equipamento especializado e os baixos estoques intermediários. Uma falha em algum dos equipamentos pode parar a linha toda; assim também, um atraso no recebimento dos materiais e peças provocaria esta situação.

Graves (1981) manifesta que nas indústrias com processo em linha, o problema da programação da produção consiste em encontrar um programa que satisfaça os requerimentos de demanda com um mínimo custo total de produção. Tal programa deve especificar os tamanhos dos lotes e o número de vezes que se produzirá cada produto em um determinado espaço de tempo; e também as seqüências de produtos que devem ser seguidas nas diferentes linhas (se houver mais de uma). Os modelos mais amplamente estudados, que serão apresentados na presente seção, têm como características uma demanda e uma taxa de produção determinística e constante sobre um determinado período de tempo. Para este caso se calculam os lotes econômicos de produção, e em seguida se busca a melhor forma de organizá-los numa seqüência.

2.3.1. Lote Econômico de Produção

De acordo com Corbett (1997), o lote econômico é um dos assuntos mais discutidos na literatura técnica. O objetivo do assunto é encontrar um tamanho de lote que minimize os custos de produção.

De um lado, existem os custos de *setup*. Se um *setup* consta de várias horas de trabalho e depois só se produz uma peça, essa peça terá que carregar com todo o custo daquele *setup*. Então, para minimizar o custo por peça, deve-se tirar o máximo de peças numa única preparação de máquina; isto é, quer-se aumentar o tamanho do lote.

Mas de outro lado, quanto maior for o lote, mais tempo ele ficará dentro da empresa, o que quer dizer que a empresa terá mais custos de manter esse inventário.

Assim, o que a técnica do lote econômico de produção busca é encontrar o tamanho de lote que minimize o custo total por unidade, levando em conta que se quer diminuir tanto os custos de *setup* como os de manutenção de inventário.

A Figura 2.2 mostra duas curvas: a do custo de *setup* por unidade e a do custo de manutenção por unidade. Mostra-se também uma terceira curva, que é a curva do custo unitário total: a soma das duas outras curvas. O lote econômico se situa onde a curva do custo unitário total atinge o seu mínimo. Isso indica qual é o tamanho do lote que minimiza os custos totais.

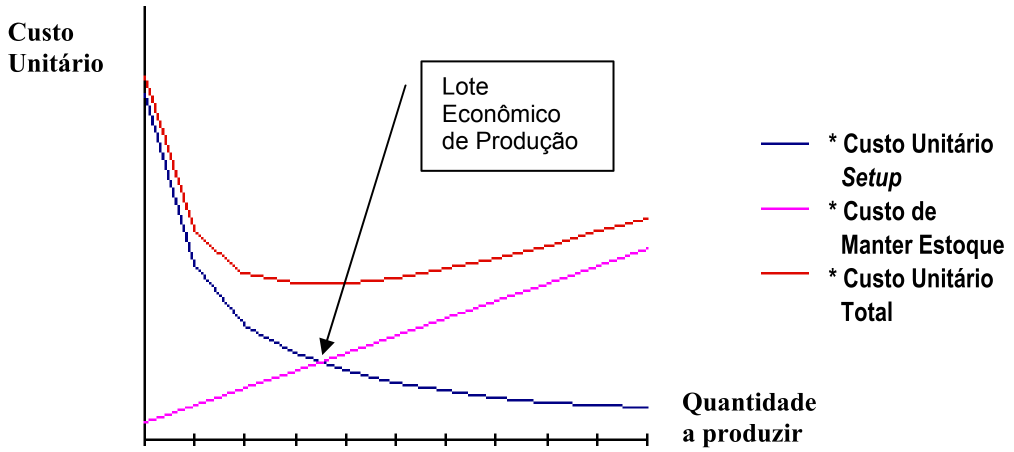

Figura 2.2 - Custos Unitários de *Setup* vs. Custos Unitários de Manter Estoque
FONTE: Adaptado de Corbett (1997)

Segundo Lustosa (2002), as variáveis envolvidas no problema são as seguintes:

p = taxa de produção (unidades produzidas / unidade de tempo)

r = taxa de consumo (unidades consumidas / unidade de tempo)

T_p = tempo de ciclo da produção (intervalo de tempo entre os inícios, ou fins, de duas produções consecutivas).

A = custo de *setup* por ciclo (custo de preparação da linha para começar a produção de um certo produto).

h = custo de manutenção de estoque por unidade de produto, por unidade de tempo.

O lote econômico de produção "q*" é achado através da seguinte fórmula:

$$q^* = \sqrt{\frac{2Ar}{h(1 - r/p)}}$$

Tal fórmula é obtida minimizando o custo relevante total:

CRT = Custo *Setup* + Custo Manutenção de Inventário

$$CRT(q) = (r/q)A + h.q(1 - r/p)/2$$

É importante explicitar que a "taxa de produção" deve provir da máquina que constitui o **gargalo** da linha de produção. Gargalo é aquela máquina ou estação de trabalho que tem a menor velocidade de processamento; pode ser identificado claramente por possuir o maior inventário de produtos em processo, e porque as estações que vêm logo depois desta ficam com uma maior porcentagem de tempo ocioso. Esta máquina (ou estação de trabalho) é quem realmente determina o ritmo de saída dos produtos, embora os outros elementos da linha possam ter uma maior capacidade de processamento.

2.3.2. O Problema da Programação dos Lotes Econômicos de Produção (ELSP)

O ELSP é um problema que vem sendo abordado pelos pesquisadores desde o ano de 1915 aproximadamente, e até o momento continua sendo motivo de inumeráveis estudos, todos eles procurando a solução ótima ou uma muito próxima dela. É importante mencionar que não é possível assegurar que a solução ótima vai ser sempre encontrada, isto pela alta complexidade do problema e suas distintas variantes (quanto mais produtos se programem maior é a complexidade).

Segundo Elmaghraby (1978), O "Problema do Lote Econômico de Produção" (ELSP) nasce da necessidade de acomodar padrões de produção cíclicos que são baseados no Lote Econômico de Produção, chamado também "Quantidade de Manufatura Econômica" (EMQ), que são calculados separadamente para cada item. Se for produzido um só produto, a linha estaria ocupada algum tempo e ficaria ociosa em outro. No entanto, quando dois ou mais itens competem pela atenção da linha de produção, o fenômeno de "interferência" acontecerá, cedo ou tarde; isto significa que a linha será requerida para produzir dois itens ao mesmo tempo, o que é fisicamente impossível. A questão então vem a ser: se for desejado manter os padrões de produção cíclicos para cada produto baseados no EMQ, como se deveria proceder para minimizar o custo da programação na linha?

Silver et al. (1998) definem o ELSP como o problema de encontrar um comprimento de ciclo, uma seqüência de produção, tempos de produção e tempos ociosos, de modo que a seqüência de produção possa ser completada no ciclo escolhido; o ciclo pode ser repetido ao longo do tempo, a demanda deve ser completamente satisfeita e os custos de *setup* e de estocagem devem ser minimizados. Como é percebido, este problema é claramente difícil de resolver. Dois fatores contribuem para esta dificuldade: 1) a necessidade de satisfazer a restrição da capacidade de produção, e 2) a necessidade de ter somente um produto na linha num determinado tempo (restrição conhecida como sincronização).

De acordo com Elmaghraby (1978), várias formulações para a resolução do problema de ELSP têm sido propostas. Tais abordagens podem ser divididas em duas principais categorias:

a) Formulações Analíticas: que permitem obter a "solução ótima" de uma versão restringida do problema original. Considerar todas as variáveis, na prática, implica em cálculos analíticos extremamente complexos.

b) Formulações Heurísticas: As quais permitem obter uma solução próxima da ótima para o problema. As heurísticas nascem da necessidade de fornecer uma solução que seja de rápido cálculo e exija menos esforços computacionais. A resolução por meio dos métodos analíticos muitas vezes demanda cálculos extremamente longos (tornando-os de difícil manipulação) para achar o ótimo, mas por meio das heurísticas os cálculos se facilitam e, na maioria dos casos, os resultados obtidos se aproximam bastante do ótimo.

Elmaghraby fez esta classificação no ano 1978, quando as pesquisas sobre este assunto ainda não estavam tão desenvolvidas como estão agora.

Uma recente classificação dos tipos de ELSP é fornecida por Silver et al. (1998), que categoriza os estudos feitos sobre este tema segundo o tipo de demanda. O comportamento que apresenta a demanda faz com que os métodos analíticos ou heurísticos de solução adotem características particulares. A classificação que se descreve nesta seção está baseada principalmente no trabalho de Silver et al. (1998), e está sintetizada na Figura 2.3.

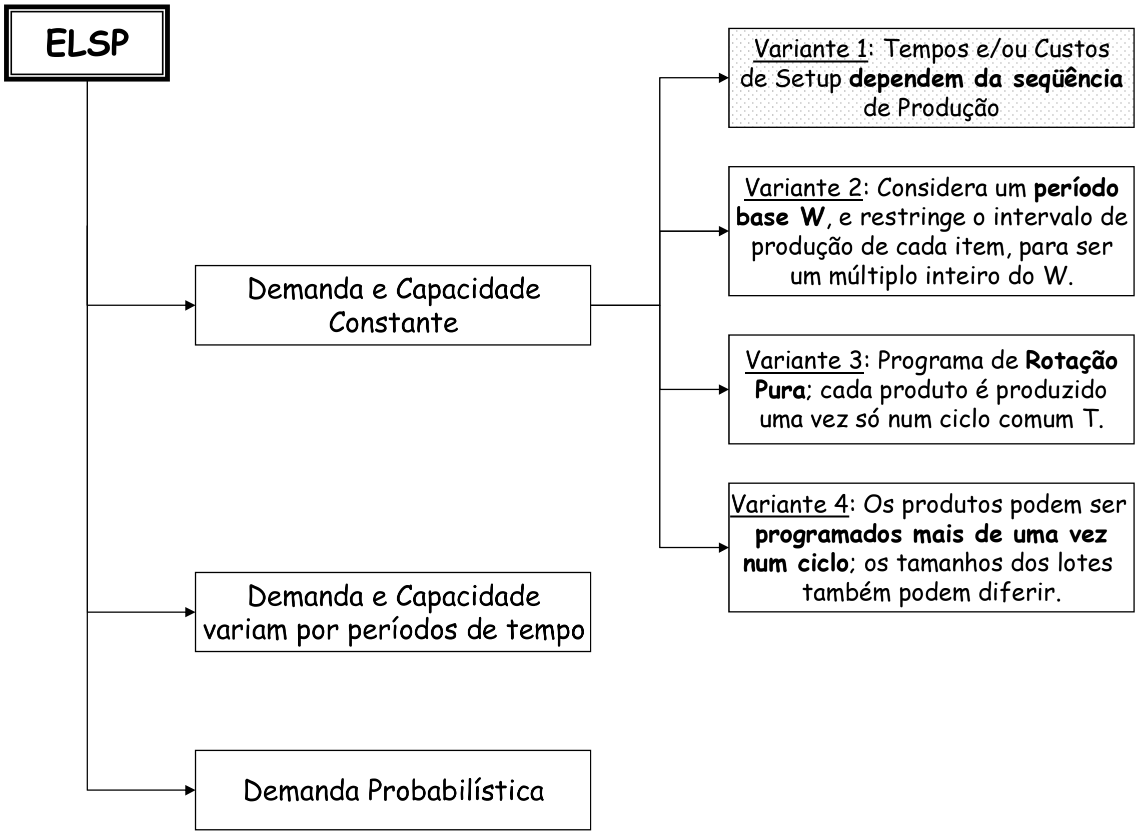

Figura 2.3 - Classificação dos tipos de ELSP
FONTE: Inspirada em Silver et al. (1998)

2.3.2.1. ELSP com Demanda e Capacidade Constante

Este problema em particular foi o mais abordado nas pesquisas iniciais sobre ELSP. Antes de começar analisar alguma das distintas variantes que este caso possui, primeiramente deve-se calcular o lote econômico de produção de cada produto individualmente. Caso seja viável a programação destes lotes sem que aconteçam interferências, ter-se-á a **solução ótima**. Elmaghraby (1978) fornece a seguinte notação:

Índice de produtos: i = 1,2,...N

r_i : Taxa de Demanda (unidades de produto. /unidade de tempo)

p_i : Taxa de Produção (unidades de produto /unidade de tempo)

s_i : Tempo de preparação de um lote (unidade de tempo) - Tempo *setup*

A_i : Custo de preparação de um lote ($) – Custo *setup*

h_i : Custo de manutenção de estoque ($/(unid. prod * unid. de tempo)

T_i : Tempo de ciclo de cada produto (unidade de tempo)

Com a notação feita, podem-se definir os seguintes parâmetros:

$\rho_i = (r_i/p_i)$ $(\rho = \sum \rho_i <=1)$	Fator de utilização; fração do tempo dedicado para produção (sem considerar *setups*)
$\tau_i = \rho_i \cdot T_i$	Tempo que demora produzir um lote (não considera o tempo de *setup*)
$\sigma_i = (s_i + \tau_i)$	Tempo de processamento total de um lote
$q_i = (r_i \cdot T_i)$ ou $(p_i \cdot \tau_i)$	Tamanho do lote
$\eta_i = (1 / T_i)$	Freqüência de produção

Aplicando os conceitos de Lote Econômico de Produção, o custo médio total (*setup* + manutenção de estoque) por unidade de tempo, para cada produto "i" produzido em tempos de ciclo T_i, é calculado por:

$$C_i = \frac{A_i}{T_i} + \frac{h_i r_i (1-\rho_i) T_i}{2}$$

Este custo é mínimo quando o Tempo de Ciclo (T_i) torna-se:

$$T_i{}^* = \sqrt{\frac{2A_i}{h_i r_i (1-\rho_i)}}$$

Este tempo ignora o tempo de *setup*, portanto pode-se dar o caso de não se conseguir ajustar neste tempo de ciclo a preparação de máquina junto com o tempo de *setup*. Então, calcula-se T_i^{MIN}:

$$T_i^{MIN} = \frac{s_i}{1-\rho_i}$$

Desse modo, o tempo de ciclo para cada produto é definido como:

$T_i^{IS} = \max \{T_i^* , T_i^{MIN} \}$

O "IS" significa ***"Independent Solution"***, ou Programação Independente como se denomina esse procedimento. É chamado assim porque propõe uma solução sem considerar a interferência de corridas que poderia acontecer quando se programam mais de um produto na linha.

Portanto, o custo total da programação IS é:

$$C^{IS} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{A_i}{T_i^{IS}} + \frac{h_i r_i (1-\rho_i) T_i^{IS}}{2}\right)$$

Algo importante a levar em conta é que C^{IS} é um **limite inferior** para o custo médio total mínimo de qualquer programação. O problema resulta que quanto maior a quantidade de produtos que se tem para programar, maior é a probabilidade de que esta se torne infactível.

A programação independente será factível se atender à seguinte condição necessária, mas não suficiente:

$$\sum_i \left(\frac{s_i}{T_i} + \rho_i\right) \leq 1$$

Verbalmente, é preciso que o tempo de produção disponível seja longo o suficiente para acomodar os tempos de preparação (s_i) de todos os produtos, além dos tempos de produção efetiva.

As variantes:

Quatro variantes do problema com demanda e capacidade constante são conceituadas a seguir:

* Variante 1: Tempos e/ou Custos de *Setup* dependem da seqüência de Produção.

Neste caso as expressões desenvolvidas acima não se aplicam pelo fato que elas demandam que os tempos e custos de *setup* sejam constantes. Em vista disto, pesquisadores têm procurado desenvolver heurísticas para dar a este problema uma boa solução. Entre os principais trabalhos podem-se considerar Maxwell (1964), Singh & Foster (1987), Dobson (1992) e McGee & Pike (1996). Este último analisa o caso de uma fábrica de zíperes, onde o tempo de *setup* para trocar de um tamanho para outro é maior que o tempo de *setup* entre zíperes de igual tamanho (mas com outras diferentes características).

* Variante 2: Consideração de um "Período Base".

De acordo com Elmaghraby (1978), esta variante considera o caso de admitir diferentes ciclos de produção para os diversos itens, mas cada T_i deverá ser um inteiro múltiplo de um "período base" W, o qual é suficientemente longo para poder acomodar a produção de um lote de cada um dos diferentes produtos. Por conseguinte, o lote econômico de produção não é mais considerado. A definição de "ciclo", nesta variante, vem a ser a soma de intervalos W nos quais os lotes dos produtos vão seguir uma determinada seqüência, que será repetida a cada inicio do ciclo (obviamente neste ciclo se pode produzir mais de uma vez algum produto). Bomberger (1966) foi um dos primeiros a introduzir este conceito, e desenvolve uma programação dinâmica para a solução do problema. Deve-se enfatizar que os tamanhos dos lotes produzidos para cada produto serão os mesmos ao longo do ciclo.

Portanto, os Tempos de Ciclo para cada produto têm a seguinte forma: $T_i = g_iW$, $g_i=\{0,1,2,3,...\}$. Haessler (1979), por sua parte, apresenta uma heurística que computa soluções fatíveis muito boas empregando intervalos entre períodos “g_i” provenientes do conjunto $g_i = \{1,2,4,8,\ldots\}$.

Uma programação que também considera tempos de ciclo discretos inclui “os multiplicadores potência-de-dois” (essas “potências” restringem os tempos de ciclo a serem inteiros e seguirem uma série geométrica), que ajuda em muito a eliminar a infactibilidade da programação “IS”. Maxwell & Sigh (1983) e Roundy (1989) fizeram estudos que demonstram os benefícios do uso dos multiplicadores potência-de-dois quando se considera um período base. Na seção 2.4.4, rever-se-á com maiores detalhes o conceito de Período Base.

* Variante 3: Consideração de uma “Rotação Pura”.

Um caso especial do enfoque do “período base” é a programação considerando uma “Rotação Pura”, na qual cada produto é produzido uma vez só em cada ciclo. Nesse caso, os tempos de ciclo para cada produto vão ser iguais, e conseqüentemente um “ciclo” vai ter essa duração. De fato, a Programação por Rotação Pura é totalmente factível, e é usada por Gallego (1990) para obter um **limite superior** para o custo de qualquer programação fatível.

Assim, seguindo o resumo sobre este método realizado por Mendonça (1996), tem-se:

$T_1 = T_2 = ... = T_N = T^{RC}$

Substituindo T^{RC} na equação de custo médio total, obtém-se:

$$C^{RC} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{A_i}{T^{RC}} + \frac{h_i r_i (1-\rho_i) T^{RC}}{2} \right)$$

Minimizando esse custo médio, obtém-se o ciclo comum de custo mínimo:

$$T^* = \sqrt{\frac{2\sum_{1}^{N} A_i}{\sum_{1}^{N} h_i r_i (1-\rho_i)}}$$

Este tempo equivale ao período de mínimo custo médio, mas se T* não é suficientemente longo para permitir incluir nele os tempos de preparação dos produtos, calcula-se T^{MIN}:

$$T^{MIN} = \frac{\sum_{i=1}^{N} s_i}{1 - \sum_{i=1}^{N} \rho_i}$$

Deste modo, o tempo de ciclo ótimo de cada produto numa programação de Rotação Pura (Ciclo Rotativo) é:

$T^{RC} = \max \{T^* , T^{MIN}\}$

Lembra-se que a Programação de “Rotação Pura”, junto com a “IS”, fornecem respectivamente limites superior e inferior, para o custo das diversas programações factíveis dos produtos em uma linha.

* Variante 4: Os tamanhos dos lotes e freqüências de produção podem diferir dentro de um ciclo.

Neste caso, é permitido que os itens sejam produzidos mais de uma vez num ciclo completo de produção e, também que, a cada vez que se produz um determinado produto o tamanho do lote pode variar. Maxwell (1964) e Delporte & Thomas (1977) foram os primeiros a pesquisar sobre este assunto, e criaram algumas heurísticas. Mais recentemente, Dobson (1987) e Zipkin (1991) desenvolveram uma solução heurística para este problema, obtendo-se programações factíveis, mas com um importante esforço computacional.

Como pode se observar, estas quatro variantes deixam de lado o conceito de lote econômico de produção. Os tamanhos dos lotes se ajustam às freqüências e já não existe mais um tempo de ciclo único para cada produto (com exceção do caso da Rotação Pura). Um “ciclo completo” vai abranger uma ordem de variadas seqüências de produtos, podendo os intervalos de produção, para um mesmo produto, serem distintos.

2.3.2.2. ELSP com Demanda e Capacidade que variam por períodos de tempo

Neste caso, as taxas de demanda e de produção vão continuar sendo constantes e conhecidas, mas por determinados períodos de tempo seus valores podem ser alterados. O objetivo é manter o custo total de *setup* e de manutenção de inventário tão baixo quanto possível, em todos os itens e nos diferentes períodos de tempo, sujeito às seguintes restrições: não são permitidos atrasos na demanda (ou perda de vendas) e não devem existir violações às restrições de capacidade de produção.

A solução para este problema (inclusive para o caso de um item só) é consideravelmente mais complexa quando se leva em consideração que as capacidades mudam por períodos de tempo. Portanto, não é surpreendente que uma solução matemática ótima fique de lado ao abordar um problema com vários itens e com estas características. Há procedimentos heurísticos que fornecem soluções satisfatórias. Podem-se citar os procedimentos heurísticos desenvolvidos por Dixon (1979), Dixon e Silver (1981), Van Wassenhove e De Bodt (1983), e Van Wassenhove e Vanderhenst (1983).

Variações para este problema são muitas. Eppen e Martin (1987), Pochet e Wolsey (1991) e Millan e Yang (1994) consideram, adicionalmente, a possibilidade de atraso na demanda. Um considerável número de autores analisaram o caso em que existe um custo de inicializar a linha de produção, e um custo de “reserva” que representa o custo de ter a maquina disponível, sem tomar em consideração o fato de estar produzindo ou não. Este custo de reserva poderia ser interpretado como o custo de oportunidade de dispor a linha ou máquina para um determinado produto, fazendo-a indisponível para os outros produtos. Desta maneira, o problema de um só item pode ser visto como um subproblema do caso mais realista de programação de multi-produtos. Podem-se consultar estes casos, Karmarkar e Schrage (1985), Karmarkar e Kekre (1987), Sandbothe (1991), Hindi (1995) e Coleman e MacKnew (1995).

2.3.2.3. ELSP com Demanda Probabilística: O Problema da Programação de Lotes Econômicos Estocásticos

Quando a demanda, tempos de *setup*, ou as taxas de produção não são determinísticas, a produção pode não seguir o plano desenvolvido pelas aproximações do ELSP. Se a variabilidade for alta, podem existir significativas alterações ao empregar os resultados de uma solução determinística, dado um entorno probabilístico. Assim, é necessário realizar ajustes. O "Problema da Programação de Lotes Econômicos Estocásticos (SELSP)" estuda o ELSP em paralelo com a complexidade adicional de demanda, taxas de produção ou tempos de *setup* probabilísticos (estocásticos).

Existem duas principais formas para tratar este problema. Uma é desenvolver um programa de ciclo regular usando a solução do problema determinístico, e em seguida desenvolver uma heurística que tente seguir este programa. A outra forma é desenvolver uma heurística que diretamente decida a seqüência dos produtos a produzir e suas quantidades.

Como exemplos para a primeira forma cita-se a Bourland e Yano (1994), que consideram o uso de estoque de segurança e tempos ociosos. Elas determinaram que, exceto quando os custos de *setup* são bastante altos em relação aos custos de manutenção de inventário, é melhor usar um estoque de segurança em lugar de incorporar tempo ocioso. Outro exemplo é fornecido por Gallego (1990), que desenvolve uma ferramenta de programação em tempo real em três passos. Primeiro, substitui as demandas probabilísticas por seus valores médios e computa um ciclo-objetivo ótimo ou quase ótimo. Depois, formula uma política de controle para recuperar o ciclo-objetivo associado a uma alteração dos níveis de inventários. Finalmente, encontra estoques de segurança que minimizam o custo médio de corridas de produção seguindo o ciclo-objetivo com a política de recuperação.

A segunda forma de lidar com o problema, permite dinamicamente decidir qual produto produzir a seguir o que geralmente gerará os mais baixos custos, mas poderia ser inconveniente em uma aplicação real porque demandaria alterações dos programas das outras etapas da produção. Leachman e Gascon (1988) desenvolveram uma metodologia baseada em programas de ciclo-objetivo que são atualizados dinamicamente, baseados nos tempos estimados de duração do inventário de vários produtos. Eles assumem revisões periódicas e tomam em consideração a solução do ELSP para a demanda não estacionária determinística para encontrar o próximo item a ser produzido e sua quantidade. A programação é modificada se um item se atrasa ou chega a escassear no inventário.

2.4.
O ELSP quando os tempos e custos de *setup* dependem da seqüência de produção escolhida

Nesta parte se ampliarão os conceitos fornecidos na Seção 2.3.2 a respeito ao ELSP com tempos e custos de *setup* dependentes da seqüência de produção.

Uma boa parte das empresas produtoras de bens físicos manufatura uma grande quantidade de produtos similares, e geralmente se dispõe de poucas linhas de produção. Assim, o objetivo é determinar o tamanho e o momento oportuno das corridas de produção que devem ser programadas, a fim de assegurar um abastecimento adequado de todos os produtos, com o menor custo total possível.

De acordo com Dobson (1992), em relação ao caso de *setups* dependentes da seqüência, existem exemplos na prática que freqüentemente podem ser vistos como subclasses de este tipo de problema. Pode-se dar o caso que os produtos a serem manufaturados se classifiquem em famílias, onde existem custos maiores para mudar de uma família para outra, e um custo menor para mudanças de produtos dentro da mesma família.

O problema específico, motivo deste estudo, considera a situação de uma única linha, onde a classificação por famílias não existe. O presente trabalho analisa o ELSP quando os *setups* variam em função da seqüência de programação (a já definida Variante 1). Da mesma forma, consideram-se taxas de demanda e de produção determinísticas e conhecidas.

2.4.1.
As primeiras tentativas de solução

Segundo a abordagem de Maxwell (1964), considere-se a matriz N x N com elementos S_{ij}, onde N representa a quantidade total de produtos, e S_{ij} é o tempo necessário de *setup* para mudar ao produto j se o produto i fosse produzido imediatamente antes. Dadas estas condições, pode-se formar um ciclo com os N produtos tomando os seus respectivos S_{ij} como comprimento de arcos. Agora, é evidente que o particular S_{ij} escolhido para um produto i vai depender da ordem na qual o mencionado produto aparece no ciclo e, em conseqüência, o somatório de todos os S_{ij} envolvidos dependerá também da ordem em que se encontram os produtos.

Com o fim de se obter o menor valor para o somatório dos S_{ij}, cai-se no bem conhecido problema do caixeiro viajante. Por outro lado não se deve esquecer uma outra variável: o custo de *setup* K_{ij} (custo de mudar ao produto j tendo produzido previamente i). É necessário observar se a seqüência que minimiza o custo total (empregando técnicas do caixeiro viajante) é a mesma que minimiza os tempos de *setup* S_{ij}. Não existe nenhuma razão justificável para supor que ambas as seqüências devam ser iguais. É dizer, nem sempre se encontram perfeitamente correlacionados os tempos e custos de *setup*.

Portanto, considerar um critério de rotação pura, como o que se descreveu, pode ser justificável só no caso em que se busca uma conveniente e fácil implementação. Mas, mesmo assim, considerar uma rotação pura, seja para minimizar custos ou tempos de *setup*, tem seus lados negativos. Para começar, pode não existir entre os produtos taxas equilibradas (similares) de demanda, de produção e de tempos de *setup*, o que impossibilita programar eficientemente as quantidades a produzir só em função da seqüência.

Dado que a maior parte da demanda provém de uma pequena proporção de produtos, uma maior freqüência de produção para estes resultaria num menor custo total de estocagem, a expensas de um incremento relativamente pequeno no custo total de mudanças. Argumentos similares poderiam ser desenvolvidos ao analisar o desequilíbrio existente entre as taxas de produção.

Com respeito aos tempos de *setup*, devido às variações que apresentam em função da seqüência de produção, eles podem afetar de maneira importante o tempo de duração de algum ciclo. Conseqüentemente, a produção de um produto por uma segunda vez incrementaria presumivelmente em uma certa quantidade o tempo total de *setup*, e ao mesmo tempo o custo total de inventário poderia se ver diminuído tendo em vista que se reduziu a quantidade em estoque, e o tempo de ciclo poderia ter crescido muito pouco de forma que, ao calcular o custo total por unidade de tempo, existiria a possibilidade de se obter um custo menor do que no caso do ciclo de rotação pura.

Eilon, *apud* Maxwell (1964), foi um dos primeiros autores que considerou um modelo sem se restringir à rotação pura. Ele propôs um método no qual em um conjunto seriam analisados os tamanhos de lotes sob o critério de ciclo de rotação pura e, em outro conjunto, seriam analisados os tamanhos de lotes através do método de Lote Econômico de Produção. Em função dos valores obtidos em cada conjunto se realizam alterações pertinentes de tal maneira que lotes como os menores custos sejam considerados. Os exemplos usados por Eilon, que tem como objetivo explicar a metodologia, lamentavelmente fornecem um valor de $\rho = \sum \rho_i > 1$ (soma dos fatores de utilização de cada produto maior do que 1), e assim a linha se veria impossibilitada de poder manufaturar os diferentes produtos dentro do ciclo de produção estabelecido. O fator de utilização é a fração de tempo (porcentagem do tempo total) que é disponível para a produção de um determinado item; se o somatório dos fatores de utilização de cada um dos produtos é maior do que a unidade, isso significa que se ultrapassou a disponibilidade de tempo; portanto, qualquer programação se torna infactível.

2.4.2. A Formulação Matemática do Problema

Esta formulação, fornecida por Maxwell (1964), é uma das que contemplam a maior quantidade de variáveis, sob o critério de que as taxas de demanda e de produção são constantes e não variam com o tempo.

Fornece-se a seguinte notação:

Índice de produtos: i = 1,2,...N

r_i : Taxa de Demanda (unidades de produto /unidade de tempo)

p_i : Taxa de Produção (unidades de produto /unidade de tempo)

S_{ij} : Tempo necessário de *setup* de mudar para o produto j se o produto i for produzido previamente. Não necessariamente $S_{ij} = S_{ji}$, pois os casos não simétricos acontecem normalmente.

K_{ij} : Custo de *setup* para mudar ao produto j se o produto i for produzido previamente.

h_i : Custo de manutenção de estoque ($/(unidades produzidas * unidade de tempo)).

$\rho_i = (r_i/p_i)$ ($\rho = \sum \rho_i <= 1$) Fator de utilização; fração do tempo disponível para produção (sem considerar *setups*).

Supõe-se que toda a demanda deve ser satisfeita sem demora; atrasos não são permitidos.

O Modelo de custos consiste de dois componentes:

- Custos de manutenção de inventário.
- Custos de mudança de um produto para outro (*setup*).

Cada produto tem um custo unitário de manutenção de inventário por unidade de tempo igual a h_i, e o K_{ij} (descrito acima) é igual a "$\beta.S_{ij}$", onde **β** é o custo de *setup* em que se incorre por cada unidade de tempo passada na mudança de um produto para outro (ou seja, os K_{ij}'s são proporcionais aos S_{ij}'s).

Portanto, dadas as taxas de demanda e de produção, as matrizes N x N de elementos S_{ij} e K_{ij}, e os custos unitários de manutenção de inventário, o problema pode ser definido como: "Qual é a seqüência de produção dos diferentes produtos, e qual é o tempo de produção de cada um deles, de modo a minimizar a soma dos custos de manutenção de inventário e os custos de *setup*?".

Uma maneira usual de descrever uma ordem ou seqüência é através da notação funcional i(k), que significa que o produto i é o $k^{ésimo}$ produto produzido. O subscrito j denota a $j^{ésima}$ vez que o produto i é produzido no ciclo. Para indicar esta propriedade a notação subscrita i,j será empregada para representar o $j^{ésimo}$ início de produção do produto i. Estas definições permitem descrever as seguintes variáveis:

$q_{i,j}$ = tamanho do lote do produto i quando é produzido pela $j^{ésima}$ vez no ciclo.

$t_{i,j}$ = o tempo de corrida de produção necessário para produzir $q_{i,j}$.

$f_{i,j}$ = o inventário ao iniciar cada corrida do produto i na $j^{ésima}$ vez no ciclo.

$y_{i,j}$ = tempo ocioso depois de cada produção.

Para um número finito de produtos estabelece-se por meio de uma regra a seqüência de produção que se repetirá ciclicamente sobre o tempo. Esta regra é a formulação matemática que nesta seção se descreve. Daqui em diante sempre se falará de uma seqüência de produção finita proveniente de uma seqüência infinita à qual denomina-se como "**ciclo" (ф)**, que irá-se reproduzir continuamente. O número de vezes que a produção de algum item é inicializada dentro do ciclo ou o número total de corridas de produção dos distintos produtos (o número de posições na infinita seqüência) será chamado de "**comprimento do ciclo" (M)**. O espaço de tempo necessário entre dois pontos idênticos em dois ciclos consecutivos iguais será chamado de "**tempo de ciclo" (T)**. O número de vezes que o produto i é produzido no ciclo, chamado como **freqüência**, terá o símbolo $\mathbf{n_i}$ (Obviamente $M = \sum_{i=1}^{N} n_i$).

2.4.2.1. Restrições

(a) Não Negatividade:

$f_{ij} \geq 0$

$y_{ij} \geq 0$

(b) Produção suficiente:

$$\sum_{j=1}^{n_i} t_{i,j} = \rho_i . T$$

O produto do fator de utilização $\rho_i = (r_i/p_i)$ por T determina o tempo de produção total para o produto i (somatório de todos os tempos de corrida do produto i) que satisfaz exatamente a demanda em todo o espaço de tempo T.

(c) Equação do tempo de ciclo:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i}(t_{i,j} + y_{i,j}) + \sum_{k=1}^{M} S_{i(k),i(k+1)} = T$$

O ciclo é formado pela soma dos tempos de corridas de produção, os tempos de *setup*, e os tempos ociosos.

O intervalo de tempo entre o fim de uma determinada produção do produto i e o início da sua próxima corrida de produção pode ser expresso mais concisamente através da seguinte notação:

$R_{i,j}$ = A soma dos tempos de *setup* S_{ij} entre a $j^{ésima}$ corrida de produção e a $(j+1)^{ésima}$ corrida de produção do produto i.

$X_{i,j}$ = A soma dos tempos de corridas de produção t_{ij} (dos outros produtos) entre a $j^{ésima}$ produção e a $(j+1)^{ésima}$ produção do produto i.

$I_{i,j}$ = A soma dos tempos ociosos $y_{i,j}$ entre a $j^{ésima}$ produção e a $(j+1)^{ésima}$ produção do produto i.

O intervalo em questão seria então:

$R_{i,j} + X_{i,j} + I_{i,j}$

(d) A relação entre sucessivos f's do mesmo produto é:

$f_{i,j+1} = f_{i,j} + (p_i - r_i)t_{i,j} - r_i(R_{i,j} + X_{i,j} + I_{i,j})$

Esta última equação aplica-se a todos os i's e para todos os seus respectivos j's (j = 1,2,...,n), e portanto gerará um conjunto de M equações lineares não homogêneas.

Resumindo: tem-se 4 tipos de restrições lineares (a,b,c,d), e 3*M variáveis: $f_{i,j}$, $t_{i,j}$, e , $y_{i,j}$ (3 variáveis para cada corrida k={1,...M}).

2.4.2.2. O Modelo de Custo Total

De acordo com Maxwell (1964), dado um ciclo:

$\Phi = [f_{i,1}\ ,\ t_{i,1}\ ,\ y_{i,1}]\ ,\ [f_{u,1}\ ,\ t_{u,1}\ ,\ y_{u,1}]\ ,\ \ldots\ ,\ [f_{V,nv}\ ,\ t_{v,nv}\ ,\ y_{v,nv}]$,

uma expressão para denotar o inventário médio para cada produto i (H_i), é:

$$H_i = \frac{1}{2r_i(1-\rho_i)T}\sum_{j=1}^{n_i}[(f_{i,j}+[p_i-r_i]t_{i,j})^2 - f_{i,j}{}^2]$$

Observa-se que o inventário médio é uma função quadrática com variáveis f's e t's, e é inversamente proporcional ao tempo de ciclo.

O custo total do modelo associado com uma seqüência de ciclos repetíveis Φ, é formado pela soma do custo das mudanças de produtos na linha, e do custo de manutenção de inventário. Cada um destes custos deve ser expresso nas mesmas unidades dimensionais. O custo que se vai definir como padrão é o custo por unidade de tempo. Dado que H_i é o inventário médio em unidades do produto i, e h_i é o custo de manutenção em $ por unidade deste produto e por unidade de tempo; o custo total de manutenção de inventário é igual a: $\Sigma h_i H_i$, expresso em $ por unidade de tempo.

Por outro lado, durante o ciclo Φ, $\Sigma S_{i(k),i(k+1)}$ unidades de tempo são investidas em *setup*, e que multiplicados por **β** (custo que se incorre por cada unidade de tempo na mudança de um produto para outro) fornecem o custo total por *setup* em $. Com a finalidade de colocar este custo na mesma unidade dimensional do custo de manutenção de inventário deve-se dividi-lo pelo tempo de ciclo "T".

Juntando ambos os custos, o custo total por unidade de tempo, simbolizado como TC, será:

$$TC = \frac{\beta}{T}\sum_{k=1}^{M} S_{i(k),i(k+1)} + \sum_{i=1}^{N} h_i H_i$$

2.4.2.3. Dificuldade de resolução

Através da formulação matemática elaborada, o problema poderia se reduzir a selecionar um ciclo Φ, tal que o **TC seja minimizado**. A magnitude desta tarefa é comentada a seguir:

• Para cada maneira em que se podem ordenar os produtos i(k) existe um número infinito de formas de especificar f's t's e y's, sujeitos às restrições (a), (b), (c) e (d). Se uma seqüência for dada, o problema de escolher os melhores valores para as variáveis é ainda uma tarefa bastante dura. Por exemplo, considerando-se o caso de uma seqüência específica e a não-existência de tempos ociosos, o problema é ainda uma minimização de uma função quadrática, sujeito a restrições lineares. Algumas pesquisas de matemática aplicada têm suposto que a Função Objetivo é convexa na região limitada pelas equações de restrições. Para o caso de uma seqüência com tempos ociosos iguais a zero pode ser demonstrado que TC, em geral, não é convexo dentro da região de soluções factíveis.

• Como um exemplo adicional para mostrar a complexidade de encontrar uma solução ótima, considere-se o caso em que o comprimento do ciclo (definido como a quantidade de corridas de produção no ciclo) é igual ao número de produtos (M=N) e supondo idealmente que as taxas de demanda sejam zero (r_i=0), os custos de manutenção de inventário sejam também zero, os custos de *setup* seriam os únicos de interesse. Dado que "β" é uma constante e "ρ" se tornou zero, o problema se simplificaria na minimização da soma dos tempos de *setup*, através da técnica do Caixeiro Viajante. Agora, se o comprimento do ciclo fosse maior do que o número de produtos (M>N) e as taxas de demanda continuassem sendo zero, são necessárias (e de fato inevitáveis) as formações de diferentes trajetórias para o Problema do Caixeiro Viajante, e encontrar aquela que ofereça o menor tempo de *setup*.

• Com respeito ao problema geral de otimização de uma função com variáveis quadráticas, sujeita às restrições lineares, ainda não tem sido encontrada uma solução que possa ser considerada como satisfatória, devido à não convexidade da função de custo total por unidade de tempo (TC)

2.4.3.
A utilização de Métodos Heurísticos

Segundo Michalewics & Fogel (2000), uma das razões pelas quais a solução de problemas numéricos é freqüentemente difícil é que muitas das vezes não se sabe por onde começar. A elaboração de um procedimento a seguir é um verdadeiro desafio. Alguns motivos que contribuem para tal dificuldade são:

• O número possível de soluções no espaço de busca é tão grande que se faz impossível uma busca exaustiva para encontrar a melhor solução.

• A resolução para o problema na sua totalidade, ao ser complicada demais, acaba não fornecendo nenhuma resposta satisfatória. Devem-se empregar então modelos simplificados para abordar o problema, de modo que resultados possam ser obtidos e sejam de utilidade.

• A “Função de Avaliação”, que descreve a qualidade de alguma solução proposta apresenta ruídos ou às vezes varia com o tempo; desse modo não é requerida só uma solução, senão uma série completa de boas soluções com características diversas.

• As possíveis soluções são tão arduamente restringidas, que mesmo elaborar uma resposta apenas factível é difícil. Até se poderia encontrar uma solução ótima mas que nem sempre é de aplicação factível.

Obviamente esta lista poderia ser estendida, mas o que foi descrito acima é suficiente para ter uma idéia da complexidade que a abordagem de um problema na sua totalidade gera.

Para aliviar estas barreiras, recorre-se a métodos capazes de gerar soluções boas, e práticos para aplicação, conhecidos como ‘Métodos Heurísticos’.

De acordo com Pearl (1984), heurísticas são critérios, métodos, ou princípios para decidir qual curso de ação tomar entre vários possíveis, augurando ser o mais efetivo para atingir alguma meta. É importante ressaltar que as heurísticas não necessariamente vão fornecer a solução ótima para o problema, senão que constituem formas práticas de fazer a abordagem, e os resultados obtidos com sua aplicação em muitos dos casos se aproximam do ótimo. Por conseguinte, as heurísticas representam o compromisso entre dois requisitos: (1) que tais critérios sejam simples, e, ao mesmo tempo (2) distinguir claramente entre as boas e más escolhas (para um determinado caso, entre diversas heurísticas, existe uma que funciona melhor).

É da natureza das boas heurísticas produzir uma maneira simples de indicar qual entre diversos possíveis caminhos a seguir vai ser o mais adequado para o problema. Estas não necessariamente garantem que o melhor caminho sempre seja identificado mas, na maioria das vezes, se obtêm bons resultados.

Os problemas mais complexos requerem a avaliação de um imenso número de possibilidades para determinar uma solução ótima. O tempo requerido para encontrar uma solução ótima para muitos problemas práticos pode tomar, freqüentemente, mais do que o tempo de vida do pesquisador. Então, as heurísticas desempenham um papel efetivo para simplificar a resolução de tais problemas, reduzindo assim o número de avaliações ou o tempo de cálculo e, com isso, podem obter-se soluções próximas ao ótimo dentro de um tempo também aceitável.

2.4.4. Conceitos desenvolvidos para a aplicação dos métodos heurísticos na solução do Problema

Para começar a modelar o problema objeto deste estudo (e que foi formulado matematicamente em uma primeira instância) empregando as técnicas heurísticas de solução, primeiramente vão ser definidos certos conceitos que serão de utilidade para isso:

- Período Base
- Multiplicadores Potência-de-Dois
- Regras implícitas para a determinação de variáveis

2.4.4.1. Período Base

Foi comentado que o Modelo de Rotação Pura supunha uma duração do ciclo suficientemente longa, de modo a acomodar a produção de cada item exatamente uma vez no ciclo. De acordo com Elmaghraby (1978), um procedimento diferente (e às vezes mais efetivo) de solução para o ELSP consiste em admitir diferentes tempos de ciclo para os diferentes itens, mas tomando em consideração que cada T_i deve ser um múltiplo inteiro de um "período base" (BP) o qual deve ser longo o suficiente para acomodar a produção de todos os produtos.

Bomberger (1966) explica essa abordagem, e simboliza os tempos de ciclo como $T_i = g_iW$, onde g_i pertence ao conjunto de inteiros {1,2,3,4...}, e **W** representa a duração do período base. Este período base deve satisfazer à seguinte restrição de factibilidade:

$$\sum_{i=1}^{N}\sigma_i = \sum_{i=1}^{N}(s_i + \rho_i g_i W) \leq W \qquad (\theta)$$

Índice de produtos: i = 1,2,...N

W : Período Base

s_i : Tempo de preparação de um lote

ρ_i : Fator de utilização

σ_i = $(s_i + \rho_i \, . \, T_i)$ Tempo de processamento total de um lote

g_i = Número de períodos base entre corridas de produção do produto i.

Esta restrição indica que a soma dos tempos de processamento totais (tempos de *setup* mais tempos de corridas de produção) de todos os produtos não deve ultrapassar o valor do Período Base. Uma formulação através da programação dinâmica, seria da seguinte maneira:

Suponha-se que para os itens 1,2,...p-1 foram determinados os multiplicadores $g_1,g_2,...,g_{p-1}$ os quais consomem “w” unidades de tempo tanto para os *setups* como para as corridas de produção. Seja $F_p(\omega)$ o custo mínimo de produzir os remanescentes N-p itens na capacidade residual ω = W-w unidades de tempo. Dado que o item p é produzido com tempo de ciclo T_p = g_pW, representa-se o custo médio anual como $C_p(g_p,W)$. Como foi visto na seção 2.3.2.1, este custo é da forma:

$$\frac{A_p}{T_p}+\frac{h_p r_p(1-\rho_p)T_p}{2}$$

Para os remanescentes N-p produtos a restrição (θ) ficaria:

$$\sum_{j=N-p}^{N}(s_j/W+g_j\rho_j)\leq\omega/W$$

O desconhecido multiplicador g_p é determinado por meio da seguinte equação funcional:

$$F_p(\omega)=\min_{g_p}\{C_p(g_p,W)+F_{p+1}(\omega-s_p-g_p\rho_pW)\}$$

onde $1\leq g_p\leq(\omega-s_p)/(\rho_pW)$; g_p é inteiro e $F_{N+1}(\omega)\cong 0$.

Para um dado valor de W, o procedimento fornece um conjunto de multiplicadores $\{g_i\}$. O valor ótimo de W se obtém por meio de uma busca sensata (através de interpolação ou extrapolação) sobre valores experimentais selecionados de W.

Cabe mencionar que a maioria das heurísticas emprega o conceito de período base nos seus modelos. São poucos os pesquisadores que propõem tamanhos de ciclos que mudem com o tempo. Dobson (1987) desenvolve uma formulação matemática (similar à de Maxwell (1964)) cujas heurísticas de solução permitem que os tamanhos dos lotes e conseqüentemente os tamanhos dos tempos de ciclo para cada produto possam variar ao longo do tempo. Ele explica que, com isso, ele consegue dois importantes benefícios. Primeiro, que a programação desenvolvida seja totalmente factível (não existe interferência de corridas), considerando inclusive a possibilidade de ter tempos ociosos entre corridas. O segundo benefício consiste em permitir à linha de produção ter uma utilização mais uniforme em comparação com as soluções das heurísticas que consideram um período base. Esta afirmação baseia-se no fato de que, na realidade, a demanda vê-se alterada por curtos períodos de tempo, de modo que é mais importante fornecer uma solução que seja sensível em um curto prazo do que se preocupar em buscar um resultado matematicamente ótimo para um horizonte de tempo infinito.

Estas considerações fornecidas por Dobson (1987) são bem proximas da realidade, e a heurística que vai se empregar neste trabalho toma em conta algumas delas.

2.4.4.2.
Os Multiplicadores Potência-de-Dois

De acordo com Haessler (1979), o período base definido por Bomberger (1966) deve ser suficientemente longo para acomodar a produção de todos os produtos. Tinha-se visto que $\sum_{i=1}^{N}\sigma_i = \sum_{i=1}^{N}(s_i + \rho_i g_i W) \le W$. Os g_i's podem tomar valores pares ou impares. Para se obter a factibilidade satisfazendo esta última expressão será necessário estender o período base e incrementar as freqüências das corridas de produção (isto é: adotar g_i's menores). Mas agir assim poderia conduzir a uma solução muito mais custosa do que empregando algum raciocínio simples para uma boa programação. Em vista disto, Haessler (1979) formula três restrições para assegurar a factibilidade, conforme se descrevem a seguir:

Seja K o menor inteiro positivo tal que $n_i = K / g_i$ é também inteiro para todos os i's. K é portanto o número total de período básicos antes que a programação novamente se repita. O $\mathbf{n_i}$ seria, portanto, o **número de vezes que o produto i é produzido num ciclo completo**. Uma solução factível existe se houver valores de Z_{ik} (Z_{ik} é 1 se o produto i vai ser produzido durante o $k_{ésimo}$ período básico e 0 se não for assim), que satisfaçam às seguintes condições:

$\sum_k Z_{ik} = n_i$	para todos os i's.	(a)
$Z_{ik} = Z_{ik+g_i}$	para todos os i's, tais que $g_i \neq K$ para k= 1...K-g_i	(b)
$\sum_i Z_{ik}\sigma_i \le W$	para todos os k's	(c)

Estas condições são necessárias para encontrar uma solução factível se g_i é igual a 1, para ao menos um produto.

Restringindo os valores de g_i ao conjunto {1,2,4,8,...} reduze-se enormemente o conjunto de soluções para as restrições (a) (b) e (c), já que K = max{g_i}. Fazendo uma generalização deste conceito, pode-se dizer que os tempos de ciclo dos produtos i provêm do conjunto k^0W, k^1W, k^2W, ...,k^nW. Têm-se então os multiplicadores {k^0, k^1, k^2, ...,k^n} e que Haessler (1979) designa ao k o valor de 2. Isto vem a ser conhecido como a regra de restringir os tempos de ciclo a “multiplicadores potência-de-dois”.

Maxwell & Singh (1983) mostram que ajustar os tempos de ciclo desta maneira traz resultados muito próximos do ótimo. Eles manifestam que com isto a capacidade de programar os produtos e os recursos pode ser melhorada.

2.4.4.3.
Definição de regras implícitas

Os parágrafos a seguir detalham algumas regras simplificadoras implícitas em vários modelos existentes na literatura e que facilitam a determinação das variáveis $t_{i,j}$ e $y_{i,j}$ quando o tempo de ciclo “T” é conhecido. Isto fornecerá bases intuitivas para o desenvolvimento de procedimentos algorítmicos nas heurísticas de solução. Com exceção da primeira regra, os tempos ociosos ($y_{i,j}$) não são tomados em consideração.

2.4.4.3.1.
A Regra de “Iniciar em Zero”

A regra de “Iniciar em Zero” obriga que a produção de um item só possa ocorrer no momento exato quando seu inventário atinja o valor zero. Isto significa que sempre $f_{i\ j}$ = 0. Junto com isto, as decisões sobre a produção prévia do produto i e as pertinentes à satisfação oportuna da demanda devem ser conjuntamente envolvidas. Em outras palavras, a seqüência deve ser previamente estabelecida.

Esta regra pode parecer atraente, no sentido de que inventário adicional não tem que ser estocado apesar de ser possível que soluções ótimas não sigam tal regra. Na literatura há indicações de que é difícil construir exemplos sensatos onde a regra de “iniciar em zero” não forneça uma solução bem próxima da ótima.

Seguindo o modelo desenvolvido por Delporte & Thomas (1977) para ajustar os tempos de corridas de produção, de tal maneira que se cumpra com a regra de “iniciar em zero”, considerem-se as seguintes variáveis:

- Sendo conhecidos o Tempo de Ciclo “T” e a Seqüência de Produção, definem-se:

δ_{im} = 1 ; se o item “i” é produzido no período “m” (m= 1,...,M).

δ_{im} = 0 ; se não for o caso

m”(m) = o próximo período depois do período m, no qual o item i produzido em m é produzido novamente.

t_m = a duração da corrida de produção no período m. Os tempos de duração dos distintos períodos não precisam ser iguais.

s_m = O tempo de *setup* entre os períodos m e m+1.

y_m = O tempo ocioso entre os períodos de produção m e m+1.

h_i, r_i, p_i e T têm as mesmas definições apresentadas na seção 2.4.2.

A formulação é como segue:

(1) $$\min \quad \frac{1}{T}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{h_i}{2}(p_i - r_i)(\frac{p_i}{r_i})\sum_{m=1}^{M} t_m^2 \delta_{im}\right]$$

Sujeito a:

(2) $$\delta_{im}\left[p_i t_m - r_i \sum_{m'=m}^{m''(m)-1}(t_{m'} + y_{m'} + s_{m'})\right] = 0; \quad m = 1,\ldots,M \text{ e } i = 1,\ldots,N$$

(3) $$\sum_{m=1}^{M} y_m = T(1 - \sum_{i=1}^{N}\frac{r_i}{p_i}) - \sum_{m=1}^{M} s_m$$

(4) $t_m \geq 0$; $y_m \geq 0$; m = 1,...,M

Observa-se que a formulação se expressa por meio de um modelo de otimização. A função objetivo (1) provem da função objetivo do modelo matemático do problema global apresentado na seção 2.4.2.2., só que esta função objetivo (1), não considera a existência de inventários finais nem inicias (a diferencia da função objetivo do Modelo de Custo Total), o que da origem a uma função convexa, quadrática e separável para um determinado valor de “T”. Além disso, todas as restrições que se formulam são lineares.

As restrições (2) forçam a m^{ésima} corrida de produção a ter um tempo de duração igual a t_m, tal que com isto se obrigue contar com um inventário igual a zero no momento do início da próxima corrida de produção para aquele item. As restrições (3) forçam que a soma dos tempos ociosos, tempos de *setup*, e tempos de corridas de produção, sejam iguais ao tempo de ciclo “T”.

Dado que o tempo “T” é conhecido, as equações de (1) a (4) constituem um problema de otimização com variáveis não inteiras e M+1 restrições. Esta modelagem permite calcular tamanhos de lotes sujeitos à condição de começar uma nova corrida de produção quando o inventário do produto igualar zero.

Neste modelo os tempos de *setup* e os custos dependem somente do item produzido e não do seu predecessor. Portanto, para que a regra seja de utilidade no caso de seqüência dependente, deve-se primeiro definir a seqüência que os produtos irão formar no ciclo. Garante-se assim, uma solução exata dos valores dos tempos de corridas de produção.

Para exemplificar, na Figura 2.4 mostram-se como estes tempos se encontram distribuídos numa seqüência de três produtos, onde os produtos i = 2 e i = 1 se produzem duas vezes, e o produto i = 3 se produz só uma vez durante um ciclo com duração T. Na seqüência exemplificada, em primeiro lugar se produz o produto 2, em seguida o produto 1, depois novamente o produto 2, em seguida o produto 3 e finalmente de novo o produto 1. A notação para este ciclo seria: 2 – 1 – 2 – 3 – 1. Na figura 2.4 observa-se que em cada Período “m” se tem três distintos tipos de tempos: t_m, s_m e y_m.

Período m = 1, produz i=2			Período m = 2, produz i=1			Período m = 3, produz i=2			Período m = 4, produz i=3			Período m = 5, produz i=1		
t_1	y_1	s_1	t_2	y_2	s_2	t_3	y_3	s_3	t_4	y_4	s_4	t_5	y_5	s_5
T														

Figura 2.4 - Tempos existentes em cada Período “m” no ciclo 2 – 1 – 2 – 3 – 1.
FONTE: Elaboração Própria

2.4.4.3.2.
A Regra de “Igual Tamanho de Lote”

Esta regra estabelece que durante cada corrida de produção em que o produto i é elaborado, deve-se fazer a mesma quantidade de unidades do produto i.

Para cada produto esta regra adiciona n_i-1 equações, $t_{ij} = \rho_i.T/n_i$. Existem somente n_i-1 equações, porque a soma dos t's para um particular produto é restringida pela equação de Produção Suficiente (definida quando se fez a formulação matemática).

2.4.4.3.3.
A Regra de "Igual Intervalo de Não-Produção"

Esta regra estabelece que se devem ajustar os valores do inventário inicial e dos tamanhos de lote, de tal maneira que para um determinado produto os intervalos de tempo durante o qual o produto não é produzido devem ser de igual duração.

A soma de intervalos de não-produção para um produto seria $(1-\rho_i)T$. O intervalo de não-produção para um produto particular na vez j é $R_{ij} + X_{ij}$. Portanto, geram-se M equações da forma:

$$(1-\rho_i)T / n_i = R_{ij} + X_{ij}$$

Estas equações são suficientes para determinar a duração das corridas de produção.

2.4.4.3.4.
A Regra de "Máximo Inventário"

Esta regra estabelece que se deve passar da produção de um produto i ao produto seguinte na ordem do ciclo sempre que o inventário do produto i atinja um valor máximo de inventário Y_i.

Isto se pode traduzir nas seguintes M equações:

$$t_{i,j+1} = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}(R_{ij} + X_{ij})$$

Os t's são calculados através desse conjunto de equações.

2.4.4.3.5.
A Regra de "Igual Intervalo de Produção"

Esta regra estabelece que se deve começar a produção de um produto "i" cada T_i unidades de tempo.

Dado que o tempo compreendido entre a $j^{ésima}$ produção e a $(j+1)^{ésima}$ produção de um produto i é $t_{ij} + R_{ij} + X_{ij}$, esta regra pode-se expressar através das seguintes equações:

$T_i = t_{ij} + R_{ij} + X_{ij} = T/n_i$

Estas equações são suficientes para determinar os valores dos t's.

A respeito destas 5 regras implícitas, de acordo com Maxwell (1964), comprova-se que, se para um particular produto i as condições de quaisquer duas destas regras são satisfeitas, conseqüentemente as condições de todas as regras serão satisfeitas também para este produto. A satisfação de duas condições implicaria ter para cada produto zero de inventário inicial, iguais tamanhos de lote, iguais intervalos de tempo de não-produção, o mesmo máximo inventário, e iguais intervalos de produção.

2.4.5.
O Problema do Caixeiro Viajante

Tendo em vista que dentro do problema de seqüenciamento com *setups* dependentes procura-se escolher a seqüência de produção de modo a minimizar o tempo ou o custo total de *setup*, muitas das heurísticas de solução propostas para o problema em estudo integram algoritmos de caixeiro viajante. Portanto, vai-se fazer uma abordagem geral sobre este assunto conhecendo as características que envolvem este problema.

2.4.5.1.
Introdução

De acordo com Mathur & Solow (1993), muitas das aplicações que podem ser modeladas através de redes tratam da necessidade de escolher uma seqüência de nós por visitar com algum objetivo específico. O Problema do Caixeiro Viajante (TSP) é um simples e engenhoso problema de combinatória. É um tipo de problema onde são conhecidos os custos de passar de um nó qualquer para outro, e o percurso se inicia em um nó específico chamado de origem. O objetivo é visitar todos os outros nós exatamente uma vez, e voltar ao nó de início com o mínimo custo possível. Por exemplo, um ônibus que sai de uma escola deve deter-se em vários lugares para recolher estudantes e finalmente regressar à escola fazendo o menor tempo que puder.

Muitos TSP's são simétricos; ou seja, para quaisquer duas cidades A e B, o custo de A para B é o mesmo que de B para A. Neste caso, obter-se-á exatamente o mesmo custo total de percurso se for invertida a ordem em que o caixeiro faz suas visitas. Assim, não há nenhuma necessidade de distinguir entre um percurso e sua marcha reversa.

Segundo Larson & Odoni (1981), é de muito interesse estudar o TSP no contexto descrito a seguir em três partes:

• Devem ser visitados n-1 pontos (com as características descritas acima), dentro de uma rede de transporte que interconecta os n pontos de maneira completa. Isto significa que é possível ir diretamente de qualquer ponto da rede para outro qualquer ponto sem necessidade de passar por algum ponto intermediário.

• As mais curtas distâncias entre todos os pares de pontos são iguais aos comprimentos das ligações diretas entre os dois pontos. Isso implica que a rede satisfaz a "desigualdade triangular" : $l(i,j) \leq l(i,k) + l(k,j)$ para qualquer três pontos i,j e k (A notação $l(x,y)$ representa a distância entre os pontos x e y)

• Finalmente a matriz de distâncias (ou custos) é suposta simétrica, o que significa que a distância de i para j é igual à distância de j para i.

Dadas estas características que deve cumprir um TSP (simétrico) pode-se intuir a grande dificuldade de solução para o problema apresentado. Se existem "n" cidades por percorrer, portanto existem (n-1)! diferentes maneiras de ordenar os ciclos de visitas, o que representa (n-1)!/2 soluções distintas para o TSP (devido ao fato que cada ciclo pode ser percorrido em duas direções inversas fazendo a mesma distância).

De acordo com Lawler et al.(1987), existem evidências suficientes para conjeturar que problemas como o TSP são de inerente complexidade, e que o esforço computacional demandado por algum método de solução crescerá super–polinomialmente com o tamanho do problema.

No caso mais geral de TSP a matriz de distâncias entre todos os pontos da rede não é simétrica; isso significa que ao ir de um nó para outro, o caminho de volta não vai ter o mesmo comprimento. Uma grande quantidade de aplicações reais segue este modelo, por exemplo, ao planejar o ciclo de visitas numa localidade onde algumas ruas (ou todas) são de mão única.

2.4.5.2.
A Formulação Matemática

Winston (1994) apresenta a formulação matemática do TSP simétrico através da Programação Inteira, que permite encontrar uma solução exata e ótima. No entanto, esta formulação se torna de difícil manipulação e ineficiente quando os problemas são grandes.

Suponha-se que o TSP conste das cidades 1,2,3,...,N. Para i≠j faz-se c_{ij} = distância da cidade i à cidade j, c_{ii} = M onde M é um valor bastante grande (em relação às distâncias do problema). Coloca-se c_{ii} = M para assegurar que o caixeiro não vai à cidade i imediatamente depois de ter deixado a cidade i. Também se define x_{ij} = 1 se a solução do TSP considera ir da cidade i à cidade j, e x_{ij} = 0 se não for assim.

Logo, a solução para o TSP pode ser encontrada solucionando:

(a) $$\min z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

s.a.

(b) $$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1 \quad (\text{para } j = 1,2,\ldots,N)$$

(c) $$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1 \quad (\text{para } i = 1,2,\ldots,N)$$

(d) $$u_i - u_j + N x_{ij} \leq N - 1 \quad (\text{para } i \neq j; i = 2,3,\ldots,N \;;\; j = 2,3,\ldots,N)$$

(e) $$\textit{Todos} \text{ os } x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \;,\; \text{Todos os } u_i, u_j \geq 0$$

A função objetivo (a) permite obter o comprimento total de todos os arcos incluídos no percurso. As restrições (b) asseguram que se passe uma vez só por cada cidade. As restrições (c) obrigam que se deixe cada cidade uma vez só. As restrições (d) são muito mais complexas e impedem à solução ótima admitir sub-percursos não conectados. Por exemplo, a solução ótima para uma rede com N=5 poderia ser o percurso 1-2-3-4-5-1, e não uma solução que admitira dois (ou mais) sub-percursos separados tais como 1-2-1 e 3-4-5-3, já que estaria violando a lógica do problema do caixeiro viajante, mesmo que se satisfaça as restrições (b) e (c); por isso a importância da restrição (d) que faz com que soluções com sub-percursos não conectados sejam deixadas de lado. Finalmente, as restrições (e) definem a natureza das variáveis.

2.4.5.3.
Heurísticas para o TSP Assimétrico

Nos capítulos 3 e 4 da presente dissertação, lida-se em parte com a necessidade de solucionar o problema do caixeiro viajante na forma assimétrica. Isto porque ao considerar os custos de *setup* dependentes da seqüência como se fossem as distâncias, nada garante que a colocação do produto i antes do j vá resultar em um custo de *setup* igual que se a colocação houvesse sido de maneira inversa: j antes do i. Na maioria dos casos estes custos são diferentes.

A seguir vai se descrever duas heurísticas de solução para o TSP assimétrico que fornecem bons resultados, mas é preciso deixar claro que a quantidade de metodologias de solução desenvolvidas para aperfeiçoar os resultados do TSP são inúmeras. Na atualidade, o melhoramento constante dos recursos computacionais veio se constituir em uma ferramenta poderosíssima de ajuda nos cálculos.

2.4.5.3.1.
Metodologia heurística do vizinho mais próximo

De acordo com Mathur & Solow (1993), é possível obter a solução ótima (matematicamente) para o problema do caixeiro viajante, mas para o tratamento de grandes problemas (mais do que 20 nós), pode não ser computacionalmente prático, devido à quantidade de tempo requerido. Para superar este obstáculo, os pesquisadores têm desenvolvido numerosas heurísticas para obter uma "boa" solução relativamente rápida. Estas heurísticas se dividem em duas categorias básicas:

1. Heurísticas para a construção de uma viagem, que constroem um ciclo passando seqüencialmente por todos os nós da rede.
2. Heurísticas de melhora da viagem, que começam com um ciclo inicial, e tentam construir novos ciclos com um custo total menor.

A seguir se descreve a caracterização destes dois tipos de heurísticas, que a metodologia do "vizinho mais próximo" utiliza, uma seguida da outra.

<u>Uma Heurística de Construção de uma Viagem</u>

Usando a metodologia do "vizinho mais próximo" faz-se primeiramente a construção de uma viagem inicial. A idéia básica é começar com um ciclo de dois nós e logo gerar ciclos seqüencialmente maiores.

Passo 0, Inicialização: forme o ciclo inicial com dois nós cujo custo total seja o menor possível.

Passo 1, Avaliação: se todos os nós se incluem no ciclo atual, pare. Caso contrário, para cada nó que não esteja no ciclo atual, determine o melhor lugar no ciclo atual para inseri-lo e calcule o custo total do ciclo resultante.

Passo 2, Seleção e Inserção: entre todos os nós avaliados no passo 1, escolha um que produza um novo ciclo com o mínimo custo total quando é inserido numa determinada posição. Insira esse nó naquela melhor posição e estabeleça um novo ciclo. Volte para o passo 1.

Para ilustrar o uso de esta heurística considere-se as distâncias entre 4 lojas (A, B, C e D) de uma cidade X, representadas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 - Distâncias para o percurso entre quatro lojas em uma cidade

DE \ PARA	A	B	C	D
A	M	14	10	5
B	4	M	9	20
C	7	6	M	7
D	11	14	3	M

FONTE: Elaboração própria

ITERAÇÃO 1:

Passo 0, Inicialização: o ciclo D – C – D, de dois nós fornece a mínima distância possível em relação ao outro par de nós. Distância = 10

Passo 1, Avaliação:

Efeito de inserir um novo nó no ciclo D – C – D

Nó	Inserido Entre	Novo Ciclo	Tempo
A	D e C	D→A→C→D	28
	C e D	D→C→A→D	15
B	D e C	D→B→C→D	30
	C e D	D→C→B→D	29

Passo 2, Seleção e Inserção: O ciclo D – C – A – D = 15, fornece a menor distância. Portanto volta-se ao Passo 1 com esse ciclo.

ITERAÇÃO 2:

Passo 1, Avaliação:

Efeito de inserir um novo nó no ciclo D – C – A – D

Nó	Inserido Entre	Novo Ciclo	Tempo
B	D e C	D→B→C→A→D	35
	C e A	D→C→B →A →D	18
	A e D	D→C→A→B→D	44

Passo 2, Seleção e Inserção: O ciclo D→ C→ B → A → D = 18, fornece a menor distância. Como todos os nós estão incluídos, o ciclo aqui encontrado viria ser a viagem inicial do caixeiro viajante.

Uma Heurística de Melhora da Viagem do Caixeiro Viajante

A Heurística de Melhora da Viagem é aquela que começa com um ciclo completo inicial (como o achado pela heurística de construção da viagem) e tenta encontrar novos ciclos completos cujo custo total seja progressivamente menor. As diversas heurísticas dessa classe diferem na maneira específica em que encontram os novos ciclos completos.

O "Método de Intercâmbio de dois Arcos" é uma heurística de melhora da viagem inicial. A idéia básica é eliminar dois arcos do ciclo atual e substituí-los por dois novos arcos para criar um novo ciclo. Para ilustrar, considere-se como ciclo inicial o obtido na solução com uma distância total de 18. Agora se vão eliminar dois arcos quaisquer não adjacentes, como os arcos que vão de C à B e de A à D. Fazer isto dá uma ruptura do ciclo em duas peças, I e II, como se mostra na Figura 2.5(a).

Pode-se construir um novo ciclo completo da seguinte forma:

1. Inverta a direção de todos os arcos da parte I; depois acrescente dois arcos apropriados para reconectar as duas partes em um ciclo.

2. Inverta a direção de todos os arcos do sector B; depois acrescente dois arcos apropriados para reconectar as duas partes em um ciclo.

Por exemplo, a inversão dos arcos da parte I na Figura 2.5(a) produz um arco que vai do nó C ao nó D, como se mostra na Figura 2.5(b). Analisando a figura, se descobrirá que a única forma de conectar as duas partes da Figura 2.5(b) para formar um ciclo completo é acrescentar os arcos que vão do nó D ao nó B e do nó A ao nó C, como mostram os arcos de linha ponteada da Figura

2.5(b). Como facilmente pode-se calcular, a distância do ciclo resultante dá um valor de 35.

De maneira similar, a inversão dos arcos da parte II da Figura 2.5(a) produz um arco que vai do nó A ao nó B, como se mostra na Figura 2.5(c). A única forma de conectar as duas partes da Figura 2.5(c) para formar um ciclo completo é acrescentar os arcos que vão do nó B ao nó D e do nó C ao nó A, como mostram os arcos da linha ponteada. A distância do ciclo resultante é 44.

Como as distâncias calculadas foram superiores à achada na heurística de construção da viagem inicial, esta por enquanto ainda se mantém como a melhor resposta. Este processo de eliminar e acrescentar dois arcos pode fazer-se para todas as combinações possíveis de dois arcos não adjacentes, para encontrar o "melhor" ciclo melhorado, se existir algum. Se não se pode encontrar tal ciclo melhorado, o procedimento se detém com o ciclo atual. De outra maneira, o procedimento se repete fazendo do ciclo melhorado o ciclo atual. O ciclo D-C-B-A-D = 18 é o melhor que pode se encontrar mediante este procedimento de intercâmbio de dois arcos.

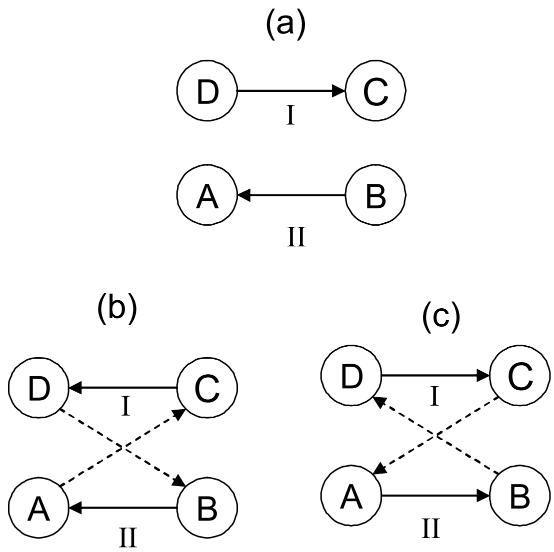

Figura 2.5 - Método do Intercâmbio de dois Arcos para melhorar a viagem inicial
FONTE: Elaboração Própria

2.4.5.3.2.
A Heurística das Economias

Esta heurística foi baseada no Algoritmo das Economias de Clarke & Wright para solucionar o Problema do Roteamento de Veículos. A idéia principal deste procedimento, apresentado por Lawler et al. (1987), consiste em que as conexões são feitas a cada passo maximizando a distância economizada sobre uma configuração prévia. O algoritmo é como segue:

Passo 1: Escolha uma cidade como a origem e rotule-a como 1.

Passo 2: Calcule as economias:

$s_{ij} = c_{i1} + c_{1j} - c_{ij}$; para $i,j = 2,3,...,n$ e $i \neq j$

Passo 3: Ordene as economias de maior à menor.

Passo 4: Começando com a maior economia da lista e indo para abaixo, forme sub-ciclos maiores através da ligação apropriada das cidades i e j. Repita esta operação até que o ciclo seja formado.

Este procedimento pode ser repetido n vezes para permitir a cada cidade ser a origem. A melhor solução obtida seria logo a resposta.

Para ilustrar o procedimento descrito, considerem-se os dados da Tabela 2.1, apresentada na exemplificação da heurística do vizinho mais próximo.

Para n = 1 (cidade A)

Passo 1: Escolhe-se a cidade A como a cidade de origem (cidade 1)

Passo 2 e 3: Calculam-se as economias e se ordenam da maior para a menor.

c_{i1}	c_{1j}	$-c_{ij}$	Nós	s_{ij}
11	10	-3	D-C	18
7	14	-6	C-B	15
11	14	-14	D-B	11
4	10	-9	B-C	5
7	5	-7	C-D	5
4	5	-20	B-D	-11

Passo 4: Formam-se sub-ciclos começando por D-C, e indo de acima para abaixo da lista (ordenados pelos s_{ij}'s), forma-se o seguinte ciclo:

A – D – C – B – A

Este ciclo da uma **distância total de 18**. Igual ao encontrado com a heurística do "vizinho mais próximo".

Seguindo com a aplicação da heurística para n = 2,3 e 4 obtêm-se outros três diferentes ciclos, mas o ciclo com o menor comprimento vai ser o calculado para um n inicial = 1, o qual tem-se exemplificado.

2.4.5.4. Conclusão sobre as Metodologias de Solução

As heurísticas apresentadas são bastaste simples de usar, e fornecem resultados muito bons para redes relativamente pequenas. Mas à medida que o número de nós vai se incrementando, o número de iterações e as possibilidades de combinações crescem enormemente. Portanto, para casos práticos é necessário o uso de ferramentas computacionais que aliviem os cálculos. Nesta dissertação, para a resolução do problema do caixeiro viajante emprega-se o software STORM 3.0. Este software foi escolhido por sua popularidade, e por ter uma interface de trabalho de fácil interação com o usuário.