

### 3 Definições e Conceitos Básicos para a Teoria de Opções Reais

#### 3.1. Técnicas de Otimização Dinâmica sob Incerteza

De maneira geral, podemos destacar duas principais técnicas matemáticas de modelagem de decisões de investimento em regime de incerteza: programação dinâmica e ativos contingentes. Apesar de levarem aos mesmos resultados em diversas aplicações, tais técnicas fazem suposições diferentes sobre o mercado financeiro (taxa de desconto do fluxo de caixa, por exemplo).

##### 3.1.1. Programação Dinâmica

A programação dinâmica é uma ferramenta bastante usada em problemas de otimização dinâmica, e é bastante útil para o tratamento de incertezas. Basicamente, a programação dinâmica divide a seqüência de decisões em duas partes: uma decisão imediata e uma função de avaliação que engloba os resultados das decisões subseqüentes. Se o horizonte de planejamento é finito, a última tomada de decisão pode ser realizada com base em algum método padrão de otimização estática. Essa solução permite obter uma função de avaliação para a penúltima decisão. Esse processo é repetido sucessivamente, até se chegar à decisão inicial (processo *backward*). Se o horizonte de planejamento é infinito, o que parece ser uma grande dificuldade para os cálculos simplifica-se pelo fato de que cada decisão tomada leva a outro problema semelhante ao original. Essa característica do problema não só facilita a solução numérica, mas também permite dar uma conotação teórica à solução, levando algumas vezes a uma solução analítica do problema.

A essência da programação dinâmica pode ser representada pela seguinte equação:

$$F_t(x_t) = \max_{u_t} \left\{ \pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} E_t[F_{t+1}(x_{t+1})] \right\}, \text{ onde:}$$

- $x_t$  = variável de estado no instante  $t$  (preço do petróleo, por exemplo);
- $u_t$  = variável de decisão no instante  $t$  (investir ou esperar, por exemplo);
- $\rho$  = taxa de desconto (exógena ao projeto);
- $F_t(x_t)$  = valor da oportunidade de investimento no instante  $t$ ;
- $\Pi_t(x_t, u_t)$  = lucro imediato no instante  $t$ ;
- $E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]$  = valor esperado, na data  $t$ , dos fluxos de caixa futuros a partir do instante  $t + 1$ . Esta parcela é chamada de valor de continuação.

Esta equação é conhecida como Equação de Bellman. Como afirma Dixit & Pindyck, a idéia por trás da equação é formalmente descrita no *Princípio de Otimização de Bellman*: “Uma estratégia ótima tem a propriedade que, qualquer que seja a ação inicial, as escolhas restantes constituem uma estratégia ótima com relação ao subproblema que se inicia com o estado resultante das ações iniciais”.

Em tempo contínuo, após algumas manipulações numéricas, a equação de Belmann fica:

$$\rho F(x, t) = \max_u \left\{ \pi(x, u, t) + \frac{1}{dt} E(dF) \right\}$$

Como afirma Dias, o principal problema no uso da programação dinâmica é determinar a taxa de desconto  $\rho$ . Esta dificuldade existe porque há um elevado grau de subjetividade quando não se tem um mercado suficientemente completo que permita uma correta definição do risco do projeto. Por este motivo, a programação dinâmica é mais usada em estudos econômicos, com aplicações na teoria do crescimento econômico, em modelos de equilíbrio macroeconômico, na teoria da produção etc.

### 3.1.2. Ativos Contingentes (*Contingent Claims*)

A técnica dos ativos contingentes tem como base os conhecimentos da teoria de finanças. Inicialmente, sabemos que um projeto de investimento é caracterizado por um fluxo de custos e benefícios que variam ao longo do tempo

num ambiente de incerteza. O agente (empresa ou indivíduo) que possui direitos sobre a oportunidade de investimento ou sobre o fluxo de lucros operacionais de um projeto possui um ativo que tem valor. Num mercado completo, negociam-se ativos de todos os tipos. Se a oportunidade de investimento em questão é negociada neste mercado, ela terá um valor de mercado. Porém, mesmo que este ativo não seja negociado diretamente no mercado, pode-se montar uma carteira (formado por outros ativos que são negociados no mercado) que replique o comportamento do ativo ao longo do tempo. O valor da oportunidade de investimento será igual ao valor total desta carteira, pois caso contrário há possibilidade de arbitragem. Uma vez conhecido o valor da oportunidade de investimento, pode-se definir a melhor forma, tamanho e tempo de investimento que leva a este valor, e determinar a estratégia ótima de investimento.

Embora esta técnica seja mais restrita em suas aplicações, ela evita a necessidade de se estabelecer a taxa de desconto ajustada ao risco, e por isso esta abordagem tornou-se bastante popular na área de finanças. Um exemplo clássico de aplicação desta técnica foi o estudo em que Black & Scholes obtiveram a solução analítica de uma opção europeia.

## 3.2. Processos Estocásticos

Um dos aspectos mais importantes na avaliação de opções reais é determinar de que forma serão tratadas as incertezas do projeto. Na maioria dos estudos desenvolvidos, assume-se que estes fatores de incerteza seguem um processo estocástico, ou seja, sua evolução no tempo tem uma parcela de aleatoriedade.

Quanto às suas propriedades estatísticas (média e variância, principalmente), um processo estocástico pode ser classificado como estacionário, quando mantém as mesmas propriedades ao longo do tempo, ou não-estacionário, quando as propriedades mudam ao longo do tempo. Com relação a variável tempo, podemos classificar um processo estocástico como contínuo ou discreto.

Nos tópicos a seguir serão apresentados, de maneira sucinta, os principais processos estocásticos considerados em estudos de opções reais e suas características.

### 3.2.1. Processo de Wiener

O processo de Wiener é um processo estocástico em tempo contínuo. Uma variável  $x$  segue um processo de Wiener quando ela apresenta três propriedades:

- Segue um processo de Markov, ou seja, a distribuição de probabilidades de  $x_{t+1}$  depende somente de  $x_t$ . Em outras palavras, a estimativa para o instante seguinte é feita exclusivamente com base na última informação disponível, e não no histórico;
- Tem incrementos independentes, ou seja, a variação num determinado intervalo de tempo é independente das variações em outros intervalos de tempo;
- As variações no processo seguem uma distribuição normal, com a variância aumentando linearmente com o intervalo de tempo.

Se  $z(t)$  é um processo de Wiener, então qualquer incremento  $\Delta z$  num intervalo de tempo  $\Delta t$  satisfaz as seguintes condições:

- $\Delta z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$ , onde  $\varepsilon_t \sim \text{Normal}(0,1)$
- $E[\varepsilon_t \varepsilon_s] = 0$  para  $t \neq s$

### 3.2.2. Processo de Ito

Num processo de Ito, a *drift* e a variância são funções do estado e do tempo. O processo pode ser representado da seguinte forma:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz, \text{ onde:}$$

- $a(x,t)$  = *drift* ou tendência instantânea do processo de Ito;
- $b^2(x,t)$  = taxa de variância instantânea do processo;
- $dz$  = incremento de Wiener.

O processo de Ito apresenta as seguintes propriedades estatísticas:

- $E(dx) = a(x,t) dt$
- $Var(dx) = b^2(x,t) dt$

### 3.2.3. Movimento Geométrico Browniano (MGB)

O MGB corresponde a um caso especial do processo de Ito onde  $a(x,t) = \alpha x$  e  $b(x,t) = \sigma x$ . Assim, o MGB pode ser representado pela seguinte equação:

$$\frac{dx}{x} = \alpha dt + \sigma dz$$

A maior parte dos estudos de opções reais assume que os fatores de incerteza (preço do petróleo, por exemplo) seguem um MGB. Ele possui as seguintes propriedades estatísticas:

- $E[x(t)] = x_0 e^{\alpha t}$
- $Var[x(t)] = x_0^2 e^{2\alpha t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$

No MGB, a tendência é um crescimento (ou queda) exponencial e os preços tem uma distribuição lognormal com variância crescendo com o horizonte temporal. Uma representação gráfica deste processo está apresentada na figura abaixo:

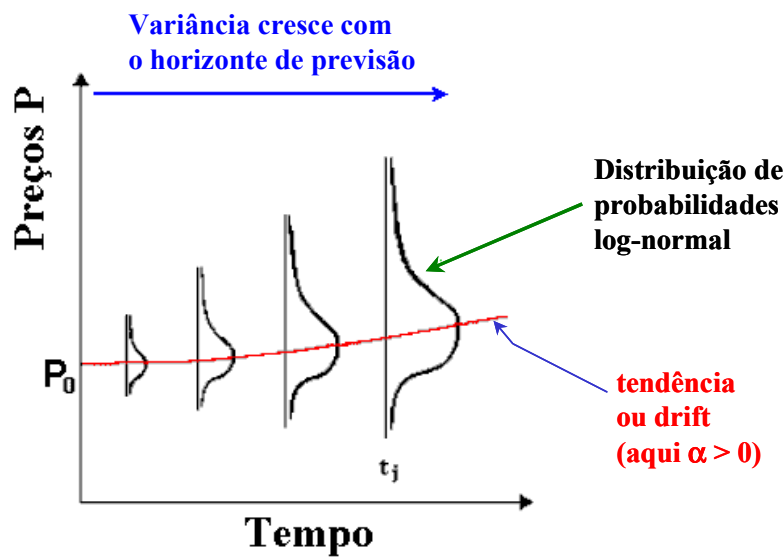


Figura 1: Representação gráfica de um MGB com *drift* positivo.

### 3.2.4. Processo de Reversão à Média

Como ilustramos no gráfico anterior, o MGB possui uma tendência de se distanciar do seu ponto inicial (exceto quando  $\alpha = 0$ ). Para algumas variáveis econômicas – preços de ações, por exemplo – esta suposição parece ser realista, mas para outras não. Consideremos, por exemplo, os preços do petróleo: apesar de seus preços serem geralmente modelados como MGB, pode-se argumentar que estes preços devem estar relacionados, no longo prazo, aos seus custos marginais de produção. Dessa forma, enquanto no curto prazo estes preços podem variar aleatoriamente, no longo prazo eles tendem a retornar para um nível próximo ao seu custo marginal de produção. Nestes casos, tais variáveis seguem um processo de reversão à média. Este processo é representado pela seguinte equação:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz, \text{ onde:}$$

- $\eta$  = velocidade da reversão;
- $\bar{x}$  = nível de equilíbrio;
- $\sigma$  = volatilidade do processo.

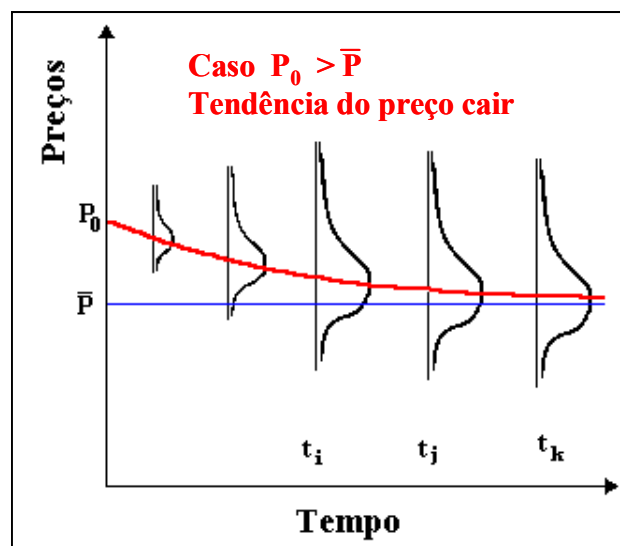
É interessante observar que o valor esperado dos incrementos em  $x$  depende da diferença entre  $x$  e  $\bar{x}$ . Se os preços estão baixos, a demanda tende

a aumentar e a oferta a diminuir, levando a uma elevação nos preços. Se os preços estão altos, a tendência é ocorrer o contrário. Porém, deve-se ressaltar que, como há incerteza no processo, os preços podem caminhar na direção oposta à tendência de reversão.

Apesar de ser um processo de Markov, a reversão à média não tem incrementos independentes. As propriedades estatísticas do processo de reversão à média são:

- $E[x_t] = \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta t}$
- $Var[x_t - \bar{x}] = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta t})$

A figura a seguir mostra graficamente um exemplo típico de um processo de reversão à média:



**Figura 2:** Representação gráfica de um processo de reversão à média, com tendência de queda de preços.

### 3.2.5. Processo de Poisson

Até agora foram apresentados apenas processos de difusão, ou seja, processos estocásticos em tempo contínuo. Em determinadas circunstâncias, porém, pode ser mais realista considerar que uma variável econômica segue um processo com saltos discretos. A entrada de um novo competidor num mercado

com poucos participantes, por exemplo, pode provocar um movimento brusco na evolução dos preços. A este processo chamamos de Poisson.

Um processo simples de Poisson é definido pela seguinte equação diferencial:

$$dx = f(x, t)dt + g(x, t)dq$$

Nesta equação,  $dq$  corresponde ao incremento aleatório, podendo assumir o valor zero ou o valor de um salto de amplitude  $u$ , que ocorre com probabilidade  $\lambda dt$ , onde  $\lambda$  é a frequência do processo.

Em alguns casos, os processos estocásticos podem ser integrados. O preço de um determinado ativo (preço do petróleo, por exemplo) pode evoluir continuamente segundo o MGB na maior parte do tempo, mas eventualmente pode sofrer grandes variações instantâneas em decorrência de eventos raros (guerras, por exemplo). Este processo misto pode ser representado pela seguinte equação:

$$dx = f(x, t)dt + g(x, t)dz + h(x, t)dq$$



### 3.3. Métodos Numéricos de Avaliação

De maneira geral, podemos destacar três métodos numéricos que são usados para a avaliação de ativos (reais ou financeiros): árvores binomiais, diferenças finitas e simulação de Monte Carlo.

#### 3.3.1. Modelo Binomial

Um dos métodos mais utilizados para a avaliação de ativos é o método binomial. A idéia básica do método é discretizar o processo de neutralidade ao risco representado pela EDP de Black e Scholes, e então aplicar a programação dinâmica para determinar o valor do ativo. A figura abaixo ilustra uma árvore binomial de três passos:

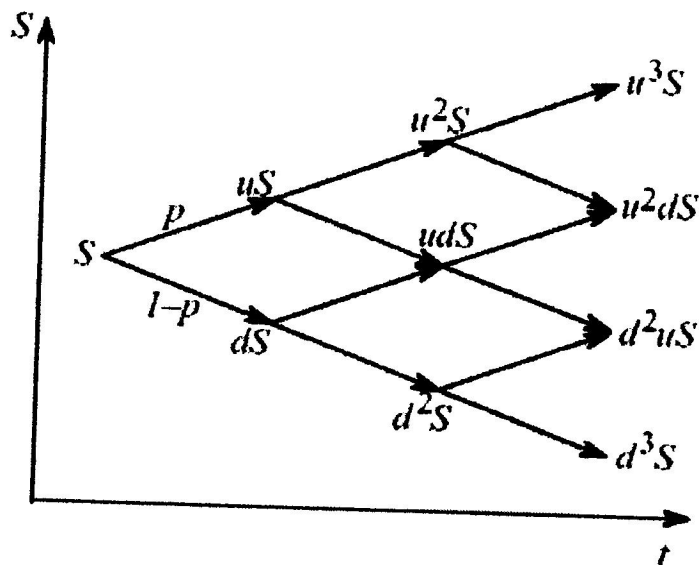


Figura 3: Árvore binomial de três passos.

Na figura,  $S$  corresponde ao preço inicial do ativo,  $u$  é o fator de subida de preços,  $d$  é o fator de queda de preços e  $p$  representa a probabilidade de uma subida de preço. A árvore representa os possíveis caminhos que o preço de um ativo pode seguir ao longo do tempo.

Cox, Ross e Rubinstein (1979) desenvolveram um método que converge para a solução dada por Black e Scholes. Eles mostraram que a equação do MGB poderia ser obtida como um limite contínuo de um caminho aleatório em tempo discreto. Em seu artigo, o método possui os seguintes parâmetros:

- $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$

- $d = 1 / u$
- $\Delta t = T/n$ , onde  $n$  é o número de passos na árvore entre os instantes inicial ( $T_0$ ) e final ( $T$ )
- $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{r}{\sigma} \sqrt{\Delta t}$

Um modelo mais preciso foi proposto por Hull e White (1988). Nele, os termos  $(\Delta t)^2$  não são desprezados, diferentemente do modelo de Cox, Ross e Rubinstein. Os parâmetros do modelo são dados por:

- $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$
- $d = 1 / u = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$
- $\Delta t = T/n$
- $p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$

Quando o ativo paga uma taxa contínua de dividendos ( $q$ ), a única alteração nos parâmetros ocorre na probabilidade  $p$ , que será dada pela seguinte equação:

$$p = \frac{e^{(r-q)\Delta t} - d}{u - d}$$

À medida que aumentamos a discretização do tempo (ou seja, aumentamos  $n$ ), o modelo binomial converge para o MGB. Para ilustrar esta afirmação, vamos analisar uma call e uma put européias que não pagam dividendos. Os valores exatos destas opções são obtidos a partir da solução da EDP de Black e Scholes. Sendo  $c$  e  $p$ , respectivamente, o valor de uma call e uma put européias, temos:

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2), \text{ para uma call européia}$$

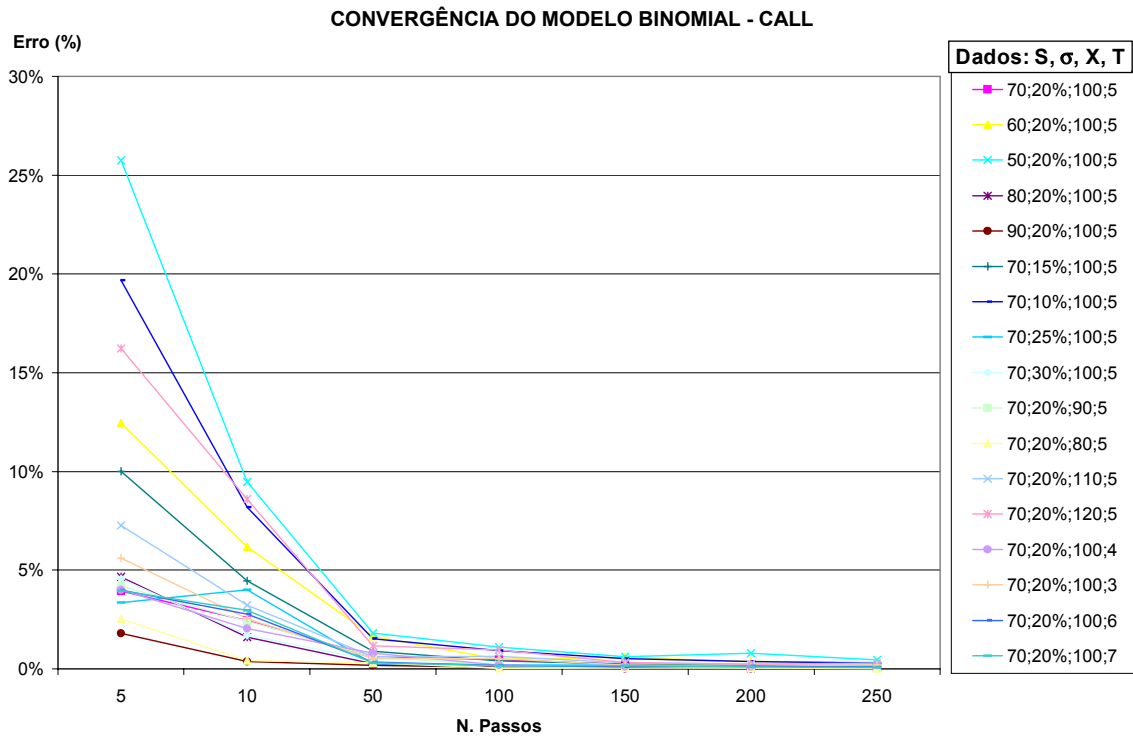
$$p = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1), \text{ para uma put européia}$$

onde:

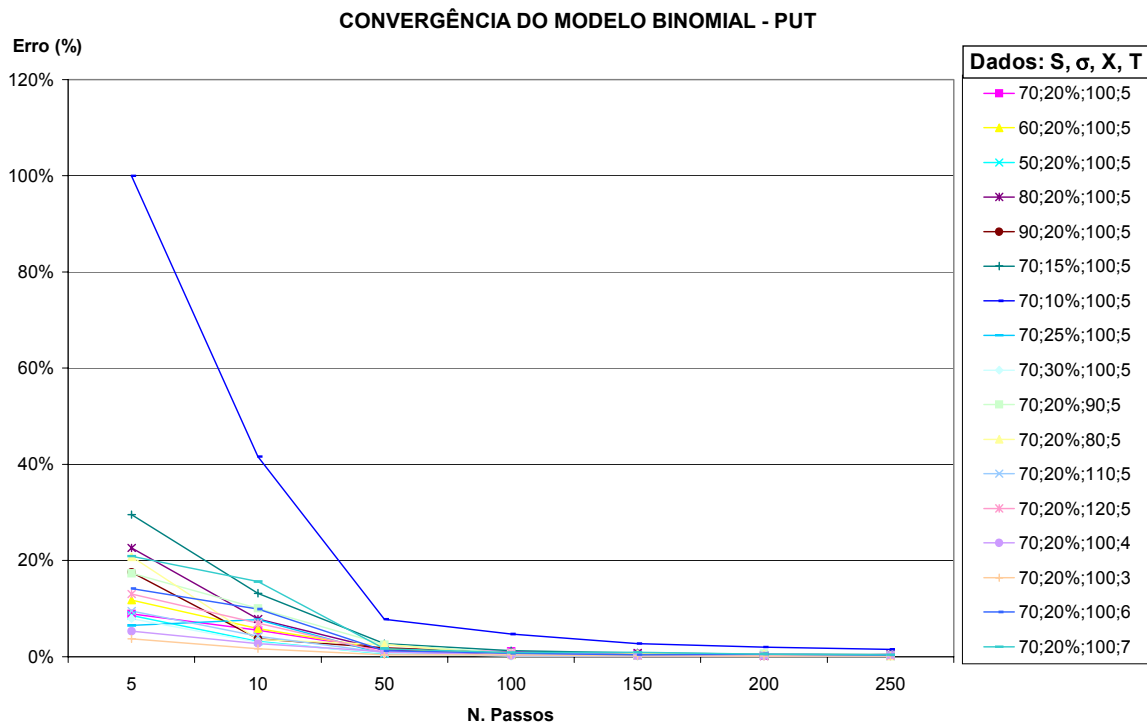
- $S$  = valor do ativo base;
- $X$  = preço de exercício da opção;
- $r$  = taxa de juros livre de risco;

- $T$  = data de vencimento da opção;
- $t$  = instante inicial;
- $N ( )$  = função cumulativa da distribuição de probabilidades normal  $(0,1)$ ;
- $d_1 = \frac{\ln(S / X) + (r + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$ ;
- $d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}$ ;
- $\sigma$  = volatilidade.

Os gráficos a seguir apresentam os resultados obtidos com a aplicação do modelo binomial para diversos exemplos de call e put européias:



**Figura 4:** Convergência do modelo binomial para exemplos de call do tipo européia.



**Figura 5:** Convergência do modelo binomial para exemplos de put do tipo europeia.

Observando os gráficos, vemos que os resultados do método binomial convergem rapidamente para a solução exata de Black e Scholes, com desvios inferiores a 1% para uma árvore com 250 passos.

### 3.3.2. Método das Diferenças Finitas

Este método avalia um derivativo através da solução da equação diferencial que o derivativo satisfaz, convertendo-a numa lista de equações diferenciais que são resolvidas iterativamente. Para ilustrar o método, vamos tomar como exemplo uma put americana sobre uma ação que não paga dividendos. A equação diferencial que a opção deve satisfazer é:

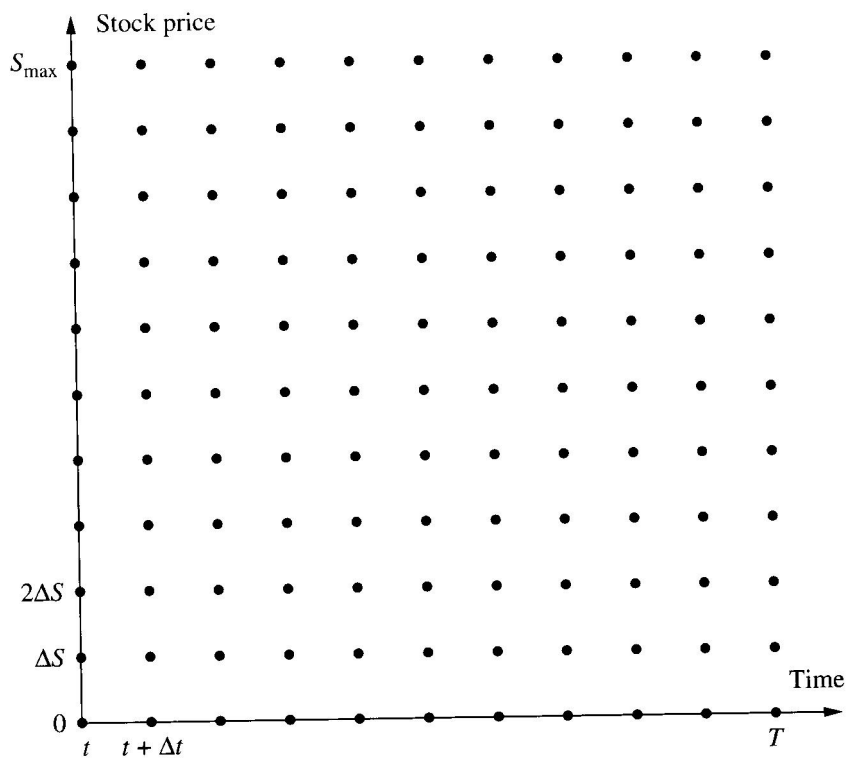
$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = 0$$

Deve-se escolher um número de intervalos de tempo entre o instante inicial  $t$  e a data de vencimento da opção ( $T$ ). Assim, o horizonte de tempo será dividido

em intervalos de magnitude  $\Delta t = (T - t) / N$ , e teremos  $(N+1)$  instantes de tempo ( $t, t + \Delta t, t + 2\Delta t, \dots, T$ ).

Além disso, deve-se determinar a discretização dos preços da ação. Para isso, define-se inicialmente um preço limite ( $S_{MAX}$ ) suficientemente elevado para garantir que a probabilidade do preço da ação exceder este valor seja praticamente nula. Assim, o grid dos preços da ação será dividido em intervalos de magnitude  $\Delta S = S_{MAX} / M$ , e teremos  $(M+1)$  preços possíveis da ação ( $0, \Delta S, 2 \Delta S, \dots, S_{MAX}$ ).

A figura abaixo mostra o exemplo de um grid para a abordagem por diferenças finitas:



**Figura 6:** Representação gráfica do *grid* do método das diferenças finitas.

O grid é formado por um total de  $(M+1)(N+1)$  pontos. O ponto  $(i, j)$  corresponde ao ponto no instante  $i\Delta t$  com a ação a um preço  $j\Delta S$ . O método das diferenças finitas pode ser aplicado de forma explícita ou implícita.

#### Método Implícito

No método implícito, para um ponto  $(i, j)$  interno qualquer,  $\partial f / \partial S$ ,  $\partial f / \partial t$  e  $\partial^2 f / \partial S^2$  podem ser aproximados por:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S}; \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2}$$

onde  $f_{i,j}$  representa o valor da put no ponto (i,j).

Substituindo estas equações e após algumas manipulações numéricas<sup>1</sup>, podemos reescrever a equação diferencial da seguinte forma:

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j}, \text{ onde:}$$

- $a_j = \frac{1}{2} r j \Delta t - \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t$ ;
- $b_j = 1 + r \Delta t + \sigma^2 j^2 \Delta t$ ;
- $c_j = -\frac{1}{2} r j \Delta t - \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t$ .

O valor da put satisfaz às seguintes condições de contorno:

- $f_{N,j} = \max[X - j\Delta S, 0]$   $j = 0, 1, \dots, M$
- $f_{i,0} = X$   $i = 0, 1, \dots, N$
- $f_{i,M} = 0$   $i = 0, 1, \dots, N$

Observe que os valores da put para todos os pontos no instante T são fornecidos pela 1ª condição de contorno, assim como os pontos onde o preço da ação é zero e  $S_{MAX}$  são dados pela 2ª e 3ª condições, respectivamente. Para encontrar os valores da opção no instante  $(T - \Delta t)$ , temos que resolver um sistema com (M-1) equações e (M-1) variáveis:

$$a_j f_{N-1,j-1} + b_j f_{N-1,j} + c_j f_{N-1,j+1} = f_{N,j} \quad j = 1, 2, \dots, M-1$$

Resolvido o sistema, cada valor  $f_{N-1,j}$  obtido é comparado com  $(X - j\Delta S)$ . Se  $f_{N-1,j} < (X - j\Delta S)$ , é ótimo o exercício antecipado da opção no instante  $(T - \Delta t)$ , e  $f_{N-1,j}$  será igual a  $(X - j\Delta S)$ . Este procedimento é então repetido para os instantes anteriores até determinar-se o valor da put no instante inicial.

---

<sup>1</sup> Para maiores detalhes, ver HULL, seção 15.8.

### Método Explícito

Apesar de ser mais confiável (sempre converge para a solução da equação diferencial quando  $\Delta S$  e  $\Delta t$  tendem a zero), o método implícito possui como desvantagem o fato de que (M-1) equações têm que ser resolvidas simultaneamente para obter os valores da opção em cada instante. O método pode ser simplificado se admitirmos que os valores de  $\partial f / \partial S$  e  $\partial^2 f / \partial S^2$  no ponto (i, j) são os mesmos no ponto (i+1, j). Assim, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta S^2}$$

Substituindo estas equações e com alguma manipulação numérica, a equação diferencial pode ser reescrita assim:

$$a_j^* f_{i+1,j-1} + b_j^* f_{i+1,j} + c_j^* f_{i+1,j+1} = f_{i,j}, \text{ onde:}$$

- $a_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t} \left( -\frac{1}{2} rj\Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t \right);$
- $b_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t} (1 - \sigma^2 j^2 \Delta t);$
- $c_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t} \left( \frac{1}{2} rj\Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t \right).$

Esta abordagem é conhecida como método das diferenças finitas explícitas. Como as condições de contorno valem tanto para o modo implícito como para o modo explícito, os valores da opção em T já são conhecidos. Os valores em  $(T - \Delta t)$  são obtidos aplicando-se a equação acima, repetindo-se este processo até o instante inicial t.

Dessa forma, o método explícito é mais fácil de se resolver do que o método implícito. Porém, o modo explícito nem sempre converge para a solução da equação diferencial. Este problema de instabilidade depende dos intervalos  $\Delta S$  e  $\Delta t$  usados para a formação do grid. Deynne (1996) demonstra que uma condição suficiente para assegurar a estabilidade do método explícito é adotar

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sigma^2 M^2}.$$

### 3.3.3. Simulação de Monte Carlo

As técnicas de simulação usam uma amostragem aleatória repetida (um processo de repetição aleatória) a partir das distribuições de probabilidade de cada uma das variáveis de entrada que determinam o fluxo de caixa de um projeto, chegando a uma distribuição de probabilidade ou a um “perfil de risco” do VPL. As simulações procuram reproduzir um cenário real de tomada de decisões através de um modelo matemático, que busca capturar as características funcionais mais importantes do projeto à medida que eventos aleatórios ocorrem, dado uma estratégia gerencial predefinida. A simulação de Monte Carlo (SMC) geralmente segue os seguintes passos:

1. Modelagem do projeto através de uma série de equações matemáticas e identidades para todas as variáveis de entrada importantes, incluindo uma descrição das interdependências entre diferentes variáveis ao longo do tempo;
2. Especificação das distribuições de probabilidade para cada uma das variáveis de entrada, com base num histórico de dados ou no conhecimento e sensibilidade dos profissionais envolvidos. Uma análise de sensibilidade deve preceder às simulações para determinar quais variáveis são importantes – de modo que se obtenha com precisão suas distribuições de probabilidade – e quais não são tão relevantes no processo – neste caso uma estimativa simples (determinística, por exemplo) é suficiente. Para lidar com a dependência entre duas variáveis, em princípio uma simples distribuição de probabilidades pode ser determinada para a variável independente, enquanto diversas distribuições são especificadas para a variável dependente, cada uma condicionada a um intervalo de valores para a variável independente;
3. Uma amostra aleatória é então obtida (usando um gerador de números aleatórios) a partir da distribuição de probabilidades das variáveis de entrada, possibilitando assim o cálculo dos fluxos de caixa líquidos de cada período e o respectivo VPL do projeto para a amostra considerada;
4. O processo é repetido diversas vezes, obtendo-se para cada vez que se repete o processo um VPL para o projeto. Ao final, uma distribuição de probabilidades do VPL do projeto pode ser gerada.



Mesmo podendo usar as simulações em problemas complexos de decisão em regime de incerteza, com um número grande de variáveis de entrada que interagem entre elas de diferentes formas ao longo do tempo, esta técnica possui limitações. Inicialmente, mesmo que a estimativa das distribuições de probabilidade seja feita de maneira não-tendenciosa, é bastante difícil e complexo capturar corretamente todas as interdependências existentes. Segundo, mesmo que o gerente acredite na distribuição de probabilidades do VPL, seu significado é questionável, pois não está claro qual a taxa de desconto correta que deve ser usada, como afirma Myers (1976):

*“Se o VPL é calculado usando uma taxa de desconto ajustada ao risco, qualquer futuro ajuste no risco terá efeito dobrado. Se utilizarmos uma taxa de desconto livre de risco, obteremos uma distribuição dos valores do projeto se todas as incertezas associadas aos fluxos de caixa do projeto forem eliminadas de hoje para amanhã. Porém, como a incerteza não é resolvida desta forma, o significado desta distribuição não fica claro”.*

Além disso, se um projeto pode ter diversos valores presentes possíveis – um para cada ponto da distribuição – então nós não podemos mais interpretar o valor presente como o preço que o projeto teria num mercado de capital competitivo.

Por último, mesmo que o gerente, diante das dificuldades relacionadas acima, queira tomar suas decisões com base na distribuição de probabilidades do VPL, não há uma regra que traduza esta distribuição numa decisão clara a ser tomada.

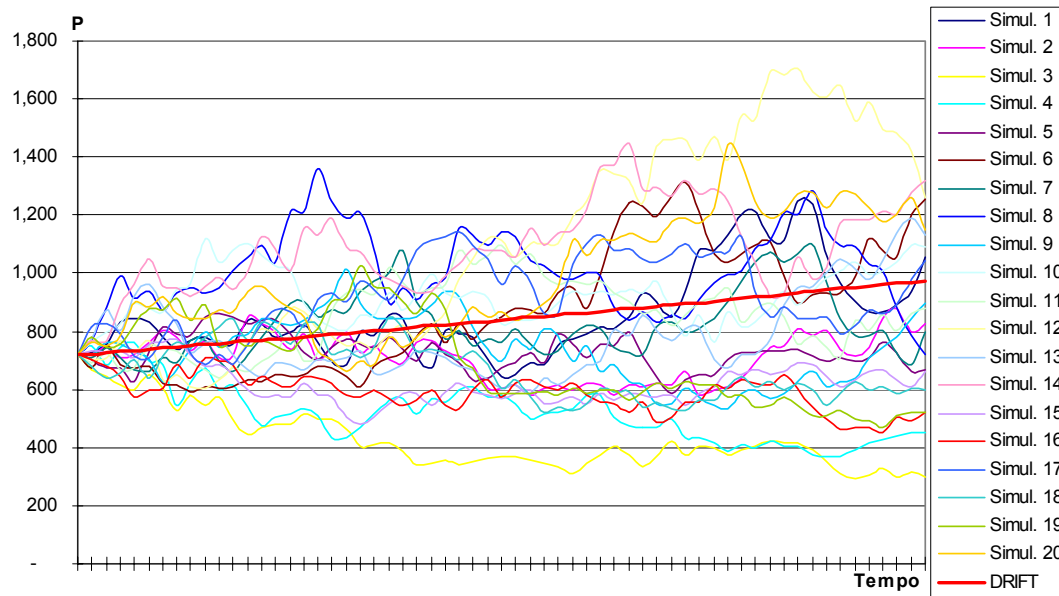
A avaliação de opções através da SMC pode ser resumida em três etapas:

1. Simulações dos fatores de incerteza do ativo (preço, volatilidade, dividendos etc);
2. Determinação do *payoff* do ativo;
3. Apreçamento da opção através da média das simulações.

A utilização da SMC é especialmente adequada para opções dependentes de múltiplas variáveis de estado ou opções que dependem do caminho. Por exemplo, se admitirmos que uma determinada opção tem como variável de estado o preço  $P_t$  do ativo base, e que o mesmo segue um MGB, a SMC pode ser utilizada para simular trajetórias de preço através da seguinte equação:

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_i\right], \text{ onde } Z \sim N(0, 1)$$

A figura abaixo mostra um exemplo de simulações de trajetórias de preços:



**Figura 7:** Simulações de trajetórias de preços (MGB). Dados:  $P_0 = \$ 720,00$ ;  $r = 10\%$  aa;  $q = 5\%$  aa;  $T = 6$  anos;  $n = 60$ ;  $\sigma = 20\%$  aa.

Para melhorar a precisão dos resultados da SMC, pode-se aumentar o número de simulações, o que por sua vez pode elevar demasiadamente o custo computacional deste processo. Para solucionar este problema, existem algumas técnicas de redução de variância que aumentam a eficiência da SMC sem um acréscimo significativo do custo computacional. Maiores detalhes sobre estas técnicas encontram-se no apêndice A deste trabalho.