6
Análise de Sensibilidade do Método LSM

Para fazer uma análise de sensibilidade do método LSM, tomamos como base exemplos de call e put americanas[1]. Para os exemplos considerados, assumimos que o valor do ativo base segue um MGB:

$$\frac{dV_t}{V_t} = \alpha dt + \sigma dZ_t \text{, onde:}$$

- V_t é o valor do projeto no instante t;
- α = r - δ, onde r é a taxa de juros livre de risco e δ é a taxa de dividendos;
- σ é a volatilidade do valor do ativo; e
- dZ é o incremento de Wiener.

Os dados da call e put americanas utilizadas na análise são:

- Preço inicial do ativo base (P_0): \$ 720
- Taxa de juros livre de risco (r): 10 % ao ano
- Preço de exercício da opção (E): \$ 800
- Taxa de dividendos (q): 5 % ao ano
- Volatilidade do valor do ativo: σ
- Prazo de vencimento da opção: T

O método teve sua eficiência testada com relação a 3 fatores. São eles:

- Número de simulações de trajetórias de preços (m);
- Número de intervalos de tempo (n); e
- Grau do polinômio na regressão (P^X).

---

[1] Utilizou-se o software MATLAB para a avaliação de opções americanas através do método binomial e do método LSM. Os algoritmos elaborados pelo autor encontram-se no apêndice D.

Em todas as análises realizadas, utilizou-se a técnica das variáveis antitéticas para a redução da variância. O modelo binomial foi utilizado em todos os exemplos como referência para a validação dos resultados obtidos através do método LSM.

Frota (2003) fez um estudo dos modelos de precificação tradicionais e de modelos mais flexíveis desenvolvidos recentemente (entre eles o LSM), baseados em simulações de Monte Carlo e Quase-Monte Carlo, buscando avaliar a aplicabilidade e versatilidade destes modelos na avaliação de opções americanas tradicionais ou complexas.

6.1.Número de simulações (m)

Inicialmente, a análise de sensibilidade foi realizada com relação ao número de simulações usadas na avaliação da opção. O método LSM foi aplicado utilizando-se 10.000, 20.000, 50.000 e 100.000 trajetórias de preços. Em todas as situações, o método foi aplicado usando variáveis antitéticas para redução de variância[2], com n = T (intervalos de tempo anuais) e polinômio linear de 8º grau na regressão (ou seja, até o termo P^8). A análise foi realizada tanto para opções de compra como para opções de venda do tipo americana.

Os resultados obtidos para os exemplos de CALL americana foram:

CALL Americana

Dados		Lattice	Least Square Monte Carlo (MÉDIA)				Least Square Monte Carlo (ERRO REL)			
σ	T	n = 1000	m = 10000	m = 20000	m = 50000	m = 100000	m = 10000	m = 20000	m = 50000	m = 100000
20%	6	97,8043	98,6187	97,6880	97,8026	98,0585	0,83%	0,12%	0,00%	0,26%
15%	6	71,4695	71,8000	72,0657	71,3744	71,6812	0,46%	0,83%	0,13%	0,30%
25%	6	124,4103	125,3684	125,2478	124,2328	124,2881	0,77%	0,67%	0,14%	0,10%
20%	4	64,5018	64,7787	64,7984	64,7457	64,5933	0,43%	0,46%	0,38%	0,14%
20%	10	142,8694	143,5723	143,5553	143,0293	142,4912	0,49%	0,48%	0,11%	0,26%

Dados		Least Square Monte Carlo (DESV PAD)			
σ	T	m = 10000	m = 20000	m = 50000	m = 100000
20%	6	1,41%	1,37%	0,83%	0,43%
15%	6	1,60%	1,28%	0,85%	0,58%
25%	6	1,56%	1,16%	0,93%	0,68%
20%	4	1,74%	1,13%	0,95%	0,68%
20%	10	2,92%	2,23%	1,37%	0,74%

Tabela 1: Análise de sensibilidade do método LSM para exemplos de call americana. Variável de análise: número de simulações.

Na tabela acima, LATTICE foi obtido aplicando-se o método binomial com n = 1000 intervalos de tempo, MÉDIA foi obtido repetindo-se o método LSM 20 vezes, ERRO REL corresponde à diferença (em módulo) entre os resultados obtidos por lattice e por LSM, e DESV PAD corresponde ao desvio padrão das iterações do método LSM. Esta foi a metodologia adotada para obter todos os resultados dos testes de sensibilidade, que serão apresentados sempre neste formato padrão.

A análise dos resultados nos permite fazer algumas constatações:

[2] Ou seja, um número M de trajetórias de preços corresponde a M / 2 simulações de preços mais M / 2 antitéticas.

- Usando 10.000 trajetórias de preço (5.000 simulações mais 5.000 antitéticas), verificamos, para todos os exemplos considerados, uma diferença máxima de 0,83 % entre o método binomial e o LSM, o que já pode ser considerado uma boa performance do LSM. À medida que aumentamos o número de simulações, esta diferença diminui, chegando a menos de 0,30 % para 100.000 trajetórias;
- Como era de se esperar, o aumento do número de simulações torna os resultados do LSM mais precisos. Isso fica evidente através do desvio padrão: para 10.000 trajetórias, há um desvio padrão máximo de 2,92 % entre os exemplos considerados. Aumentando o número de trajetórias para 100.000, este valor cai para 0,74 %, uma redução bastante significativa.

Os gráficos a seguir apresentam os dados referentes ao erro relativo e ao desvio padrão dos exemplos analisados:

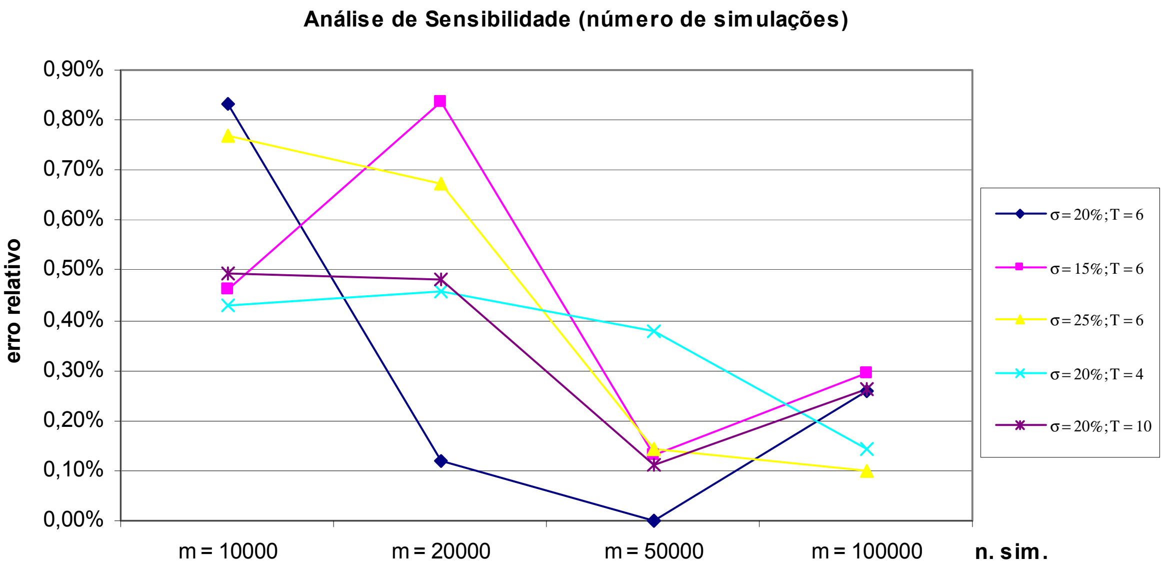

Figura 1: Erro relativo da análise de sensibilidade do método LSM para exemplos de call americana. Variável de análise: número de simulações.

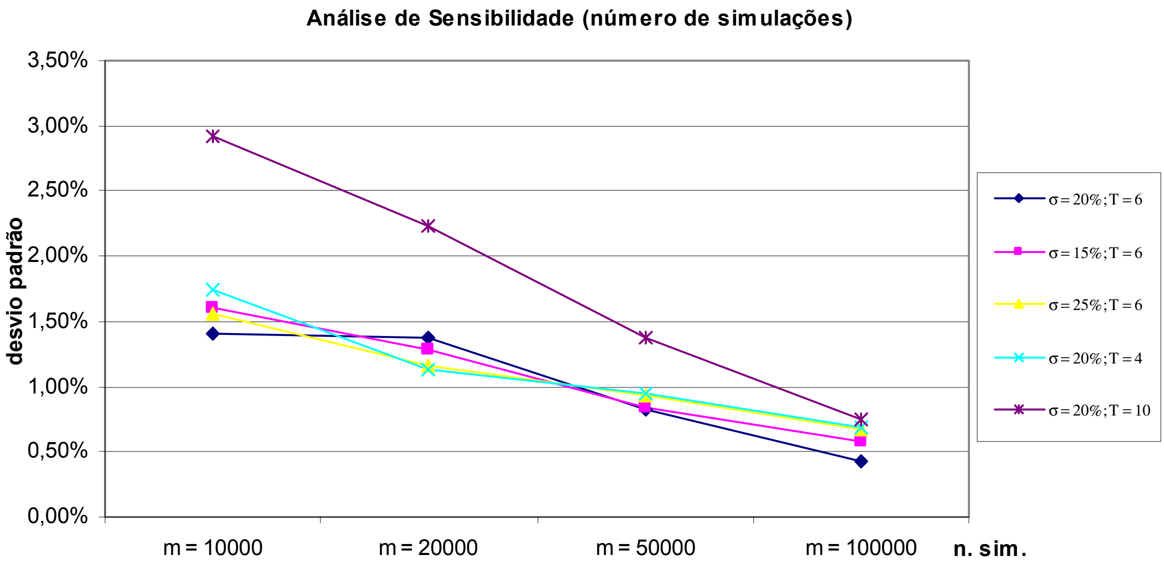

Figura 2: Desvio padrão da análise de sensibilidade do método LSM para exemplos de call americana. Variável de análise: número de simulações.

Agora, usaremos os mesmos exemplos formulados para uma CALL americana, desta vez considerando que se tratam de opções de venda. Os resultados obtidos para os exemplos de PUT americana são:

PUT Americana

Dados		Lattice	Least Square Monte Carlo (MÉDIA)				Least Square Monte Carlo (ERRO REL)			
σ	T	n = 1000	m = 10000	m = 20000	m = 50000	m = 100000	m = 10000	m = 20000	m = 50000	m = 100000
20%	6	108,4038	99,8914	99,7653	99,7515	99,8123	7,85%	7,97%	7,98%	7,93%
15%	6	87,9842	76,8842	76,6217	76,5752	76,5594	12,62%	12,91%	12,97%	12,99%
25%	6	132,0920	124,0815	124,2290	124,1109	124,1746	6,06%	5,95%	6,04%	5,99%
20%	4	104,9743	95,9999	95,7937	95,9260	95,9271	8,55%	8,75%	8,62%	8,62%
20%	10	111,3648	103,1457	102,9512	103,0900	103,0341	7,38%	7,56%	7,43%	7,48%

Dados		Lattice	Least Square Monte Carlo (DESV PAD)			
σ	T	n = 1000	m = 10000	m = 20000	m = 50000	m = 100000
20%	6	108,4038	0,43%	0,39%	0,18%	0,16%
15%	6	87,9842	0,45%	0,29%	0,20%	0,16%
25%	6	132,0920	0,54%	0,38%	0,24%	0,17%
20%	4	104,9743	0,66%	0,29%	0,23%	0,17%
20%	10	111,3648	0,41%	0,40%	0,17%	0,14%

Tabela 2: Análise de sensibilidade do método LSM para exemplos de put americana. Variável de análise: número de simulações.

A análise dos resultados nos permite fazer algumas constatações:

- Diferentemente do que ocorreu quando analisamos os exemplos como opções de compra, os resultados obtidos pelo LSM não convergem para os resultados obtidos pelo método binomial, mesmo com o aumento do número de trajetórias de preço. Para m = 10.000, as diferenças entre os resultados do LSM e de lattice variam entre 6% e 13%, mantendo esse mesmo padrão até m = 100.000. Mesmo assim, os resultados do LSM parecem convergir para algum outro valor, visto que o erro relativo em cada exemplo é praticamente constante à medida que m aumenta;

- Os resultados do LSM para as opções de venda oscilam bem menos que os respectivos exemplos de call americana, como podemos verificar na tabela 11: para m = 10.000 trajetórias, o desvio padrão varia entre 0,41% e 0,66%. Ao Aumentarmos o número de trajetórias para 100.000, este valor passa a oscilar entre 0,14% e 0,17%. No caso de opções de compra, os valores estavam bem acima destes patamares (ver tabela 10).
- Apesar disso, o aumento do número de simulações também torna os resultados do LSM mais precisos considerando-se opções de venda. Isto fica evidenciado pela redução no desvio padrão à medida que aumentamos o número de simulações.

Os gráficos a seguir apresentam os dados referentes ao erro relativo e ao desvio padrão dos exemplos analisados:

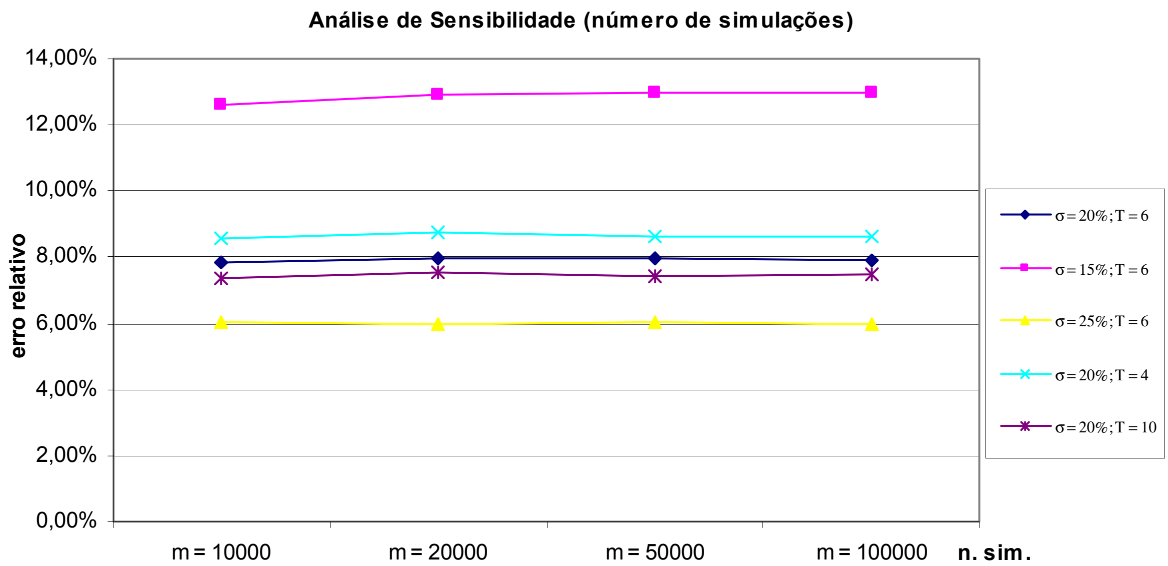

Figura 3: Erro relativo da análise de sensibilidade do método LSM para exemplos de put americana. Variável de análise: número de simulações.

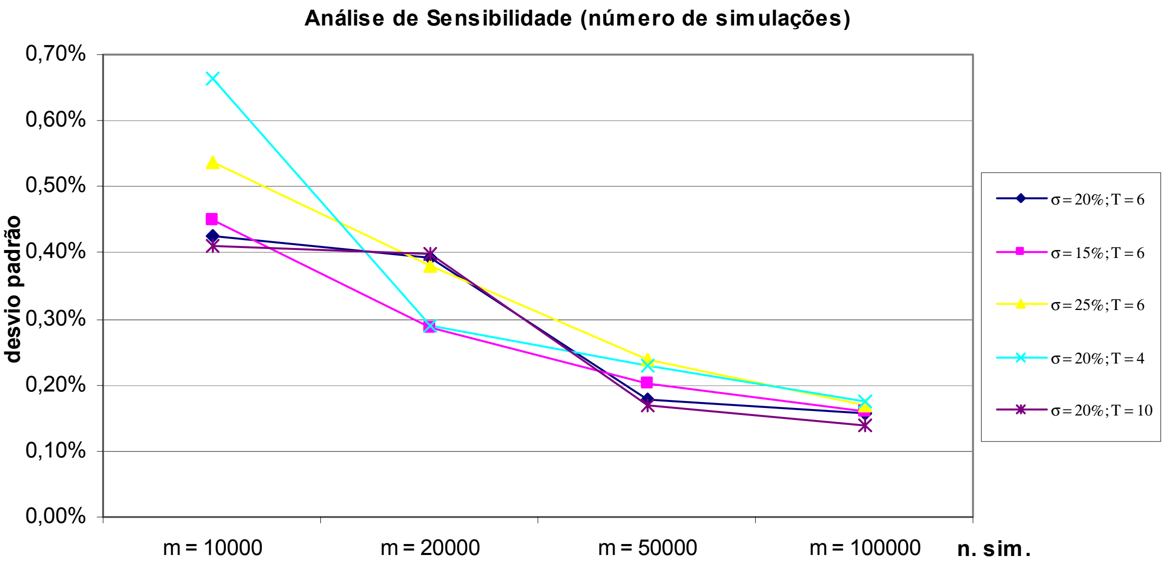

Figura 4: Desvio padrão da análise de sensibilidade do método LSM para exemplos de put americana. <u>Variável de análise:</u> número de simulações.

De maneira geral, com base nestes resultados iniciais da análise de sensibilidade, o método dos mínimos quadrados não se mostrou completamente satisfatório apenas quando lidamos com opções de venda. Porém, um aspecto a ser considerado é que, nesta análise, dividimos o tempo em intervalos anuais. Como sabemos, para uma opção americana (seja ela de compra ou de venda), a possibilidade de exercer antecipadamente a opção agrega valor. Como este exercício antecipado pode ocorrer a qualquer instante ao longo da vida útil da opção (ou seja, de forma contínua), a aplicação do LSM com uma discretização do tempo em intervalos menores pode trazer resultados mais satisfatórios. É o que veremos no tópico a seguir.

6.2. Número de intervalos de tempo (n)

Para a análise de sensibilidade do método LSM com relação à discretização do tempo, iremos agora obter o valor dos mesmos exemplos utilizados no tópico anterior, considerando diferentes intervalos de tempo. A análise foi realizada considerando-se, respectivamente, intervalos de tempo anuais, quadrimestrais, bimestrais e mensais.

O método dos mínimos quadrados foi aplicado usando m = 5.000 trajetórias de preços[3] (2.500 simulações mais 2.500 antitéticas) e polinômio linear de 8^o grau na regressão (ou seja, até o termo P^8). A análise foi realizada tanto para opções de compra como para opções de venda do tipo americana.

Os resultados obtidos para os exemplos de CALL americana foram:

CALL Americana

Dados		Lattice	Least Square Monte Carlo (MÉDIA)				Least Square Monte Carlo (ERRO REL)			
			m = 5000				m = 5000			
σ	T	n = 1000	n = T	n = 3 * T	n = 6 * T	n = 12 * T	n = T	n = 3 * T	n = 6 * T	n = 12 * T
20%	6	97,8043	98,216	100,143	99,955	100,950	0,42%	2,39%	2,20%	3,22%
15%	6	71,4695	71,515	72,161	72,688	72,830	0,06%	0,97%	1,70%	1,90%
25%	6	124,4103	124,784	127,629	128,172	128,331	0,30%	2,59%	3,02%	3,15%
20%	4	64,5018	64,749	65,555	66,597	66,242	0,38%	1,63%	3,25%	2,70%
20%	10	142,8694	145,556	146,560	145,842	146,578	1,88%	2,58%	2,08%	2,60%

Dados		Least Square Monte Carlo (DESV PAD)			
		m = 5000			
σ	T	n = T	n = 3 * T	n = 6 * T	n = 12 * T
20%	6	3,07%	3,08%	2,53%	1,58%
15%	6	2,25%	1,92%	2,19%	2,40%
25%	6	2,28%	3,07%	3,03%	2,49%
20%	4	2,01%	2,43%	3,29%	2,44%
20%	10	1,39%	1,79%	1,97%	2,26%

Tabela 3: Análise de sensibilidade do método LSM para exemplos de call americana. Variável de análise: discretização do tempo.

Analisando os resultados, verificamos que:

- Um aumento na discretização do tempo aumenta a divergência entre os resultados obtidos pelo método binomial e pelo LSM. Isto fica mais claro quando comparamos os valores para n = T (intervalos anuais) e n = 12*T (intervalos mensais): a diferença

---

[3] Devido ao aumento do custo computacional decorrente de uma maior discretização do tempo, optou-se por reduzir o número m de trajetórias de preços utilizadas na análise.

entre os resultados dos 2 métodos vai de valores inferiores a 1,88% para valores entre 1,90% e 3,22%;

- Além disso, há uma aparente redução da precisão do método dos mínimos quadrados com uma maior discretização do tempo. Tomando novamente por base os valores extremos (para n = T e n = 12*T), com exceção do primeiro exemplo (σ = 20% e T = 6), todos os demais apresentam este comportamento, com valores que oscilam de 1,39% a 2,28% para 2,26% a 2,49%.

Os gráficos a seguir apresentam os dados referentes ao erro relativo e ao desvio padrão dos exemplos analisados:

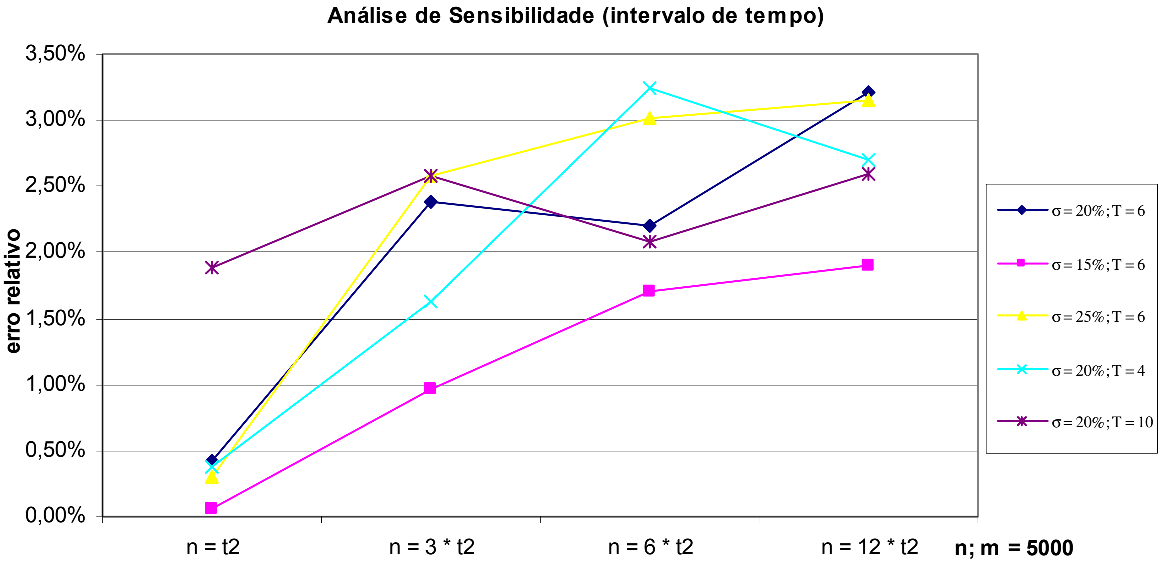

Figura 5: Erro relativo da análise de sensibilidade do método LSM para exemplos de call americana. Variável de análise: discretização do tempo.

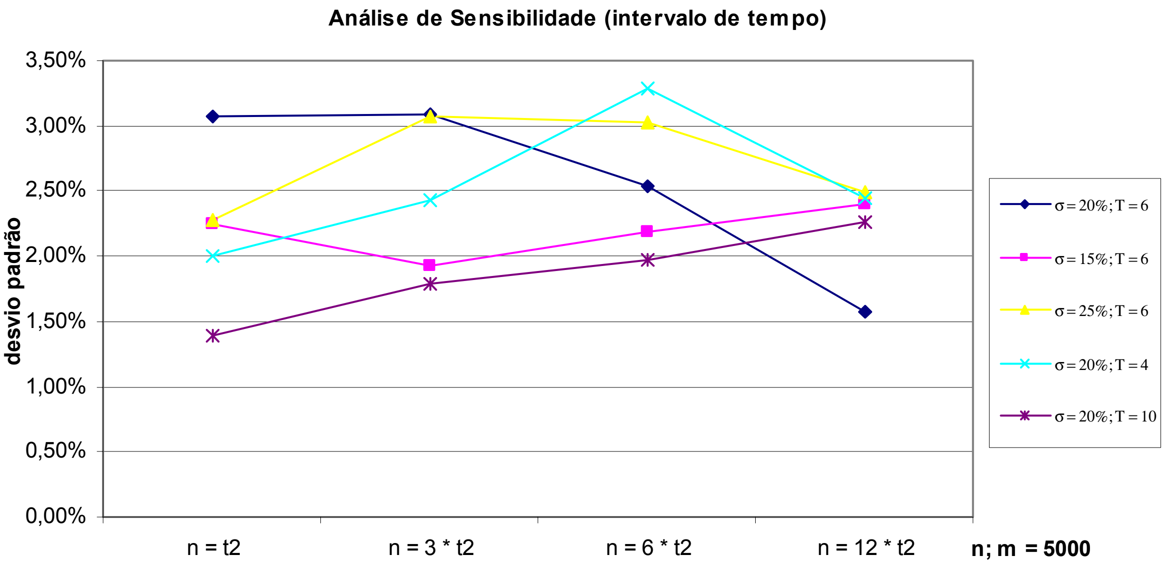

Figura 6: Desvio padrão da análise de sensibilidade do método LSM para exemplos de call americana. Variável de análise: discretização do tempo.

Agora, aplicaremos o método LSM para os mesmos exemplos, tratando-os como opções de venda. Os resultados obtidos para PUT americana são apresentados na tabela a seguir:

PUT Americana

Dados		Lattice	Least Square Monte Carlo (MÉDIA)				Least Square Monte Carlo (ERRO REL)			
			m = 5000				m = 5000			
σ	T	n = 1000	n = T	n = 3 * T	n = 6 * T	n = 12 * T	n = T	n = 3 * T	n = 6 * T	n = 12 * T
20%	6	108,4038	99,716	106,246	107,381	108,361	8,01%	1,99%	0,94%	0,04%
15%	6	87,9842	76,577	85,032	86,707	87,588	12,97%	3,36%	1,45%	0,45%
25%	6	132,0920	124,232	130,258	130,936	131,974	5,95%	1,39%	0,88%	0,09%
20%	4	104,9743	95,977	102,548	103,773	104,904	8,57%	2,31%	1,14%	0,07%
20%	10	111,3648	103,200	109,117	110,588	111,119	7,33%	2,02%	0,70%	0,22%

Dados		Least Square Monte Carlo (DESV PAD)			
		m = 5000			
σ	T	n = T	n = 3 * T	n = 6 * T	n = 12 * T
20%	6	0,77%	0,61%	0,70%	0,75%
15%	6	0,74%	0,63%	0,49%	0,68%
25%	6	0,82%	0,59%	0,75%	0,59%
20%	4	0,64%	0,56%	0,64%	0,65%
20%	10	0,60%	0,54%	0,60%	0,69%

Tabela 4: Análise de sensibilidade do método LSM para exemplos de put americana. Variável de análise: discretização do tempo.

Alguns aspectos verificados a partir dos resultados merecem ser destacados:

- Diferentemente do que se verificou nas opções de compra, os resultados encontrados com a aplicação do LSM convergem para os valores fornecidos pelo método binomial, no caso das opções de venda. Para n = t (intervalos anuais), o erro relativo chega a 13%, enquanto para n = 12*t (intervalos mensais), o erro não supera 0,5%;
- Com relação à precisão do método LSM com a discretização do tempo, não se pode perceber uma tendência nítida: para todos os exemplos considerados, o desvio padrão oscila entre 0,49% e 0,82% para os diferentes valores de n.

Os gráficos a seguir apresentam os dados referentes ao erro relativo e ao desvio padrão dos exemplos analisados:

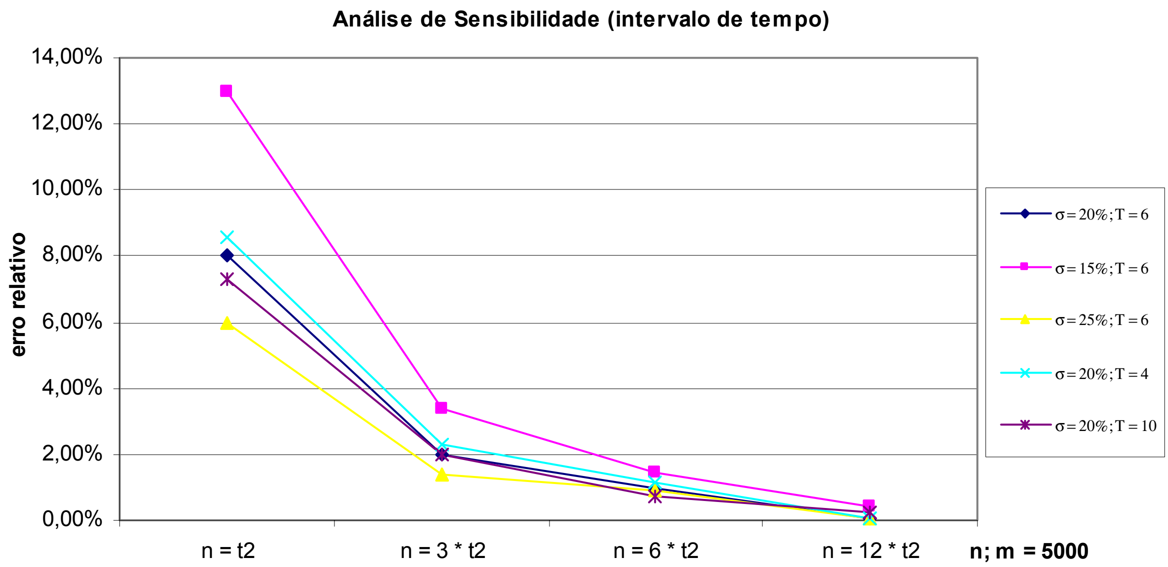

Figura 7: Erro relativo da análise de sensibilidade do método LSM para exemplos de put americana. Variável de análise: discretização do tempo.

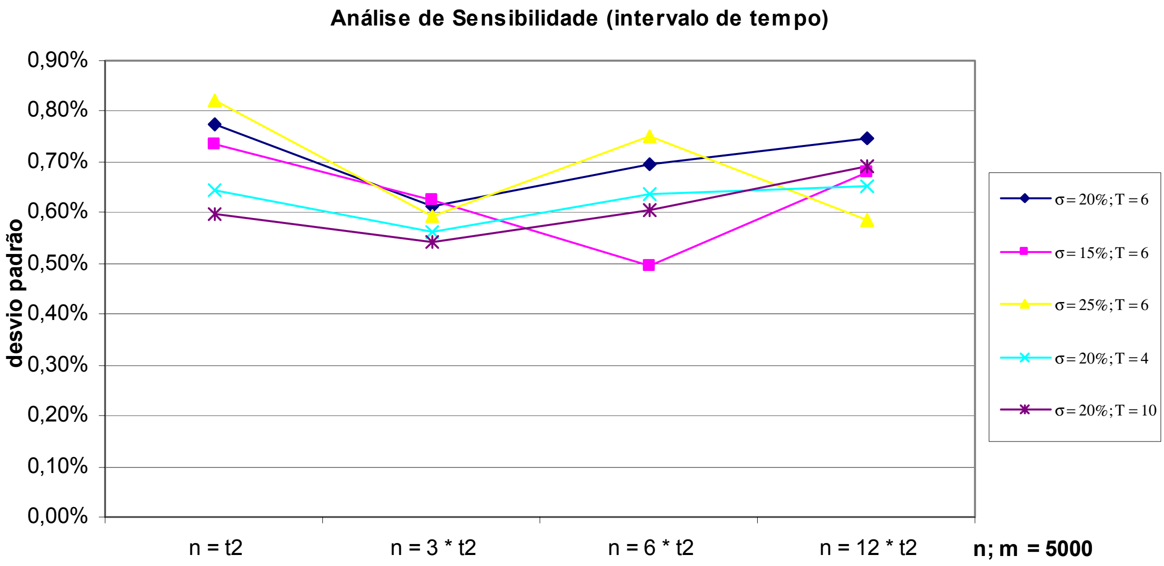

Figura 8: Desvio padrão da análise de sensibilidade do método LSM para exemplos de put americana. Variável de análise: discretização do tempo.

De maneira geral, pode-se dizer que as opções de venda apresentaram resultados mais satisfatórios na análise com relação à discretização do tempo, no tocante à convergência (verificada através do erro relativo) e à precisão (verificada através do desvio padrão) do método dos mínimos quadrados. Este comportamento é inverso ao que ocorreu na análise com relação ao número de simulações, onde os resultados encontrados para as opções de compra foram melhores. Ou seja, a análise destes resultados sugere que, enquanto as opções de compra do tipo americana são mais sensíveis e convergem mais rapidamente com um aumento no número de simulações, as opções de venda do tipo americana são mais sensíveis e convergem mais rapidamente com uma maior discretização do tempo.

6.3. Grau do Polinômio na Regressão

Por fim, foi realizada uma análise de sensibilidade do método dos mínimos quadrados com relação às funções básicas utilizadas nas regressões. Por simplicidade, optou-se por realizar esta análise envolvendo apenas potências do valor do projeto[4] (P). O método foi testado usando quatro conjuntos de funções básicas:

- Polinômio linear de 2º grau: P, P^2;
- Polinômio linear de 4º grau: P, P^2, P^3, P^4;
- Polinômio linear de 6º grau: P, P^2, P^3, P^4, P^5, P^6;
- Polinômio linear de 8º grau: P, P^2, P^3, P^4, P^5, P^6; P^7; P^8;

O método foi aplicado usando m = 20.000 trajetórias de preços (10.000 simulações mais 10.000 antitéticas). Como as opções de venda mostraram-se mais sensíveis à discretização do tempo do que as opções de compra, as simulações foram realizadas considerando-se menores intervalos de tempo para as PUTs (intervalos quadrimestrais). Para os exemplos de CALL americana, optou-se por intervalos anuais.

Os resultados obtidos para CALL americana foram:

CALL Americana

Dados		Lattice	Least Square Monte Carlo (MÉDIA)				Least Square Monte Carlo (ERRO REL)			
σ	T	n = 1000	m = 20000				m = 20000			
			até P^2	até P^4	até P^6	até P^8	até P^2	até P^4	até P^6	até P^8
20%	6	97,7990	97,658	97,554	97,730	97,688	0,14%	0,25%	0,07%	0,11%
15%	6	71,4694	71,799	71,504	72,117	72,066	0,46%	0,05%	0,91%	0,83%
25%	6	124,3721	124,455	125,000	124,897	125,248	0,07%	0,50%	0,42%	0,70%
20%	4	64,5016	64,553	64,831	64,841	64,798	0,08%	0,51%	0,53%	0,46%
20%	10	142,7046	142,658	142,764	143,264	143,555	0,03%	0,04%	0,39%	0,60%

Dados		Lattice	Least Square Monte Carlo (DESV PAD)			
σ	T	n = 1000	m = 20000			
			até P^2	até P^4	até P^6	até P^8
20%	6	97,7990	1,11%	1,07%	1,12%	1,37%
15%	6	71,4694	1,32%	1,00%	1,16%	1,28%
25%	6	124,3721	0,84%	0,95%	0,88%	1,16%
20%	4	64,5016	1,56%	1,63%	1,34%	1,13%
20%	10	142,7046	1,03%	0,74%	0,97%	1,01%

Tabela 5: Análise de sensibilidade do método LSM para exemplos de call americana. Variável de análise: grau do polinômio da regressão.

---

[4] Como vimos anteriormente, outras funções básicas podem ser usadas na regressão.

Observando os resultados, não conseguimos identificar um aumento na precisão à medida que elevamos o grau do polinômio na regressão. Alguns resultados, inclusive, sugerem o contrário: há um aumento no erro relativo e no desvio padrão quando foi adotado um polinômio linear de maior grau na regressão.

Os gráficos a seguir apresentam os dados referentes ao erro relativo e ao desvio padrão dos exemplos analisados:

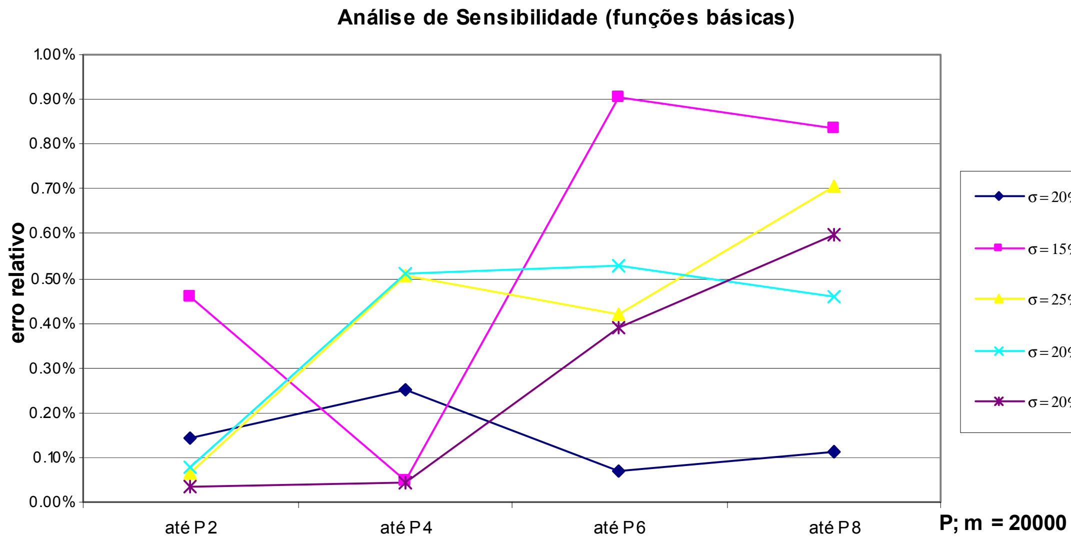

Figura 9: Erro relativo da análise de sensibilidade do método LSM para exemplos de call americana. <u>Variável de análise:</u> grau do polinômio da regressão.

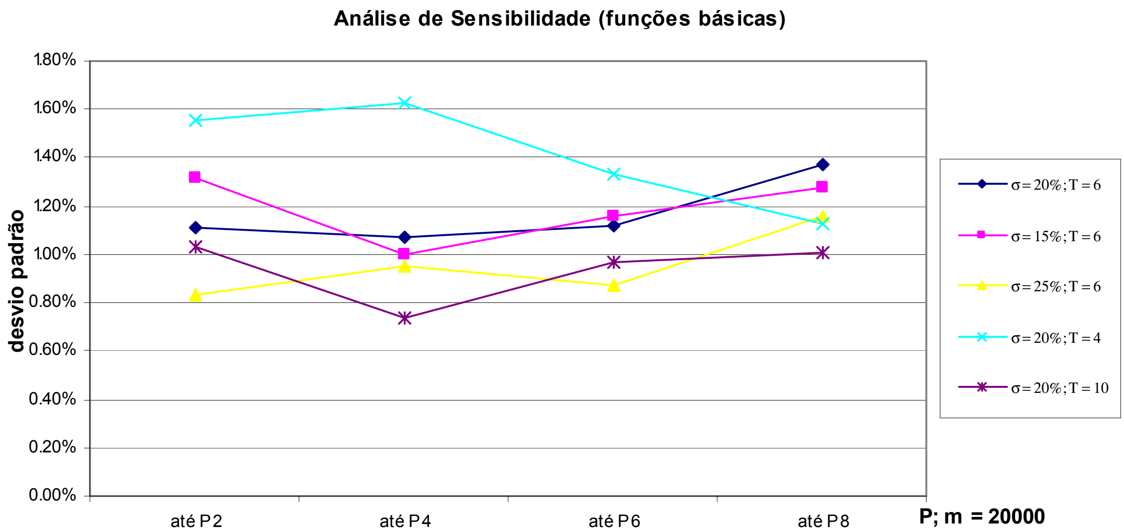

Figura 10: Desvio padrão da análise de sensibilidade do método LSM para exemplos de call americana. <u>Variável de análise:</u> grau do polinômio da regressão.

Agora, aplicaremos o método LSM para os mesmos exemplos, tratando-os como opções de venda. Os resultados obtidos para PUT americana são apresentados na tabela a seguir:

PUT Americana

Dados		Lattice	Least Square Monte Carlo (MÉDIA)				Least Square Monte Carlo (ERRO REL)			
			m = 20000				m = 20000			
σ	T	n = 1000	até P^2	até P^4	até P^6	até P^8	até P^2	até P^4	até P^6	até P^8
20%	6	108,4038	105,903	105,893	105,942	105,921	2,31%	2,32%	2,27%	2,29%
15%	6	87,9842	84,594	84,697	84,808	84,722	3,85%	3,74%	3,61%	3,71%
25%	6	132,0920	129,634	129,779	129,704	129,706	1,86%	1,75%	1,81%	1,81%
20%	4	104,9743	102,316	102,314	102,490	102,549	2,53%	2,53%	2,37%	2,31%
20%	10	111,3648	108,949	109,069	109,121	109,015	2,17%	2,06%	2,01%	2,11%

Dados		Lattice	Least Square Monte Carlo (DESV PAD)			
			m = 20000			
σ	T	n = 1000	até P^2	até P^4	até P^6	até P^8
20%	6	108,4038	0,37%	0,34%	0,34%	0,28%
15%	6	87,9842	0,29%	0,31%	0,31%	0,33%
25%	6	132,0920	0,32%	0,25%	0,45%	0,28%
20%	4	104,9743	0,35%	0,41%	0,25%	0,38%
20%	10	111,3648	0,43%	0,29%	0,29%	0,36%

Tabela 6: Análise de sensibilidade do método LSM para exemplos de put americana. Variável de análise: grau do polinômio da regressão.

Mais uma vez, os resultados não indicam uma maior precisão à medida que usamos mais termos na regressão. Os gráficos a seguir apresentam os dados referentes ao erro relativo e ao desvio padrão dos exemplos analisados:

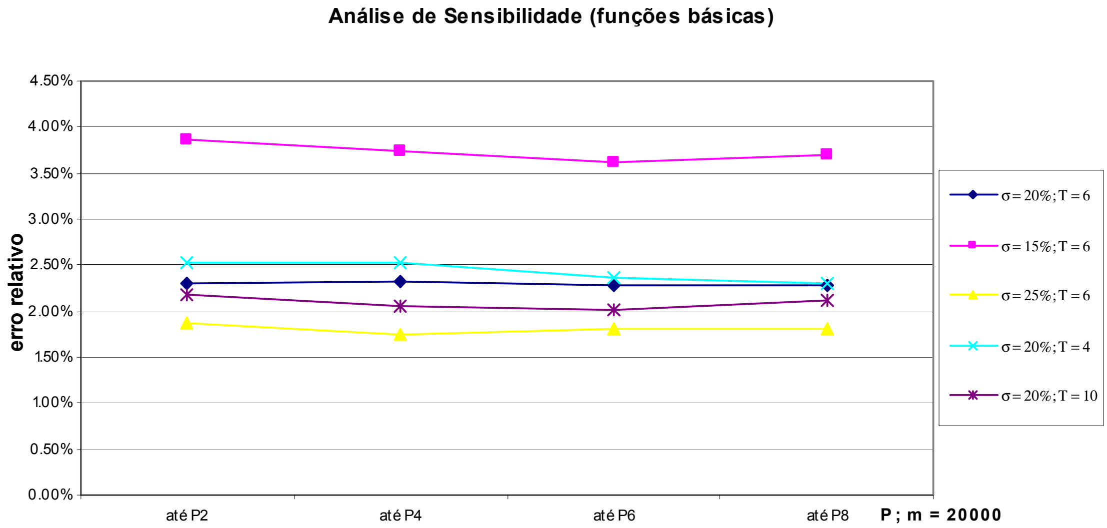

Figura 11: Erro relativo da análise de sensibilidade do método LSM para exemplos de put americana. Variável de análise: grau do polinômio da regressão.

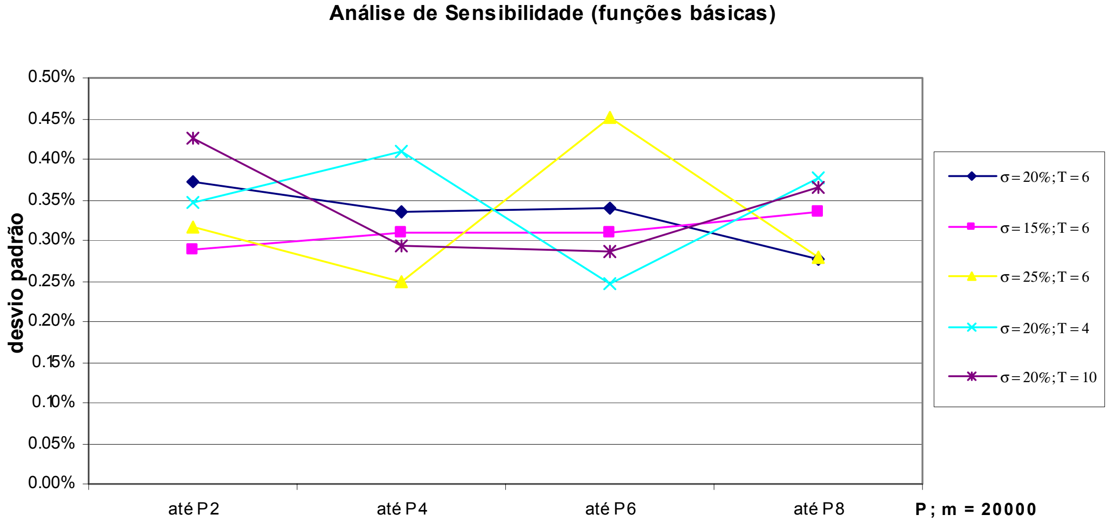

Figura 12: Desvio padrão da análise de sensibilidade do método LSM para exemplos de put americana. Variável de análise: grau do polinômio da regressão.

De certa forma, estes resultados eram esperados. Em seus estudos, Longstaff & Schwartz realizaram testes numéricos que indicavam que os resultados do algoritmo LSM eram pouco afetados pela escolha de funções básicas diferentes. Além disso, os autores também verificaram que poucas funções básicas são necessárias para fornecer uma boa aproximação da função de expectativas condicionadas.