

## Referências Bibliográficas

- [1] AIUBE, F. A. L. **Avaliação Econômica de Projetos Petrolíferos sob Condições de Incertezas de Preços e Reservas.** Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, 1995.
- [2] BAIDYA, T. K. N.; CASTRO, A. L. **Convergência dos Modelos de Árvores Binomiais para Avaliação de Opções.** Pesquisa Operacional, vol 21, 2001, pp. 17-30.
- [3] BATISTA, F. R. S. **Avaliação de Opções de Investimento em Projetos de Exploração e Produção de Petróleo por Meio da Fronteira de Exercício Ótimo da Opção.** Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, 2002.
- [4] BLACK, F.; SCHOLES, M. **The Pricing of Options and Corporate Liabilities.** Journal of political economy, LXXXI (1973), 637-654
- [5] BOYLE, P.P.; BROADIE, M.; GLASSERMAN, P. **Monte Carlo Methods for Security Pricing.** Monte Carlo methodologies and applications for pricing and risk management, 1998, Risk Books.
- [6] BRENNAN, M.J.; SCHWARTZ, E.S. **Evaluating Natural Resource Investment.** Journal of Business, vol.58, no 2, 1985, pp.135-157.
- [7] CORTAZAR, G.; SCHWARTZ, E.S.; CASASSUS, J. **Optimal Exploration Investments under Price and Geological-Technical Uncertainty: A Real Options Model.** R&D Management, vol.31, no 2, 2001, pp. 181-189.
- [8] COX, J.C.; ROSS, S.A.; RUBINSTEIN, M. **Option Pricing: a Simplified Approach.** Journal of Financial Economics, no 7, 1979, pp.229-263.
- [9] DAMODARAN, A. **The Promise and Peril of Real Options.** Stern School of Business.
- [10] DIAS, M. A. G. **Investimento sob Incerteza em Exploração e Produção de Petróleo.** Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, 1996.

- [11] DIAS, M. A. G. **Investment in Information in Petroleum, Real Options and Revelation**. Working Paper, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, 2002.
- [12] DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S. **Investment Under Uncertainty**. Princeton University Press, 1994.
- [13] FROTA, A. E. F. **Avaliação de Opções Americanas Tradicionais e Complexas**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, 2003.
- [14] GAMBA, A. **Real Options Valuation: a Monte Carlo Approach**. Working Paper Series 2002/03, Faculty of Management, University of Calgary.
- [15] GESKE, R. **The Valuation of Compound Options**. Journal of Financial Economics, no 7, 1979, pp.63-81.
- [16] HULL, J. C. **Options, Futures and Other Derivatives**. Prentice Hall, third edition, 1997.
- [17] HULL, J.C.; WHITE, A. **The Use of the Control Variable Technique in Option Pricing**. Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol.23, no 3, September, pp.237-251.
- [18] LONGSTAFF, F.A.; SCHWARTZ, E.S. **Valuing American Options By Simulation: A Simple Least-Square Approach**. Review of Financial Studies, vol.14, no 1, Spring 2001, pp.113-147.
- [19] MCDONALD, R.; SIEGEL, D. **Option Valuation When the Underlying Asset Earns a Below-equilibrium Return: a Note**. Journal of Finance 39 (1984), 261-266.
- [20] MYERS, S. **Using Simulation for Risk Analysis**. Modern Developments in Financial Management, New York, 1976.
- [21] PADDOCK, J.; SIEGEL, D.; SMITH, J. **Option Valuation of Claims on Real Assets: the Case of Offshore Petroleum Leases**. Quarterly Journal of Economics 103 (August 1988), pp479-508.
- [22] Site de opções reais <http://sphere.rdc.puc-rio.br/marco.ind>, último acesso em 10/01/2004.
- [23] TRIGEORGIS, L. **Valuing Real Investment Opportunities: an Options Approach to Strategic Capital Budgeting**. Tese de Doutorado, Harvard University, 1986.

## Apêndice A: Técnicas de Redução de Variância

### Variáveis Antitéticas

Esta é uma das técnicas mais usadas em finanças devido à sua simplicidade. Para explicar melhor a técnica, vamos considerar que desejamos fazer simulações de preços  $S_t$  para posteriormente avaliar uma opção sobre este ativo. Sendo a opção do tipo européia, as simulações de preço final  $S_T$  do ativo podem ser feitas da seguinte forma:

- Geração de  $N$  números aleatórios a partir de uma distribuição normal padronizada ( $Z_i$ );
- Cálculos dos  $N$  preços finais simulados, a partir da fórmula:

$$S_T^i = S_0 \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z_i\right], \quad i = 1, 2, \dots, N$$

O método das variáveis antitéticas se baseia na constatação de que, se  $Z_i$  tem uma distribuição normal padronizada, então  $-Z_i$  também terá. Assim, o preço  $S_T^i$  calculado com  $-Z_i$  no lugar de  $Z_i$  também é válido para determinar o preço da opção.

Portanto, a vantagem deste método é que, para gerar  $N$  simulações de preços  $S_T$ , será necessário gerar apenas  $N / 2$  números aleatórios a partir de uma distribuição normal padronizada.

### Variáveis de Controle

Esta técnica pode ser aplicada quando há dois ativos semelhantes, A e B: o ativo B tem solução analítica e deseja-se determinar o valor do ativo A. São realizadas em paralelo duas simulações usando a mesma raiz de números aleatórios e o mesmo  $\Delta t$ . A primeira é usada para obter uma estimativa  $\hat{f}_A$  do ativo A, enquanto a segunda é usada para obter uma estimativa  $\hat{f}_B$  do ativo B.

Feito isso, uma melhor estimativa  $f_A$  do valor de A é obtido a partir da seguinte fórmula:

$$f_A = \hat{f}_A - \hat{f}_B + f_B, \quad \text{onde } f_B \text{ é o verdadeiro valor de B.}$$

### Método Moment Matching

Esta técnica consiste em ajustar as simulações tomadas para uma distribuição normal padronizada de forma que o primeiro, segundo e possivelmente outros momentos sejam atingidos. Para fazer isso, tomamos N simulações  $\varepsilon_i$ , realizadas a partir de uma distribuição normal qualquer, calculamos sua média  $m$  e seu desvio padrão  $s$ , e então as ajustamos com a seguinte fórmula:

$$y_i = \frac{\varepsilon_i - m}{s} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

As simulações ajustadas terão agora média zero e desvio padrão igual a um. Esta transformação reduz o custo computacional, mas pode levar a problemas de memória, uma vez que cada amostra original precisa ser armazenada até o final da simulação. Esta técnica também é conhecida como *quadratic resampling*.

Além de transformar a amostra de simulações para obter momentos específicos, também se pode atingir este objetivo através da inclusão de pontos adicionais à amostra.

### Importance Sampling

Este método é mais facilmente entendido com um exemplo. Suponha que queremos calcular o preço de uma call *que está deep-out-of-the-money*, com preço de exercício  $X$ . Se realizarmos as simulações da maneira usual, em muitas trajetórias de preços o *payoff* da opção será nulo. Isso representa um custo computacional desnecessário, pois estas trajetórias pouco contribuem para a determinação do valor da call. O método consiste em escolher somente

trajetórias que sejam consideradas importantes, ou seja, trajetórias que levem a um preço da ação maior que  $X$ .

Seja  $F$  a função de distribuição de probabilidades para o preço da ação ( $P_T$ ) e  $k$  a probabilidade deste preço ser maior que  $X$  na data de vencimento ( $T$ ) da opção. Admitindo que  $k$  pode ser obtido analiticamente, podemos encontrar a distribuição de probabilidades de  $P_T$ , condicionada ao fato de que  $P_T$  seja maior que  $X$ , se tomarmos  $G = F / k$ . Feito isso, geramos os números aleatórios a partir da distribuição condicionada  $G$ , e estimamos o valor da opção a partir do *payoff* médio descontado a valor presente e multiplicado por  $k$ .

### Amostragem Estratificada

Esta técnica força certas probabilidades empíricas a atingir probabilidades teóricas, da mesma forma que *moment matching* conduz momentos empíricos a atingir momentos teóricos. Isto é obtido dividindo-se a distribuição de probabilidades em intervalos e realizando as simulações dentro de cada intervalo, de acordo com a sua probabilidade.

Considere, por exemplo, que se deseja gerar 100 números aleatórios a partir de uma determinada distribuição normal  $Z$ . A distribuição empírica de uma amostra independente  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{100}$  provavelmente não será muito parecida com a densidade normal. As caudas desta distribuição certamente serão subestimadas. A amostragem estratificada pode ser usada para garantir que, em cada percentil da distribuição de probabilidades, haja uma observação. A distribuição desta nova amostra será mais próxima de uma densidade normal. Se for usado um número de intervalos bastante elevado, pode-se trabalhar apenas com a média ou mediana de cada intervalo.

### Hipercubo Latino

A técnica da amostragem estratificada, vista anteriormente, pode ser aplicada em casos envolvendo várias dimensões. Porém, a dificuldade quando lidamos com muitas dimensões é que gerar uma amostra estratificada de tamanho  $n^d$ , onde  $d$  é o número de dimensões e  $n$  é o número de estratos em cada dimensão, será proibitivo a não ser que  $n$  seja pequeno. A amostragem por hipercubos latinos pode ser vista como uma maneira de selecionar aleatoriamente  $n$  pontos de uma amostra estratificada, preservando em parte a

regularidade da estratificação. O método aloca um valor para cada dimensão ao menos uma vez em cada estrato.

## Apêndice B: Formulação Matemática do Modelo de Paddock, Siegel & Smith

No equilíbrio, o retorno esperado da posse de uma reserva não-desenvolvida deve compensar o proprietário da reserva pelo seu custo de oportunidade. Sendo  $B_t$  o volume de petróleo numa reserva desenvolvida,  $V_t$  o valor unitário do petróleo e  $R_t$  o retorno instantâneo do proprietário da reserva (todas as variáveis no instante  $t$ ), podemos assumir que a taxa de retorno para o proprietário segue um MGB:

$$R_t dt / B_t V_t = \alpha_v^* dt + \sigma_v dz_v$$

onde  $\alpha_v^*$  é o retorno esperado pelo proprietário,  $\sigma_v$  é o desvio padrão da taxa de retorno e  $dz_v$  o incremento do processo de Wiener. O retorno  $R_t$  provém dos lucros com a produção e do ganho de capital devido às variações no preço de petróleo. Suponha que a produção de uma reserva desenvolvida apresente um declínio exponencial (suposição largamente usada pela indústria petrolífera como primeira estimativa para a curva de produção de novos campos):

$$dB_t = -\gamma B_t dt$$

O retorno do proprietário desta reserva é formado por dois componentes: os benefícios provenientes da produção (dividendos) e os benefícios devidos à valorização da reserva (ganho de capital). Para um intervalo  $dt$ , o retorno ( $R_t$ ) será dado pela seguinte equação:

$$R_t dt = \{\gamma B_t P_t dt\} + \{(1 - \gamma dt) B_t (V_t + dV_t) - B_t V_t\} = \gamma B_t P_t dt + B_t dV_t - \gamma B_t V_t dt$$

onde  $P_t$  é o lucro operacional por unidade de barril vendido. Substituindo na equação anterior, obtemos o processo para o valor de uma reserva desenvolvida em produção:

$$dV/V = (\alpha_v^* - \delta_t) dt + \sigma_v dz_v \quad (\text{Equação A})$$

onde  $\delta_t = \gamma [P_t - V_t] / V_t$  é a taxa de distribuição dos fluxos de caixa (*dividend yield*).

Fica claro que, no equilíbrio, nenhum agente irá manter uma reserva desenvolvida sem produzir, pois a taxa esperada de retorno de uma reserva desenvolvida sem produção ( $\alpha_v$ ) é menor do que a taxa de retorno exigida ( $\alpha_v^*$ ) para um ativo com risco  $\sigma_v dz_v$ .

Para determinar o valor de uma reserva não-desenvolvida ( $X(V,t)$ ), vamos assumir que  $\alpha_v^*$ ,  $\sigma_v$  e  $\delta_t$  são constantes ao longo do período de arredamento. Pelo Lema de Ito, sabemos que:

$$dX = X_v dV + \frac{1}{2} X_{vv} (dV)^2 + X_t dt \quad (\text{Equação B})$$

Elevando ao quadrado a equação A e desprezando os termos dt de ordem maior que 1, temos:

$$(dV)^2 = \sigma^2 V^2 dt$$

Substituindo este resultado na equação A, obtém-se:

$$dX = X_v dV + \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 X_{vv} dt + X_t dt$$

Utilizando-se o método dos ativos contingentes, podemos montar uma carteira sem risco ( $\Phi$ ) comprando (posição longa) uma opção ( $X$ ) e vendendo (posição curta)  $n$  unidades do ativo  $V$ . O valor de  $n$  varia ao longo do tempo de forma a tornar a carteira livre de risco. Pode-se provar facilmente que o valor de  $n$  é igual à derivada da opção em relação a  $V$ . No mercado financeiro,  $n$  é chamado de *delta*. Assim, a carteira vale:  $\Phi = X - n V = X - X_v V$ . Dessa forma, o retorno total da carteira será dado por:

$$r \Phi dt = r (X - X_v V) dt \quad (\text{Equação C})$$

Mas o retorno total é formado por duas parcelas:

- Posição longa:  $dX$
- Posição curta:  $X_v (\gamma P dt + dV - \gamma V dt)$
- Retorno da carteira =  $dX - X_v (\gamma P dt + dV - \gamma V dt)$  (Equação D)



Igualando as equações C e D, e substituindo o valor de  $dX$ , teremos:

$$r(X - X_V V) dt = \cancel{X_V dV} + \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 X_{VV} dt + X_t dt - X_V \gamma P dt - \cancel{X_V dV} + X_V \gamma V dt$$

Eliminando  $dt$  da equação acima, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 X_{VV} + (r - \delta) V X_V - rX + X_t = 0 \quad (\text{Equação E})$$

Esta equação é válida tanto para opções de compra (*call*) como de venda (*put*), tanto para opções do tipo européia, como do tipo americana. As condições de contorno é que determinarão o tipo de opção, sendo que a condição de suavidade só existe para a opção americana, que pode ser exercida antes da data de vencimento. Também deve ser ressaltado que, na ausência de dividendos ( $\delta = 0$ ), a equação E se reduz a clássica equação de Black & Scholes. As condições de contorno desta equação diferencial parcial (EDP) são:

- $X(0, t) = 0$ ;
- $X(V, 0) = \text{Max}[0, V - D]$ ;
- $X(V^*, t) = V^* - D$ , onde  $V^*$  representa a curva de gatilho do investimento.

A equação E não tem solução analítica e pode ser resolvida através de métodos numéricos, como o método das diferenças finitas. Entretanto, por ela ser usada no mercado financeiro e conseqüentemente ser muito estudada, existem diversas aproximações analíticas para a solução da equação, que são bem menos custosas em termos computacionais, além de não apresentar problemas típicos de métodos numéricos.

Para o caso de uma opção perpétua de investimento (não há tempo de vencimento dos direitos, ou ele é muito grande), como no caso de um monopólio estatal do petróleo, existe solução analítica. A EDP vira uma equação diferencial ordinária (EDO), pois  $F_t$  é nulo, e tem uma solução analítica, conforme mostrada no capítulo 5 do livro do Dixit & Pindyck. Essa solução é:

$$F = A V^{\beta_1}$$
$$V^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} D$$

Onde a constante  $A$  e a raiz positiva da equação característica  $\beta_1$  são dados por:

$$A = (V^* - D) / (V^*)^{\beta_1}$$
$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{(r - \delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left[ \frac{r - \delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right]^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}$$

## Apêndice C: Descrição Matemática do Modelo de Cortazar, Schwartz & Casassus

Para formalizar o modelo, definimos um fator de risco técnico-geológico  $G$  que segue um MGB com drift zero:

$$\frac{dG}{G} = \sigma_G dw_G$$

onde  $G$  é independente de  $S$  (preço da *commodity*). O valor da reserva  $H(S, G)$  pode então ser modelado como função de  $S$  e  $G$ . Agora, definimos uma nova variável de estado  $Z$ , e uma função de  $S$  e  $G$ , tal que

- $H(Z) = H(S, G)$
- $Z = F(S, G)$

Aplicando o lema de Ito, obtemos:

$$\frac{dZ}{Z} = \left( F_S S(r - c) + \frac{1}{2} F_{SS} S^2 \sigma_S^2 + \frac{1}{2} F_{GG} G^2 \sigma_G^2 \right) dt + F_S S \sigma_S dw_S + F_G G \sigma_G dw_G$$

O modelo pode ser simplificado se assumirmos que  $Z = SG$ . Isso equivale a assumir que uma variação em qualquer um dos fatores ( $S$  ou  $G$ ) provoca o mesmo efeito no valor da reserva ( $Z$ ). O processo desta nova variável de estado torna-se:

$$dZ = (r - c)dt + \sigma_S dw_S + \sigma_G dw_G$$

Assim,  $Z$  pode ser visto como o preço modificado da *commodity*, com o mesmo drift  $(r - c)$  e com volatilidade  $\sigma_Z = \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_G^2}$ .

Valor de uma reserva desenvolvida

Antes do início dos investimentos em exploração, há uma lista M de possíveis tipos de reserva que pode ocorrer. Cada um dos tipos de reserva é avaliado usando o modelo de Brennan & Schwartz (1985):

$$\max_{q_p^i} \left[ \frac{1}{2} V_{SS}^i S^2 \sigma_S^2 + (r - c) S V_S^i - q_p^i V_Q^i + q_p^i (S - a^i) - (r + \lambda) W^i \right] = 0$$

$$\frac{1}{2} W_{SS}^i S^2 \sigma_S^2 + (r - c) S W_S^i - m^i - (r + \lambda) W^i = 0$$

sujeito às condições de contorno:

- $W^i(S_0^*, Q) = 0$
- $V^i(S_1^*, Q) = \max[W^i(S_1^*, Q) - K_1^i, 0]$
- $W^i(S_2^*, Q) = V^i(S_2^*, Q) - K_2^i$
- $W_S^i(S_0^*, Q) = 0$
- $V_S^i(S_1^*, Q) = \begin{cases} W_S^i(S_1^*, Q) & \text{se } S \leq S_d^* \\ 0 & \text{se } S \geq S_d^* \end{cases}$
- $W_S^i(S_2^*, Q) = V_S^i(S_2^*, Q)$
- $V^i(S, 0) = 0$
- $W^i(S, 0) = 0$
- $V^i(0, Q) = 0$
- $W^i(0, Q) = 0$
- $\lim_{S \rightarrow \infty} V_{SS}^i(S, Q) = 0$
- $\lim_{S \rightarrow \infty} W_{SS}^i(S, Q) = 0$

onde:

$V^i$  = valor da reserva quando a decisão ótima é abrir

$W^i$  = valor da reserva quando a decisão ótima é fechar

$Q$  = volume da reserva

$q_p^i$  = taxa de produção da reserva  $i$

$S_0^{*i}$  = preço crítico abaixo do qual é ótimo abandonar a reserva

$S_1^{*i}$  = preço crítico abaixo do qual é ótimo fechar a reserva

$S_2^{*i}$  = preço crítico abaixo do qual é ótimo abrir a reserva

$K_1^i$  = custo de fechar a reserva  $i$

$K_2^i$  = custo de abrir a reserva  $i$

$m^i$  = custo anual de manter a reserva fechada

$\lambda$  = risco-país (ou probabilidade de expropriação)

### Valor de uma reserva não-desenvolvida

Assumindo que a decisão de realizar os investimentos em desenvolvimento já tenha sido tomada, e que tais investimentos estão em andamento, o valor da reserva deve satisfazer a seguinte equação:

$$\frac{1}{2}U_{SS}^i S^2 \sigma_S^2 + (r - c)SU_S^i - U_T^i - (r + \lambda)U^i = 0$$

sujeito às condições de contorno:

- $U^i(0, T) = 0$
- $\lim_{S \rightarrow \infty} U_{SS}^i(S, T) = 0$
- $U^i(S, 0) = V^i(S, Q)$

Sendo  $H$  o valor da reserva antes dos investimentos em desenvolvimento, temos:

$$\frac{1}{2}H_{SS}^i S^2 \sigma_S^2 + (r - c)SH_S^i - (r + \lambda)H^i = 0$$

sujeito as seguintes condições de contorno:

- $H^i(0) = 0$

- $H^i(S) = \begin{cases} H^i(S) \\ U^i(S, T_d^i) \end{cases}$

onde:

$I_d^i$  = investimento em desenvolvimento

$T_d^i$  = tempo do estágio de desenvolvimento (após o investimento ser realizado)

$S_d^{*i}$  = preço crítico abaixo do qual é ótimo investir

Uma vez que todas as reservas são avaliadas, pode-se obter o valor esperado da reserva através da multiplicação dos valores por suas probabilidades  $\alpha^i$ :

$$H(S) = \sum_{i=1}^M \alpha^i H^i(S)$$

### Valor de um projeto de exploração

Finalmente, vamos obter o valor de um projeto de exploração. Assumiremos que, enquanto o projeto está em andamento e os investimentos em exploração estão sendo realizados, o valor do projeto é X e, enquanto a decisão ótima é parar o projeto, seu valor é Y.

A solução é obtida para cada estágio j de exploração, através de um processo *backward*. As equações para um estágio intermediário qualquer são:

$$\max_{q_j^j} \left[ \frac{1}{2} X_{ZZ}^j Z^2 \sigma_Z^2 + (r - c) Z X_Z^j + q_i^j X_i^j - q_i^j - (r + \lambda + \gamma^j) X^j \right] = 0,$$

$$\frac{1}{2} Y_{ZZ}^j Z^2 \sigma_S^2 + (r - c) Z Y_Z^j - (r + \lambda) Y^j = 0$$

sujeito à:

- $X^j(0, I) = 0$
- $Y^j(0, I) = 0$

- $\lim_{Z \rightarrow \infty} X_{ZZ}^j(Z, I) = 0$
- $X^j(Z, I^j) = X^{j+1}(Z, 0)$  se  $Z \geq Z^{*j}$
- $Y^j(Z, I^j) = Y^{j+1}(Z, 0)$  se  $Z \leq Z^{*j}$

Para o último estágio, as duas últimas condições de contorno são trocadas por:

- $X^n(Z, I^n) = H(Z)$  se  $Z \geq Z^{*n}$
- $Y^n(Z, I^n) = H(Z)$  se  $Z \leq Z^{*n}$

onde:

$I$  = investimento acumulado em exploração em cada estágio

$q_i^j$  = taxa de investimento no estágio  $j$

$I^j$  = valor presente do investimento durante o estágio  $j$

$T^j$  = tempo de exploração no estágio  $j$

$p^j$  = probabilidade de sucesso no estágio  $j$

$Z^{*j}$  = preço crítico de investimento no estágio  $j$

$\gamma^j$  = probabilidade de Poisson de sucesso no estágio  $j$

## Apêndice D: Algoritmos Para Avaliação de Opções

### D.1. Avaliação de Call Americana Através do Método Binomial

```

% Dados de Entrada
r = 0.10; % taxa de juros livre de risco
P0 = 720; % preço inicial do ativo base
sigma = 0.2; % volatilidade
E = 800; % preço de exercício da opção
q = 0.05; % taxa de dividendos
alfa = r - q; % drift do MGB para o preço do petróleo
T = 10; % data de vencimento da opção
n = 1000; % numero de passos da arvore binomial

V1 = [];

% Calculos Intermediarios
dt = T/n;
u = exp(sigma*realsqrt(dt));
d = 1/u;
p = (exp(alfa*dt)-d)/(u-d);
fdesc = exp(-r*dt);

% Valor da Opcao de Expandir
j = n + 1;
for i = 1:j
% Definir a funcao de valor terminal da opcao
    V1(i,j) = max(P0 * u^(j-i) * d^(i-1) - E, 0);
end

j = n;
while j > 0
    for i = 1:j
% Definir a funcao de valoracao da opcao
        V1(i,j) = max ((p*V1(i,j+1)+(1-p)*V1(i+1,j+1))*fdesc,P0 * u^(j-i) * d^(i-1) - E);
    end
    j = j-1;
end

% Valor do Projeto

```



```
v_opcao = V1(1,1)
```

## D.2. Avaliação de Call Americana Através do Método LSM

```
% 1 - DADOS DE ENTRADA:
```

```
r = 0.10; % r = taxa de juro livre de risco
```

```
P0 = 720; % P0 = valor inicial do ativo base
```

```
sigma = 0.2; % sigma = volatilidade do valor do ativo
```

```
E = 800; % E = preço de exercício da opção
```

```
q = 0.05; % q = dividendos
```

```
alfa = r - q; % alfa = drift (tendencia) do valor do ativo
```

```
T = 6; % T = data de vencimento da opção
```

```
m = 5000; % m = numero de simulacoes
```

```
n = T; % n = numero de intervalos de tempo
```

```
m1 = m / 2;
```

```
VA = [];
```

```
v_opcao = [];
```

```
sim = 1
```

```
while sim <= 1 % Definir o numero de iteracoes do processo
```

```
% 2 - SIMULACOES DE PRECOS
```

```
LSM = zeros(m,n);
```

```
dt = T / n;
```

```
VA1 = randn(m1,n);
```

```
VA = [VA1; -VA1];
```

```
clear VA1
```

```
k1 = (alfa - ((sigma^2)/2))*dt;
```

```
k2 = sigma * realsqrt(dt);
```

```
LSM(:,1) = P0 * exp(k1 + k2 * VA(:,1));
```

```
for j = 2:n
```

```
LSM(:,j) = LSM(:,j-1) .* exp(k1 + k2 .* VA(:,j));
```

```
end
```

```
clear VA
```

```
% 3 - AVALIACAO DA OPCAO
```

```
D2 = [];
```

```
Dnovo = zeros(m,1);
```

```
% 3.1 - Definicao da matriz de fluxo de caixa
```

```
FC = max(LSM - E,0);
D2(:,n) = FC(:,n) > Dnovo;
```

```
c = n;
while c > 1
```

```
% 3.2 - Calculo do No. de simulacoes em que a opcao esta in-the-money em (c-1)
```

```
b = 0;
for d = 1:m
    if FC(d,c-1) > 0
        b = b+1;
    end
end
P = zeros(b,1);
M = zeros(b,1);
N = zeros(b,1);
b = 0;
```

```
% 3.3 - Determinacao de N e M
```

```
% N = valor de exercicio imediato das simulacoes in-the-money em (c-1)
```

```
% M = valor de continuacao das simulacoes in-the-money em (c-1)
```

```
for x = 1:m
    if FC(x,c-1) > 0
        b = b + 1;
        P(b,1) = LSM(x,c-1);
        N(b,1) = FC(x,c-1);
        h = 0;
        for g = c:n
            h = h + 1;
            if D2(x,g) == 1
                M(b,1) = FC(x,g) * exp(-r*dt*h);
            end
        end
    end
end
end
```

```
% 3.5 - Regressao linear de M com relacao a potencias de P
```

```
% Yhat = valor esperado de continuacao, dado pela regressao
```

```
% [p,s]=polyfit(P,M,8);
% Yhat=polyval(p,P);
[p,s,mu]=polyfit(P,M,8);
Yhat=polyval(p,P,[],mu);
```

```
% 3.6 - Atualizacao da matriz de decisoes (D2)
```

```
% Correcao do valor da opcao (V2)
```

```
b = 0;
```

```

for x = 1:m
    if FC(x,c-1) > 0
        b = b + 1;
        if N(b,1) >= Yhat (b,1)
            D2(x,c-1) = 1;
            for g = c:n
                D2(x,g) = 0;
            end
        end
    end
end
end
end
c = c - 1;
end

```

% 3.7 - Calculo do valor da opção

```

for x = 1:m
for y = 1:n
    if D2(x,y) == 0
        FC(x,y) = 0;
    end
end
end

V = zeros(m,1);
for y = 1:n
    V(:,1) = V(:,1) + FC(:,y) * exp(-r*y*dt);
end
v_opcao(sim,1) = sum(V) / m;
sim = sim + 1
end
v_opcao(sim,1) = mean(v_opcao);
v_opcao(sim+1,1) = std(v_opcao);
v_opcao

```

### D.3. Avaliação de Put Americana Através do Método Binomial

```

% Dados de Entrada
r = 0.10; % taxa de juro livre de risco
P0 = 720; % preço inicial do ativo base
sigma = 0.2; % volatilidade do preço do ativo
E = 800; % preço de exercício da opção
q = 0.05; % taxa de dividendos
alfa = r - q; % drift (tendencia) do preço do ativo
T = 10; % data de vencimento da opção
n = 1000; % numero de passos da arvore binomial

```

```

V1 = [];

% Calculos Intermediarios
dt = T/n;
u = exp(sigma*realsqrt(dt));
d = 1/u;
p = (exp(alfa*dt)-d)/(u-d);
fdesc = exp(-r*dt);

% Valor da Opção
j = n + 1;
for i = 1:j
% Definir a funcao de valor terminal da opcao
    V1(i,j) = max(E - P0 * u^(j-i) * d^(i-1), 0);
end

j = n;
while j > 0
    for i = 1:j
% Definir a funcao de valoracao da opcao
        V1(i,j) = max ((p*V1(i,j+1)+(1-p)*V1(i+1,j+1))*fdesc,E - P0 * u^(j-i) * d^(i-1));
    end
    j = j-1;
end

% Valor do Projeto

v_opcao = V1(1,1)

```

#### D.4. Avaliação de Put Americana Através do Método LSM

```

% 1 - DADOS DE ENTRADA:
r = 0.10; % r = taxa de juro livre de risco
P0 = 720; % P0 = valor inicial do ativo
sigma = 0.15; % sigma = volatilidade do valor do ativo (desvio padrao)
E = 800; % preço de exercício da opção
q = 0.05; % q = dividendos
alfa = r - q; % alfa = drift (tendencia) do valor do ativo
T = 6; % T = data de vencimento da opção
m = 20000; % m = numero de simulacoes
n = T; % n = numero de intervalos de tempo

m1 = m / 2;

```

```

VA = [];

v_opcao = [];
sim = 1
while sim <= 20 % Definir o numero de iteracoes do processo

% 2 - SIMULACOES DE PRECOS
LSM = zeros(m,n);
    dt = T / n;
    VA1 = randn(m1,n);
    VA = [VA1; -VA1];

clear VA1

    k1 = (alfa-((sigma^2)/2))*dt;
    k2 = sigma * realsqrt(dt);
    LSM(:,1) = P0 * exp(k1 + k2 * VA(:,1));
    for j = 2:n
        LSM(:,j) = LSM(:,j-1).* exp(k1 + k2.* VA(:,j));
    end

clear VA

% 3 - AVALIACAO DA OPCAO DE EXPANDIR
D2 = [];
Dnovo = zeros(m,1);
% 3.1 - Definicao da matriz de fluxo de caixa
FC = max(E - LSM,0);
D2(:,n) = FC(:,n) > Dnovo;

c = n;
while c > 1
% 3.2 - Calculo do No. de simulacoes em que a opcao esta in-the-money em (c-1)
b = 0;
for d = 1:m
    if FC(d,c-1) > 0
        b = b+1;
    end
end
P = zeros(b,1);
M = zeros(b,1);
N = zeros(b,1);
b = 0;

% 3.3 - Determinacao de N e M

```

% N = valor de exercicio imediato das simulacoes in-the-money em (c-1)

% M = valor de continuacao das simulacoes in-the-money em (c-1)

```

for x = 1:m
    if FC(x,c-1) > 0
        b = b + 1;
        P(b,1) = LSM(x,c-1);
        N(b,1) = FC(x,c-1);
        h = 0;
        for g = c:n
            h = h + 1;
            if D2(x,g) == 1
                M(b,1) = FC(x,g) * exp(-r*dt*h);
            end
        end
    end
end
end
end

```

% 3.5 - Regressao linear de M com relacao a potencias de P

% Yhat = valor esperado de continuacao, dado pela regressao

```
% [p,s]=polyfit(P,M,8);
```

```
% Yhat=polyval(p,P);
```

```
[p,s,mu]=polyfit(P,M,4);
```

```
Yhat=polyval(p,P,[],mu);
```

% 3.6 - Atualizacao da matriz de decisoes (D2)

% Correcao do valor da opcao (V2)

```

b = 0;
for x = 1:m
    if FC(x,c-1) > 0
        b = b + 1;
        if N(b,1) >= Yhat (b,1)
            D2(x,c-1) = 1;
            for g = c:n
                D2(x,g) = 0;
            end
        end
    end
end
end
end
c = c - 1;
end

```

% 3.7 - Calculo do valor do projeto

```

for x = 1:m
for y = 1:n
    if D2(x,y) == 0

```

```

        FC(x,y) = 0;
    end
end
end

    V = zeros(m,1);
    for y = 1:n
        V(:,1) = V(:,1) + FC(:,y) * exp(-r*y*dt);
    end
    v_opcao(sim,1) = sum(V) / m;
    sim = sim + 1
end
v_opcao(sim,1) = mean(v_opcao);
v_opcao(sim+1,1) = std(v_opcao);
v_opcao

```

## D.5. Avaliação do Projeto A Através do Método Binomial

```

% Dados de Entrada
r = 0.10; % taxa de juros livre de risco
P0 = 18; % preço inicial do petroleo
sigma = 0.2; % volatilidade
c_unit = 5; % c_unit = custo unitario de extracao de petroleo
q = 0.05; % taxa de dividendos
alfa = r - q; % drift (tendencia)
Q = 0.20; % Q = qualidade economica da reserva (VÁLIDO PARA O CENÁRIO 1)
B = 100; % B = volume da reserva (VÁLIDO PARA O CENÁRIO 1)
t2 = 10; % data de vencimento da opção americana de expansão
t1 = t2 / 2; % data de vencimento da opção europeia de expansão
n = 500; % numero de passos
V1 = [];

Q = random('Uniform',0.18,0.22,1,1); % VÁLIDO PARA O CENÁRIO 3
B = random('Uniform',150,250,1,1); % VÁLIDO PARA OS CENÁRIOS 2 E 3
V0 = P0 * Q * B; % V0 = valor inicial do projeto
inv = c_unit * B; % inv = investimento para expandir o projeto

% Calculos Intermediarios
dt = t2/n;
u = exp(sigma*realsqrt(dt));
d = 1/u;
p = (exp(alfa*dt)-d)/(u-d);
fdesc = exp(-r*dt);

% Valor da Opcao de Expandir

```

```

j = n + 1;
for i = 1:j
% Definir a funcao de valor terminal da opcao
  V1(i,j) = max(V0 * u^(j-i) * d^(i-1) - inv, 0);
end

j = n;
while j >= t1/dt + 1
  for i = 1:j
% Definir a funcao de valoracao da opcao
    V1(i,j) = max ((p*V1(i,j+1)+(1-p)*V1(i+1,j+1))*fdesc,V0 * u^(j-i) * d^(i-1) - inv);
  end
  j = j-1;
end

% Valor do Projeto

j = t1 / dt;
while j > 0
  for i = 1:j
% Definir a funcao de valoracao da opcao
    V1(i,j) = (p*V1(i,j+1)+(1-p)*V1(i+1,j+1))*fdesc;
  end
  j = j-1
end

v_opcao = V1(1,1)

```

## D.6. Avaliação do Projeto A Através do Método LSM

```

% 1 - DADOS DE ENTRADA:
r = 0.10; % r = taxa de juro livre de risco
P0 = 18; % s0 = valor inicial do ativo
sigma = 0.2; % sigma = volatilidade do valor do ativo (desvio padrao)
c_unit = 5; % c_unit = custo unitario de extracao de petroleo
q = 0.05; % q = dividendos
alfa = r - q; % alfa = drift (tendencia) do valor do ativo
Q = 0.2; % Q = qualidade economica da reserva (VÁLIDO PARA O CENARIO 1)
B = 200; % B = volume da reserva (VÁLIDO PARA O CENARIO 1)
t2 = 10; % data de vencimento da opção americana de expansão
t1 = t2 / 2; % data de vencimento da opção europeia de expansão
m = 50000; % m = numero de simulacoes
n = 6 * t2; % n = numero de intervalos de tempo

```



```

m1 = m / 2;
VA = [];

v_opcao = [];
sim = 1
while sim <= 40 % Definir o numero de iteracoes do processo

% 2 - SIMULACOES DE PRECOS

LSM = zeros(m,n);

Q = random('Uniform',0.18,0.22,1,1); % VÁLIDO PARA O CENARIO 3
B = random('Uniform',150,250,1,1); % VÁLIDO PARA OS CENARIOS 2 E 3
V0 = P0 * Q * B;
inv = c_unit * B;

    dt = t2 / n;
    VA1 = randn(m1,n);
    VA = [VA1; -VA1];

clear VA1

    k1 = (alfa-((sigma^2)/2))*dt;
    k2 = sigma * realsqrt(dt);
    LSM(:,1) = V0 * exp(k1 + k2 * VA(:,1));
        for j = 2:n
            LSM(:,j) = LSM(:,j-1).* exp(k1 + k2.* VA(:,j));
        end

clear VA

% 3 - AVALIACAO DA OPCAO DE EXPANDIR
    D2 = [];
    Dnovo = zeros(m,1);
% 3.1 - Definicao da matriz de fluxo de caixa
    FC = max(LSM - inv,0);
    D2(:,n) = FC(:,n) > Dnovo;

    c = n;
    cc = t1/dt;
        while c > cc
% 3.2 - Calculo do No. de simulacoes em que a opcao esta in-the-money em (c-1)
            b = 0;
            for d = 1:m
                if FC(d,c-1) > 0

```

```

        b = b+1;
    end
end
P = zeros(b,1);
M = zeros(b,1);
N = zeros(b,1);
b = 0;

```

% 3.3 - Determinacao de N e M

% N = valor de exercicio imediato das simulacoes in-the-money em (c-1)

% M = valor de continuacao das simulacoes in-the-money em (c-1)

```

for x = 1:m
    if FC(x,c-1) > 0
        b = b + 1;
        P(b,1) = LSM(x,c-1);
        N(b,1) = FC(x,c-1);
        h = 0;
        for g = c:n
            h = h + 1;
            if D2(x,g) == 1
                M(b,1) = FC(x,g) * exp(-r*dt*h);
            end
        end
    end
end
end
end

```

% 3.5 - Regressao linear de M com relacao a potencias de P

% Yhat = valor esperado de continuacao, dado pela regressao

```

% [p,s]=polyfit(P,M,8);
% Yhat=polyval(p,P);
[p,s,mu]=polyfit(P,M,8);
Yhat=polyval(p,P,[],mu);

```

% 3.6 - Atualizacao da matriz de decisoes (D2)

% Correcao do valor da opcao (V2)

```

b = 0;
for x = 1:m
    if FC(x,c-1) > 0
        b = b + 1;
        if N(b,1) >= Yhat (b,1)
            D2(x,c-1) = 1;
            for g = c:n
                D2(x,g) = 0;
            end
        end
    end
end
end

```

```

        end
    end
    c = c - 1;
    end

% 3.7 - Calculo do valor do projeto
    for x = 1:m
        for y = 1:n
            if D2(x,y) == 0
                FC(x,y) = 0;
            end
        end
    end

    V = zeros(m,1);
    for y = 1:n
        V(:,1) = V(:,1) + FC(:,y) * exp(-r*y*dt);
    end
    v_opcao(sim,1) = sum(V) / m
    sim = sim + 1
end
v_opcao(sim,1) = mean(v_opcao);
v_opcao(sim+1,1) = std(v_opcao);
v_opcao

```

## D.7. Avaliação do Projeto B Através do Método Binomial

```

% DADOS DE ENTRADA
r = 0.1; % taxa de juros livre de risco
P0 = 18; % preço inicial do petróleo
sigma = 0.2; % Volatilidade
c_unit = 5; % custo unitário de investimento inicial
v_resg = 4; % valor de resgate do investimento inicial
q = 0.05; % Dividendos
alfa = r - q; % drift (tendência)
Q = 0.2; % Q = qualidade economica da reserva (VALIDO PARA O CENARIO 1)
B = 200; % B = volume da reserva (VALIDO PARA O CENARIO 1)
k = 0.5; % fator de redução de escala do projeto
t2 = 10; % data de vencimento da opção de redução
t1 = t2 / 2; % data de vencimento da opção de espera
n = 500; % numero de passos da arvore binomial
V1 = [];
V2 = [];

v_opcao = [];

```

```

sim = 1
while sim <= 40 % Definir o numero de iteracoes do processo

% Calculos Intermediarios

Q = random('Uniform',0.18,0.22,1,1); % VALIDO PARA O CENARIO 3
B = random('Uniform',150,250,1,1); % VALIDO PARA OS CENARIOS 2 E 3
V0 = P0 * Q * B;
inv = c_unit * B;
X = k * v_resg * B;

dt = t2/n;
u = exp(sigma*realsqrt(dt));
d = 1/u;
p = (exp(alfa*dt)-d)/(u-d);
fdesc = exp(-r*dt);

% VALOR DA 2a. OPCAO DE REDUZIR
j = n + 1;
for i = 1:j
% Definir a funcao de valor terminal da opcao
    V2(i,j) = max(X - k * V0 * u^(j-i) * d^(i-1), 0);
end

j = n;
while j >= t1/dt + 1
    for i = 1:j
% Definir a funcao de valoracao da opcao
        V2(i,j) = max ((p*V2(i,j+1)+(1-p)*V2(i+1,j+1))*fdesc,X - k * V0 * u^(j-i) * d^(i-1));
    end
    j = j-1;
end

while j > 0
    for i = 1:j
        V2(i,j) = max ((p*V2(i,j+1)+(1-p)*V2(i+1,j+1))*fdesc,0);
    end
    j = j-1;
end

% VALOR DO PROJETO

j = t1 / dt + 1;
for i = 1:j
% Definir a funcao de valor terminal da opcao

```

```

    V1(i,j) = max(V0 * u^(j-i) * d^(i-1) - inv + V2(i,j), 0);
end

j = j - 1;
while j > 0
    for i = 1:j
        % Definir a funcao de valoracao da opcao
        % V1(i,j) = max ((p*V1(i,j+1)+(1-p)*V1(i+1,j+1))*fdesc,s0 * u^(j-i) * d^(i-1) - inv);
        V1(i,j) = max ((p*V1(i,j+1)+(1-p)*V1(i+1,j+1))*fdesc,V0 * u^(j-i) * d^(i-1) - inv + V2(i,j));
    end
    j = j-1;
end

    v_opcao(sim,1) = V1(1,1);
    sim = sim + 1
end
v_opcao(sim,1) = mean(v_opcao);
v_opcao(sim+1,1) = std(v_opcao);
v_opcao

```

## D.8. Avaliação do Projeto B Através do Método LSM

```

% DADOS DE ENTRADA
r = 0.1; % taxa de juros livre de risco
P0 = 18; % preço inicial do petróleo
sigma = 0.2; % volatilidade
c_unit = 5; % c_unit = custo unitario de produção de petroleo
v_resg = 4; % valor de resgate do investimento inicial
q = 0.05; % dividendos
alfa = r - q; % drift (tendência)
Q = 0.2; % Q = qualidade economica da reserva (VALIDO PARA O CENARIO 1)
B = 200; % B = volume da reserva (VALIDO PARA O CENARIO 1)
k = 0.5; % fator de redução de escala do projeto
t2 = 10; % data de vencimento da opção de redução
t1 = t2 / 2; % data de vencimento da opção de espera
m = 50000; % numero de trajetórias de preço
n = t2; % numero de intervalos de tempo

m1 = m / 2;
VA = [];

v_opcao = [];
sim = 1
while sim <= 40

```

```

LSM = zeros(m,n);

Q = random('Uniform',0.18,0.22,1,1); % VALIDO PARA O CENARIO 3
B = random('Uniform',150,250,1,1); % VALIDO PARA O CENARIOS 2 E 3
V0 = P0 * Q * B;
inv = c_unit * B;
X = k * v_resg * B;

dt = t2 / n;
VA1 = randn(m1,n);
VA = [VA1; -VA1];

clear VA1

k1 = (alfa-((sigma^2)/2))*dt;
k2 = sigma * realsqrt(dt);
LSM(:,1) = V0 * exp(k1 + k2 * VA(:,1));
    for j = 2:n
        LSM(:,j) = LSM(:,j-1).* exp(k1 + k2.* VA(:,j));
    end

clear VA

% AVALIACAO DA OPCAO DE CONTRAIR
D2 = [];
Dnovo = zeros(m,1);
FC = max(X - k*LSM,0);

V2 = zeros(m,n);
V2(:,n) = FC(:,n);

D2(:,n) = FC(:,n) > Dnovo;
c = n;
cc = t1/dt;
while c > cc
    b = 0;
    for d = 1:m
        if FC(d,c-1) > 0
            b = b+1;
        end
    end
end
P = zeros(b,1);
M = zeros(b,1);

```

```

N = zeros(b,1);
b = 0;

lmed = FC(:,c-1);
Cont = zeros(m,1);
for x = 1:m
    h = 0;
    for g = c:n
        h = h + 1;
        if D2(x,g) == 1
            Cont(x,1) = FC(x,g) * exp(-r*dt*h);
        end
    end
end
V2(:,c-1) = max(lmed,Cont);

for x = 1:m
    if FC(x,c-1) > 0
        b = b + 1;
        P(b,1) = LSM(x,c-1);
        N(b,1) = FC(x,c-1);
        h = 0;
        for g = c:n
            h = h + 1;
            if D2(x,g) == 1
                M(b,1) = FC(x,g) * exp(-r*dt*h);
            end
        end
    end
end

[p,s,mu]=polyfit(P,M,8);
Yhat=polyval(p,P,[],mu);

b = 0;
for x = 1:m
    if FC(x,c-1) > 0
        b = b + 1;
        if N(b,1) >= Yhat (b,1)
            D2(x,c-1) = 1;
            V2(x,c-1) = N(b,1);
            for g = c:n
                D2(x,g) = 0;
            end
        end
    end
end

```

```

else
    V2(x,c-1) = Yhat(b,1);
end
end
end
c = c - 1;
end

```

```
% AVALIACAO DO PROJETO
```

```

cc = t1 / dt;
D1 = [];
FC = zeros(m, cc);
for g = 1:cc
    FC(:,g) = max(LSM(:,g) - inv + V2(:,g),0);
end

```

```

D1(:,cc) = FC(:,cc) > Dnovo;
c = t1 / dt;
while c > 1
    b = 0;
    for d = 1:m
        if FC(d,c-1) > 0
            b = b+1;
        end
    end
    P = zeros(b,1);
    x1 = zeros(b,1);
    M = zeros(b,1);
    N = zeros(b,1);
    b = 0;

    for x = 1:m
        if FC(x,c-1) > 0
            b = b + 1;
            P(b,1) = LSM(x,c-1);
            x1(b,1) = V2(x,c-1);
            N(b,1) = FC(x,c-1);
            h = 0;
            for g = c:cc
                h = h + 1;
                if D1(x,g) == 1
                    M(b,1) = FC(x,g) * exp(-r*dt*h);
                end
            end
        end
    end
end
end

```



```

end

[p,s,mu]=polyfit(P+x1,M,8);
Yhat=polyval(p,P+x1,[],mu);

b = 0;
for x = 1:m
    if FC(x,c-1) > 0
        b = b + 1;
        if N(b,1) >= Yhat (b,1)
            D1(x,c-1) = 1;
            for g = c:cc
                D1(x,g) = 0;
            end
        end
    end
end
end
c = c - 1;
end

for x = 1:m
for y = 1:cc
    if D1(x,y) == 0
        FC(x,y) = 0;
    end
end
end

V = zeros(m,1);
for y = 1:cc
V(:,1) = V(:,1) + FC(:,y) * exp(-r*y*dt);
end
v_opcao(sim,1) = sum(V) / m;
sim = sim + 1
end

v_opcao(sim,1) = mean(v_opcao);
v_opcao(sim+1,1) = std(v_opcao);
v_opcao

```