3
TEORIA DOS JOGOS EVOLUTIVOS

Na teoria, os refinamentos provaram ser muito úteis para eliminar resultados inadequados do jogo. Entretanto, esta teoria também tem suas desvantagens. Não somente foram desenvolvidos muitos conceitos de refinamentos diferentes, mas a teoria também assume que os jogadores estão agindo de acordo com um alto nível de racionalidade. Os teóricos propuseram tantas definições diferentes para racionalidade, que o conjunto dos refinamentos de equilíbrio de Nash disponíveis, tornou-se embaraçosamente grande. Eventualmente, quase qualquer equilíbrio de Nash poderia ser justificado em termos de algum refinamento.

Como conseqüência disto, um novo período de desilusão com a teoria dos jogos parecia inevitável até os anos 80. Felizmente naquela época apareceu uma nova abordagem. O livro "*Evolução e teoria dos jogos*" de Maynard Smith direcionou a atenção dos teóricos para longe de suas progressivas elaborações das definições de racionalidade. Afinal de contas, como foi escrito por Ken Binmore no prefácio da monografia "*Teoria dos Jogos Evolutivos*" de Jörgen W. Weibull, insetos não pensam em tudo, e assim a racionalidade não pode ser tão crucial se a teoria dos jogos consegue de alguma maneira predizer seus comportamentos. Os anos 90 viram assim, o afastamento das tentativas para modelar ao agentes como jogadores hiper racionais.

Isto traz a pergunta sobre o quê se pode aprender da teoria dos jogos evolutivos introduzida por biólogos, no estudo da evolução de populações e do comportamento individual de seus membros. Onde a teoria dos jogos evolutivos pode nos levar e onde ela pode ser aplicada?

Teoria dos jogos evolutivos foi originada do artigo "*The logic of animal conflict*" de Maynard Smith and Price [Ref: 17]. Maynard Smith considerou uma população na qual seus membros são aleatoriamente dispostos em pares para jogar um jogo bimatricial, ou seja, com dois jogadores.

Os jogadores são anônimos, isto é, qualquer par de jogadores joga o mesmo jogo bimatricial simétrico e são idênticos com respeito aos conjuntos de estratégias e funções de *payoff*.

Assim, para qualquer membro da população, m é o número de estratégias puras e Δ o poliedro de estratégias mistas. Considere também a função de *payoff* $u:\Theta \to IR^2$ que associa um perfil de estratégias mistas $x \in \Theta$ a um par $(\mu_1(x),\mu_2(x))^T$. A assumida simetria do jogo bimatricial, implica em $B^T = A$ e determina que $\mu_1(x,y) = \mu_2(y,x)$ para qualquer par $(x,y) \in \Theta$, isto é, diz que o *payoff* do primeiro jogador quando ele joga $x \in \Delta$ e o seu oponente joga $y \in \Delta$ é igual ao *payoff* do segundo jogador quando ele joga $y \in \Delta$ e o primeiro joga $x \in \Delta$. Assim qualquer par joga um jogo simétrico $G = (A, A^T)$, com A sendo a matriz de *payoff* $m \times m$. Observe que não é assumido que a matriz A seja simétrica. A seguir denotamos $v(x,y) = \mu_1(x,y) = \mu_2(y,x) = x^TAy$ como o *payoff* de um jogador jogando $x \in \Delta$ contra um oponente jogando $y \in \Delta$. Deste modo todos os membros da população são simétricos, exceto na escolha da estratégia.

Na teoria dos jogos evolutivos não é assumido que membros das populações se comportem racionalmente. Ao invés disto é assumido que qualquer membro é pré-programado com uma estratégia herdada, pura ou mista, e que essa estratégia é fixa para a vida toda. Sendo $x \in \Delta$ o vetor freqüências relativas com a qual as estratégias são jogadas pelos membros da população, x_{jh} é a probabilidade ou freqüência relativa com que qualquer membro da população j joga a estratégia h do conjunto de estratégias puras. Assumindo que a população é muito grande, os incrementos entre as freqüências relativas das estratégias apresentadas pelos diferentes membros são desprezíveis ($1/m$ onde m os número de estratégias da população) e o *payoff* esperado de um membro escolhido emparelhado aleatoriamente com um dos outros membros da população é dado por $v(x,x) = x^TAx$. Entretanto, suponha agora que uma perturbação da população ocorre e que uma pequena fração ε (no mínimo $1/m$) da população é recolocada por indivíduos que irão jogar a então chamada estratégia mutante q. O *payoff* em uma partida nesta população bimórfica é o mesmo que numa partida contra um indivíduo que joga a estratégia mista $y = (1-\varepsilon)x + \varepsilon q \in \Delta$.

O *payoff* médio para um indivíduo que joga a estratégia x contra uma população bimórfica é $(1-\varepsilon)v(x,x)+\varepsilon v(x,q)$, desenvolvendo temos:

$$(1-\varepsilon)x\mathbf{A}x+\varepsilon x\mathbf{A}q = x\mathbf{A}[(1-\varepsilon)x+\varepsilon q]=xAy = v(x,y)$$

Conseqüentemente o *payoff* da estratégia original x após a entrada da estratégia mutante q é $v(x,y)$ e o da estratégia mutante é $v(q,y)$.

$$v(x,y) = x^T A[(1-\varepsilon)x+\varepsilon q] = (1-\varepsilon)v(x,x)+\varepsilon v(x,q) \qquad \textbf{Equação 3-1}$$

O *payoff* esperado de um indivíduo mutante torna-se,

$$v(q,y) = q^T A[(1-\varepsilon)x+\varepsilon q] = (1-\varepsilon)v(q,x)+\varepsilon v(q,q) \qquad \textbf{Equação 3-2}$$

A estratégia original é dita evolutiva estável, se após sua população ter sido invadida até um certo nível ε por uma estratégia mutante, conseguir obter um *payoff* maior do que o desta estratégia mutante, isto é, se $v(x,[(1-\varepsilon)x+\varepsilon q]) > v(q,[(1-\varepsilon)x+\varepsilon q])$

Ou seja, uma população é dita ser estável contra mutantes, se para todo $q \neq x$ existe um $\varepsilon(q) > 0$ tal que,

$$\forall\ 0 < \varepsilon < \varepsilon(q),\ v(x,y) > v(q,y) \qquad \textbf{Equação 3-3}$$

onde $y = (1-\varepsilon)x + \varepsilon q$.

O raciocínio acima permite vários pontos de vista.

Originalmente a condição de estabilidade foi aplicada somente em populações monomórficas, isto é, populações nas quais todos os indivíduos são dotados da mesma estratégia x_j. A freqüência x_{jk} é a probabilidade com a qual qualquer membro j da população joga a estratégia pura k. Assim qualquer indivíduo original joga x_j e conseqüentemente o *payoff* esperado destes indivíduos é igual à média ponderada dos *payoffs*.

Assim, uma estratégia x_j satisfazendo a Equação 3-3 para qualquer $q \neq x$, com algum $\varepsilon(q) > 0$, é chamada de Estratégia Evolutiva Estável (EEE ou *ESS* em inglês) e é o conceito central de equilíbrio na teoria dos jogos evolutiva sobre populações monomórficas.

O critério da estabilidade evolutiva é uma generalização que translada a noção de sobrevivência de Darwin, da aptidão num ambiente exógeno para um ambiente estratégico onde a aptidão de um comportamento (estratégia) depende do comportamento (estratégias) dos outros. Porém, do mesmo modo como acontece com o equilíbrio de Nash, a propriedade da estabilidade evolutiva não explica como a população chega a tal estratégia, em vez disso ela pergunta se tal estratégia é robusta a uma certa pressão evolutiva. Na verdade a estabilidade evolutiva é um teste de robustez contra uma única mutação de cada vez. Assim, as mutações devem ser raras, para que a população tenha tempo de se reajustar à situação original antes que a próxima mutação aconteça. Ao contrário de sua instância biológica, a estabilidade evolutiva também providencia um relevante critério de robustez numa gama de situações, incluindo a área econômica.

Em ambientes econômicos ou sociais uma EEE requer que qualquer grupo pequeno de indivíduos que tente uma estratégia alternativa, tenha um pior desempenho do que aqueles indivíduos que aderiram à estratégia original.

De outro ponto de vista, a condição de estabilidade pode também ser aplicada a uma população polimórfica, na qual, cada membro é pré-programado com uma de suas estratégias puras. Neste trabalho, a freqüência x_{jk} é a fração dos membros pré-programados com a pura estratégia *k.* Casos intermediários também são possíveis, nos quais múltiplas estratégias mistas estão presentes na população. Ainda que ambos os pontos de vista sejam permitidos, só será abordado agora o caso de populações monomórficas.

Suponha que $x \in \Delta$ satisfaça a $v(q,x) \leq v(x,x)\ \forall\ q \in \Delta$. Claramente, esta é uma condição necessária e suficiente para o par de estratégias *(x,x)* ser um equilíbrio de Nash em jogos bimatriciais simétricos (A, A^T), pois se a estratégia x não for ótima contra si própria então existirá uma outra estratégia q que obtém um *payoff* maior contra x do que o próprio x. Neste equilíbrio, ambos os jogadores jogam a mesma estratégia *x*. Assim $(x,x) \in \Delta$ é um equilíbrio de Nash simétrico e nós chamamos *x* de uma estratégia de equilíbrio simétrico. É bem conhecido que qualquer jogo bimatricial simétrico tem pelo menos um equilíbrio simétrico. Poderia ser notado que um jogo bimatricial simétrico pode também ter um equilíbrio não simétrico de Nash, no qual os dois jogadores usam diferentes estratégias. Agora, suponha que para uma estratégia em equilíbrio simétrico $x \in \Delta$ a condição mais forte da desigualdade $v(q,x) < v(x,x)$ se mantenha para qualquer estratégia mutante $q \in \Delta$. Então segue das Equação 3-1 e Equação 3-2 que existe algum $\varepsilon(x) > 0$ tal que a Equação 3-3 continue válida e a estratégia $x \in \Delta$ seja EEE. Para ver isto consideremos o contrário, que $\nu(q,x) \geq \nu(x,x)$, e desenvolvendo a partir da contradição da estabilidade evolutiva, Equação 3-3, temos:

$$(1\text{-}\varepsilon)x\mathrm{A}x+\varepsilon x\mathrm{A}q \leq (1\text{-}\varepsilon)q\mathrm{B}x+\varepsilon q\mathrm{B}q$$

$$\varepsilon[x\mathrm{A}q\text{-}x\mathrm{A}x+q\mathrm{B}x\text{-}q\mathrm{B}q] +x\mathrm{A}x - q\mathrm{B}x \leq 0$$

$$f(\varepsilon) = \varepsilon[\,\Omega - \Lambda] + \Lambda \leq 0, \text{ onde}$$

$$\Omega = (x\mathrm{A}q - q\mathrm{B}q)$$

$$\Lambda = (x\mathrm{A}x - q\mathrm{B}x)$$

Se a estratégia *x* não for ótima contra si própria no sentido estrito, e $\mu(x,x) = \mu(q,x)$, $\Lambda = 0$, deste modo vemos que

$$f(\varepsilon) = \varepsilon\,\Omega \leq 0$$

Caso $\Omega < 0$, ou seja, $x\mathrm{A}q < q\mathrm{B}q$, a contradição será satisfeita quando $\varepsilon \geq 0$, o que é perfeitamente viável e caso contrário, se $\Omega > 0$, a contradição será satisfeita quando $\varepsilon \leq 0$ o que não é viável.

Portanto, caso $x\mathbf{A}q < q\mathbf{B}q \rightarrow \Omega < 0$, e *x* não é estável evolutiva para qualquer $\varepsilon \geq 0$.

Por isso surge a necessidade de uma segunda condição, quando a estratégia em equilíbrio *x* é estável evolutiva, mas *q* é uma melhor réplica contra *x*, caso em que $\mu(x,x) = \mu(q,x)$. Neste caso x deve ser uma melhor réplica contra q, do que q contra si própria, caso em que $\mu(x,q) > \mu(q,q)$. Se x for estável evolutiva então,

$$v(x,[(1-\varepsilon)x+\varepsilon q]) > v(q,[(1-\varepsilon)x+\varepsilon q])$$

$$f(\varepsilon) = \varepsilon[\,\Omega - \Lambda] + \Lambda > 0$$

Se $\Lambda > 0$, a única condição que deve ser satisfeita será a condição $0 \le \varepsilon \le \dfrac{-\Lambda}{\Omega - \Lambda}$, mas se q for uma melhor réplica contra x, isto é, se $\Lambda = 0$, a condição $\Omega > 0$ de que x é uma melhor réplica conta q do que q contra si própria, e portanto $\mu(x,q) > \mu(q,q)$, deve ser verificada para que x seja EEE .

3.1 Definição de Estratégia Evolutiva Estável

Uma estratégia $\hat{x} \in \Delta$ é uma Estratégia Evolutiva Estável (EEE) do jogo bimatricial simétrico $G = (A, A^T)$ se ela satisfaz as duas desigualdades.

i) $\quad q^T A\hat{x} \le \hat{x}^T A\hat{x} \;\; \forall\, q \in \Delta$

ii) $\quad q^T Aq < \hat{x}^T Aq \quad se\; q^T A\hat{x} = \hat{x}^T A\hat{x} \quad \forall\, q \ne \hat{x}$

Em outras palavras x é uma EEE se ela é uma melhor réplica contra q e caso q seja uma melhor réplica contra x, x deve ser uma melhor réplica contra q do que q contra si própria.

Claramente $x \in \Delta$ satisfaz as condições da definição 3.1 se e somente se para qualquer $q \in \Delta$, x satisfaz a Equação 3-3 para algum $\varepsilon(q) > 0$, veja Weibull [Ref: 1]. Além do mais, a condição *i* da definição 3.1 mostra que *(x,x)* é um equilíbrio de Nash para o jogo bimatricial $G = (A, A^T)$ se x é EEE. Entretanto o inverso não é verdade. Se *(x,x)* é um equilíbrio de Nash, então x é EEE somente se x satisfaz a condição *ii*. Então nem toda estratégia em equilíbrio simétrico é EEE. Em outras palavras, a condição de EEE é um refinamento sobre o conjunto de equilíbrio de Nash simétrico. Mais precisamente temos que se x é EEE, então *(x,x)* é um equilíbrio de Nash próprio simétrico. De acordo com Weibull [Ref: 1], podemos dizer que uma EEE satisfaz a condição de equilíbrio e é robusta com respeito a erros de baixa probabilidade de modo que enganos custosos são menos prováveis que os enganos menos custosos. Novamente, a implicação inversa não é verdadeira. Quando *(x,x)* é um equilíbrio próprio simétrico então x não é necessariamente uma EEE (por exemplo a única estratégia de equilíbrio simétrico do jogo *Rock-Scissors-Paper* não é EEE.

O jogo *Rock-Scissors-Paper* de dois jogadores e três estratégias, que são: a estratégia um, "*rock*" que supera a estratégia dois "*scissors*", que supera a estratégia três *paper*, que por sua vez supera a estratégia um *rock*. A matriz de ganho deste jogo é dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

É fácil verificar que não existe nenhum equilíbrio de Nash em estratégias puras e que só existe um equilíbrio de Nash em estratégias mistas que é $x = (1/3, 1/3, 1/3)$. Sendo x uma estratégia completamente mista, toda estratégia $q \in \Delta$ é uma melhor réplica contra x. Entretanto a estratégia mutante $q = e^1$ ganha um *payoff* igual a um contra si própria que é o que x ganha contra y.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 + 0 + 0$$

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} + 0 + \frac{2}{3} = 1$$

Assim x falha na condição de segunda ordem *ii*.

Para resumir os resultados acima deixe Δ^{NE} ser o conjunto de estratégias em equilíbrio de Nash, Δ^{PE} ser o conjunto de estratégias em equilíbrio próprio e Δ^{ESS} o conjunto de estratégias estáveis evolutivas. Então temos que:

$$\Delta^{ESS} \subset \Delta^{PE} \subset \Delta^{NE} \neq 0$$

3.2 Dinâmica do Replicador

A teoria dos jogos evolutivos combina o conceito estático de estratégia estável evolutiva com o conceito dinâmico da replicação dos mais aptos, do mesmo modo que um processo evolutivo combina dois elementos básicos: a mutação que provê diversidade e a seleção que favorece alguns indivíduos em detrimento de outros.

É importante relembrar que o significado de replicar associado à dinâmica do replicador é o ato de copiar, clonar, diferente do significado de réplica, associado ao conceito de melhor réplica, ou seja melhor contra resposta.

Enquanto o papel da estabilidade evolutiva ressalta o papel da mutação, a dinâmica do replicador ressalta o papel da seleção. Na formulação mais habitual, a dinâmica do replicador é formalizada como um sistema de equações diferenciais que não inclui qualquer mecanismo de mutação. Em vez de verificar a robustez contra mutações ela se preocupa indiretamente com a estabilidade dinâmica no processo de seleção.

Na abordagem do critério da estabilidade evolutiva, os indivíduos são programados para jogar estratégias puras ou mistas. Em contraste, a dinâmica do replicador mais usual, presume que os indivíduos são programados para jogar somente estratégias puras. Assim em vez de interpretar uma estratégia mista como uma distribuição de probabilidade particular, a estratégia mista é interpretada como o estado da população, onde cada componente x_h representa a parte da população que é programada para jogar a h-ésima estratégia pura. Entretanto, ainda se pode imaginar o emparelhamento aleatório numa grande população em que os *payoffs* representam as aptidões medidas pelo número de descendentes e onde cada descendente herda a estratégia do único pai.

Se a reprodução tem lugar de modo contínuo sobre o tempo, isto resulta numa certa dinâmica contínua que é chamada de dinâmica do replicador. Os replicadores aqui são estratégias puras que podem ser copiadas dos pais para os filhos sem erro.

O termo replicador parece ter sido cunhado pelo biólogo britânico Richard Dawkins (1976) e são entidades que podem ser copiadas. A probabilidade de ser copiada depende do ambiente e da performance do replicador (da estratégia pura). A cópia do replicador é idêntica a ele e pode ser copiado *ad infinitum*.

Na estrutura da dinâmica do replicador ou dinâmica da população, partimos do ponto de vista de que todos os indivíduos são pré-programados para jogar uma certa estratégia pura. Assim, um vetor de estratégias $x \in \Delta$ deve ser interpretado como o estado da população, com x_k sendo a proporção de indivíduos jogando a estratégia *k*, com $k \in S$. Dentro desta estrutura, indivíduos são emparelhados aleatoriamente e presume-se que cada membro da população esteja engajado em uma concorrência de cada vez. Além disso, o *payoff* do indivíduo representa a aptidão medida pelo número de descendentes. Assim, quanto mais bem sucedido for o indivíduo, mais descendentes ele terá. Finalmente, é presumido que neste mundo assexuado os indivíduos procriam de modo que cada filho herda a estratégia do seu único pai. Então, na próxima geração a fração de membros mais bem sucedidos na população será maior e a fração de membros menos prósperos será menor. A modelagem deste processo em tempo contínuo resulta em equações diferenciais conhecidas como dinâmica do replicador.

Para qualquer instante *t* deixe $p_k(t) \geq 0$ ser o número de indivíduos que estão programados para jogar a estratégia pura *k* e deixe $p(t) = \sum_{k \in S_j} p_k(t) > 0$ ser a população total. O vetor de estado da população é $x(t) = [x_1(t) \ldots x_n(t)]$, onde cada componente $x_k(t)$ é a parte da população programada para jogar a estratégia pura *k* no tempo *t* e $x_k(t) = \dfrac{p_k(t)}{p(t)}$. Assim o estado da população $x(t) \in \Delta$ é idêntico a uma estratégia mista.

O *payoff* para qualquer estratégia pura *k*, quando o estado da população for $x = x(t) \in \Delta$ é $\mu(e^k, x)$. O *payoff* médio da população, quando os indivíduos são escolhidos aleatoriamente na população é a média ponderada dos *payoffs* de todas as estratégias puras da população.

$$\sum_{k=1}^{m} x_k \mu(e^k, x) \qquad \textbf{Equação 3-4}$$

Este *payoff* é o mesmo *payoff* $\mu(x,x)$ que a estratégia mista *x* ganha quando jogada contra si própria. Assim,

$$\mu(x, x) = \sum_{k=1}^{m} x_k \mu(e^k, x)$$

Suponha que o *payoff* represente o efeito incremental na aptidão individual, medido como o número de descendentes por unidade de tempo, ou seja, quanto por cento o número da p_k aumentou por unidade de tempo.

Suponha também, que cada descendente herde a estratégia do seu único pai. Se a reprodução é feita continuamente no tempo, então o índice de natalidade dos indivíduos programados com a estratégia pura k, em qualquer tempo, é $\beta + \mu(e^k, x(t))$ onde $\beta \geq 0$ é a aptidão de fundo (independente de qualquer resultado do jogo em questão) dos indivíduos na população, independente dos resultados no jogo. Deixe que a taxa de mortalidade $\delta \geq 0$ seja a mesma para todos os indivíduos.

Então,

$$\left[\beta + u(e^k, x) - \delta\right] = \frac{p_k(t+1) - p_k(t)}{p_k(t)} \text{ e } \left[\beta + u(e^k, x) - \delta\right] p_k(t) = \frac{\Delta p_k}{\Delta t}$$

E assim a derivada no tempo de $p_k(t)$, abandonando o argumento de tempo por simplificação será:

$$\dot{p}_k = \left[\beta + \mu(e^k, x) - \delta\right] p_k \qquad \textbf{Equação 3-5}$$

Para encontrarmos a mudança percentual $x(t+1)$ - $x(t)$ por unidade de tempo fazemos a derivada no tempo em ambos os lados da equação $p(t)x_k(t) = p_k(t)$, ficando $\dot{p}x_k + p\dot{x}_k = \dot{p}_k$.

$$p\dot{x}_k = p\frac{\dot{p}_k p - p_k \dot{p}}{p^2} = \dot{p}_k - \dot{p}x_k = \left[\beta + \mu(e^k, x) - \delta\right] p_k - \left[\beta + \mu(x, x) - \delta\right] p x_k$$

A dinâmica correspondente $\dot{x}_k$ para a parte da população x_k é:

$$\dot{x}_k = \left[\mu(e^k, x) - \mu(x, x)\right] x_k = \dot{x}_k = \left[e^{kT} A x - x^T A x\right] x_k,\ k \in I_m \qquad \textbf{Equação 3-6}$$

Onde I_m é o conjunto de m estratégias puras do jogador I.

Em outras palavras, a taxa de crescimento $\dot{x}_k / x_k$ da parte da população jogando a estratégia k é igual à diferença entre o *payoff* da estratégia k e o *payoff* médio da população. Esta taxa de crescimento é independente das taxas de natalidade e mortalidade desde que estas são as mesmas para todas as estratégias puras. A Equação 3-6 é a própria dinâmica do replicador e explorando a linearidade do *payoff* $\mu(x,y)$ com respeito a x ela pode ser escrita de modo mais conciso como:

$$\dot{x}_k = \left(e^k Ax - x^T Ax\right)x_k = \left[\left(e^k - x\right)Ax\right]x_k = \mu(e^k - x, x)x_k$$ **Equação 3-7**

Assim, as partes da população associadas com as estratégias cujos *payoffs* são maiores que o *payoff* médio da população crescem, enquanto as partes da população associadas com as estratégias cujos *payoffs* são menores que o *payoff* médio da população diminuem. As partes da população associadas com as estratégias de melhores réplicas puras, para o atual estado $x \in \Delta$ da população, têm a mais alta taxa de crescimento.

Pode-se notar também, que a razão entre quaisquer duas partes da população $x_h > 0$ e $x_k > 0$ aumenta no tempo se a estratégia h obtém um *payoff* maior do que a estratégia k. Do contrário a parte da população que joga a estratégia h diminui.

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{x_h}{x_k}\right] = \frac{\dot{x}_h}{x_k} - \frac{x_h}{x_k}\frac{\dot{x}_k}{x_k} =$$

$$\left[\mu(e^h, x) - \mu(x,x)\right]\frac{x_h}{x_k} - \left[\mu(e^k, x) - \mu(x,x)\right]\frac{x_k}{x_k}\frac{x_h}{x_k} =$$

$$\left[\mu(e^k, x) - \mu(e^h, x)\right]\frac{x_h}{x_k}$$ **Equação 3-8**

O sistema de equações diferenciais da dinâmica do replicador possui uma única solução $x(t, x^0), t \geq 0$, para qualquer ponto inicial $x^0 = x(0) \in \Delta$. Além do mais, desenvolvendo as Equação 3-7 para todo $k \in I_m$ nós obtemos $\sum_{k=1}^{m} \dot{x}_k = 0$ porque $\sum_{k=1}^{m} x_k = 1$ e conseqüentemente temos que Δ é invariante, isto é, qualquer trajetória iniciando em Δ (numa superfície de Δ) permanece em Δ (na mesma superfície de Δ). Assim $\sum_{k=1}^{m} x_k(t) = 1 \; \forall \, t$ e $x_k(t) = 0$ para qualquer $t \geq 0$ se $x_k(\hat{t}) = 0$ para algum $\hat{t} \geq 0$. Esta última propriedade diz que se num certo tempo, a fração de membros jogando a estratégia *k* for igual a zero, então ela sempre foi zero e sempre permanecerá zero. De outro modo $x_k(t)>0 \; \forall \; t \geq 0$ se $x_k^0 > 0$, e assim a estratégia irá sobreviver para sempre se ela estiver disponível em t = 0. Certamente isto não exclui que $x_k(t)$ convirja para zero quando *t* tende a infinito, isto é, pode acontecer que a trajetória iniciando no interior de Δ convirja para a fronteira. Uma estratégia $x \in \Delta$ em equilíbrio de Nash (da população monomórfica no qual todos os membros jogam *x*) é dita ser assintoticamente estável para a população polimórfica (na qual x_k denota a fração de membros jogando *k*), se existe uma vizinhança X de *x*, isto é, um conjunto aberto X em Δ contendo *x*, tal que qualquer trajetória da dinâmica do replicador iniciando em $x^0 \in X$ converge para *x*. Este resultado deve-se a Taylor e Jonker [Ref: 46] e pode ser visto como um resultado básico relacionando a dinâmica do replicador às estratégias estáveis evolutivas.

Intuitivamente um estado $x \in \Delta$ é estável no sentido de Lyapunov se nenhuma pequena perturbação do estado provoca um movimento para longe de *x* e é assintoticamente estável se além de ser estável do sentido de Lyapunov ocorre um movimento de volta a *x* para qualquer perturbação suficientemente pequena daquele estado.

3.3 Estabilidade Assintótica

Toda estratégia estável evolutiva $x \in \Delta$ é assintoticamente estável para a dinâmica do replicador dada na Equação 3-7.

Para qualquer EEE existe uma vizinhança tal que qualquer trajetória da dinâmica de replicador que começa nesta vizinhança converge para esta EEE. Porém a dinâmica do replicador pode convergir para uma estratégia que não é uma EEE. Além do mais, uma trajetória nem sempre converge para algum ponto limite x^* quando *t* tende a infinito. Pode acontecer que o caminho traçado pela trajetória seja um ciclo em Δ ou se desvie do ponto limite. Para as outras propriedades das trajetórias, por exemplo, aquela que no limite da dinâmica de replicador destrói todas as estratégias estritamente dominadas se inicialmente todas as estratégias estão presentes, pode-se recorrer a Weibull [Ref: 1], onde são vistos muitos resultados sobre a relação entre equilíbrio estável (assintótico) da dinâmica do replicador e os refinamentos do equilíbrio de Nash, por exemplo que qualquer estratégia assintoticamente estável é uma estratégia com equilíbrio perfeito de Nash. Deixe a matriz de *payoff* A ser dada por;

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

É sabido que o conjunto de estratégias do equilíbrio de Nash é invariante com respeito à adição de uma mesma constante aos *payoffs* (transformada afim) de um jogador relacionado a uma dada estratégia pura do outro jogador. Disto segue que nós podemos distinguir três tipos de jogos 2×2 veja Weibull [Ref: 1].

3.3.1 Tipo I:

$a - c < 0 < d - b$. Neste caso a segunda estratégia domina estritamente a primeira e conseqüentemente (e^2,e^2) é o único equilíbrio de Nash do jogo simétrico. Além do mais, $x = e^2$ é EEE e pode ser mostrado que a dinâmica de replicador converge para e^2 para qualquer estratégia inicial estritamente positiva x^o. No caso em que $d < a$ (e conseqüentemente $c > b$) este tipo representa o bem conhecido jogo do dilema dos prisioneiros e o equilíbrio de Nash produz um *payoff* $d < a$, não eficiente, para ambos os jogadores. Assim neste caso a dinâmica de replicador conduz a um estado estável não eficiente, porém é importante observar que é um estado livre de riscos.

E a partir de um estado x^0 próximo de e^1, o *payoff* médio ou aptidão da população vai decrescendo ao longo da trajetória, de aproximadamente a, no ponto de partida, até d no ponto limite. O caso $d - b < 0 < a - c$ é similar, mas com a primeira estratégia como estratégia dominante.

3.3.2 Tipo II:

$a - c > 0$ e $d - b > 0$. Esta classe de jogos é conhecida como jogos de coordenação (CG) e possui três estratégias em equilíbrio simétrico, ou seja, as duas estratégias puras e^1 e e^2 e a estratégia de equilíbrio mista

$x^* = \left(\frac{d-b}{a+d-b-c}, \frac{a-c}{a+d-b-c} \right)^T$. Os *payoffs* mais altos são obtidos com a estratégia de equilíbrio pura. Ainda que todas as três estratégias de equilíbrio sejam próprias, somente as duas estratégias de equilíbrio puras são EEE e assintoticamente estáveis. A dinâmica do replicador converge para e^1 (e respectivamente. e^2) se $x_1^0 > (<) \frac{d-b}{a+d-b-c}$

3.3.3 Tipo III:

a - c < 0 e d - b < 0. Um exemplo típico desta classe de jogos é o clássico jogo Hawk-Dove (jogo do falcão e do pombo) (HDG). Fazendo $d = \frac{1}{2}b > 0, a < 0$ e $c = 0$, um membro da população consegue numa competição contra seu rival um *payoff* de $a < 0$ se ele luta (joga falcão) e *0* se não luta (joga pombo) quando o seu rival joga falcão, enquanto o *payoff* é igual a $b > 0$, respectivamente $\frac{1}{2}b$ quando seu rival joga pombo. Neste caso existem dois equilíbrios assimétricos, ou seja, (e^1, e^2) e (e^2, e^1). Além disto existe um equilíbrio simétrico (x^*, x^*) com x^* como apresentado no item de jogos do tipo II. Assim x^* é uma estratégia em equilíbrio simétrico único. Esta estratégia é também a única EEE e a dinâmica de replicador converge para esta estratégia para qualquer vetor inicial de estratégias estritamente positivo x^0.

Observe que para os jogos do tipo I e do tipo II, a dinâmica de replicador converge para uma estratégia pura de equilíbrio estável evolutiva, enquanto que para os jogos do tipo III a dinâmica converge para uma EEE mista. Então neste caso a dinâmica converge para uma população na qual uma fração x_1^* joga falcão e a outra joga pombo. Em tal população estável dois tipos de indivíduos podem ser distinguidos. Certamente, no equilíbrio, ambos os tipos possuem a mesma aptidão média.

Para jogos 2×2 a dinâmica de replicador sempre conduz para uma EEE quando iniciando num ponto interior do espaço de estratégias. Assim, para o caso 2×2 a dinâmica de replicador também converge.