

### 3

## Modelagem por Programação Inteira

O problema de correspondência inexata de grafos formulado no capítulo anterior é um problema de otimização combinatória. Esta formulação possibilitou a construção de algoritmos aproximados para o PCIG. Entretanto, a presença de componentes não lineares em tal formulação impede uma abordagem direta por métodos exatos.

Com o objetivo de possibilitar uma abordagem exata para o PCIG, este capítulo propõe uma formulação linear inteira para o problema. A função objetivo da formulação proposta em [14] apresenta componentes não lineares nas contribuições de vértices e arestas. Além disso, a restrição de conexidade dos grafos induzidos em  $G_I$  por vértices que se associam ao mesmo vértice de  $V_M$  necessita de uma formalização matemática para que possa ser representada por expressões lineares.

As seções a seguir apresentam, passo a passo, as linearizações das componentes não lineares.

### 3.1

#### Linearização da contribuição de vértices

Inicialmente, será apresentada a linearização da contribuição de vértices presente na função objetivo. Representada pela expressão 2-3, pode-se escrevê-la como  $f^v(x) = \sum_{i \in V_M} \sum_{j \in V_I} \text{termo}_{ij}$ , onde  $\text{termo}_{ij} = 1 - |x_{ij} - s^v(i, j)|$ . O valor de  $\text{termo}_{ij}$  é dado em função da variável binária  $x_{ij}$ . Se  $x_{ij}$  tem valor 0, então  $\text{termo}_{ij} = 1 - s^v(i, j)$ . Caso contrário, se  $x_{ij}$  vale 1, então  $\text{termo}_{ij} = s^v(i, j)$ .

Seja  $\text{aux}_{ij} = 1 - s^v(i, j) + x_{ij} \cdot T_{ij}$  uma expressão linear em função de  $T_{ij}$ . Para  $x_{ij} = 0$ ,  $\text{aux}_{ij} = \text{termo}_{ij}$  independentemente do valor de  $T_{ij}$ .

Deve-se analisar então o caso em que  $x_{ij} = 1$ . Neste caso,  $termo_{ij} = s^v(i, j)$  e  $aux_{ij} = 1 - s^v(i, j) + T_{ij}$ . Fazendo-se  $termo_{ij} = aux_{ij}$ , tem-se que  $s^v(i, j) = 1 - s^v(i, j) + T_{ij}$ . Logo,  $T_{ij} = 2 \cdot s^v(i, j) - 1$ . Assim,  $aux_{ij} = (2 \cdot s^v(i, j) - 1) \cdot x_{ij} + 1 - s^v(i, j)$  é uma expressão linear equivalente a  $termo_{ij}$ . A equação 3-1 representa a função linear  $g(x)$  de contribuição de vértices, eliminando-se as constantes aditivas:

$$g(x) = \sum_{i \in V_M} \sum_{j \in V_I} (2 \cdot s^v(i, j) - 1) \cdot x_{ij} \quad (3-1)$$

Desta forma, a função  $g(x)$  e a função  $f^v(x)$  utilizada na formulação original relacionam-se da seguinte maneira:

$$g(x) = f^v(x) - \sum_{i \in V_M} \sum_{j \in V_I} (1 - s^v(i, j)). \quad (3-2)$$

Como, para  $\alpha = 1,0$ , a função  $f$  é dada por  $f^v(x)/(|V_M| \cdot |V_I|)$ , a seguinte equivalência também é válida para este valor de  $\alpha$

$$g(x) = f(x) \cdot (|V_M| \cdot |V_I|) - \sum_{i \in V_M} \sum_{j \in V_I} (1 - s^v(i, j)). \quad (3-3)$$

Como as restrições 2-5 e 2-8 da formulação original podem ser facilmente escritas na forma de expressões lineares (apresentadas nas restrições 3-5 e 3-6) e as restrições 2-7 podem ser garantidas definido-se no modelo somente as variáveis  $x_{ij}$  para os pares de vértices cuja similaridade seja não nula, uma formulação linear inteira inicial para o PCIG, desconsiderando-se a contribuição de arestas na função objetivo e relaxando-se as restrições de conexidade (2-6), é dada por

$$\mathbf{max} \quad g(x) = \sum_{i \in V_M} \sum_{j \in V_I} (2 \cdot s^v(i, j) - 1) \cdot x_{ij} \quad (3-4)$$

sujeito às restrições

$$\sum_{i \in V_M} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in V_I \quad (3-5)$$

$$\sum_{j \in V_I} x_{ij} \geq 1, \quad \forall i \in V_M \quad (3-6)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \mid i \in V_M, j \in V_I \text{ e } s^v(i, j) > 0. \quad (3-7)$$

### 3.2

#### Corte de conexidade

A formulação apresentada na seção anterior aceita soluções que violam a restrição de conexidade 2-6. Nesta seção, é proposto um corte que impede associações de um mesmo vértice de  $V_M$  a um subconjunto de nós de  $V_I$  que induzem um subgrafo não conexo em  $G_I$ .

Dada uma solução viável  $S$  de (3-4)-(3-7) que viola a restrição de conexidade, seja  $W_i = A_S(i)$  para um certo nó  $i \in V_M$ , tal que o subgrafo induzido em  $G_I$  por  $W_i$  não seja conexo.

O corte a ser inserido no modelo para impedir que o conjunto de vértices de  $V_I$  associados ao vértice  $i \in V_M$  seja igual a  $W_i$  é dado por

$$\sum_{j \in W_i} x_{ij} - \sum_{j \in V_I - W_i} x_{ij} \leq |W_i| - 1, \text{ para um dado } i \in V_m. \quad (3-8)$$

A Figura 3.1 apresenta um exemplo de solução para um pequeno problema teste do PCIG. Neste exemplo,  $W_a = \{2, 6\}$  é o conjunto dos nós de  $V_I$  que se associam ao vértice  $a \in V_M$  na dada solução. Como o conjunto  $W_a$  não induz um subgrafo conexo em  $G_I$ , a solução viola a restrição de conexidade do modelo original. O corte a ser inserido para impedir esta associação é definido por  $(x_{a2} + x_{a6}) - (x_{a1} + x_{a3} + x_{a4} + x_{a5}) \leq 1$ . Esta restrição impede apenas que  $A_S(a)$  seja igual a  $\{2, 6\}$ , não evitando qualquer outra combinação de vértices, mesmo aquelas que contêm os nós 2 e 6. No exemplo,  $A_S(a) = \{2, 4, 6\}$ ,  $A_S(a) = \{2\}$  ou  $A_S(a) = \{6\}$  não são evitadas.

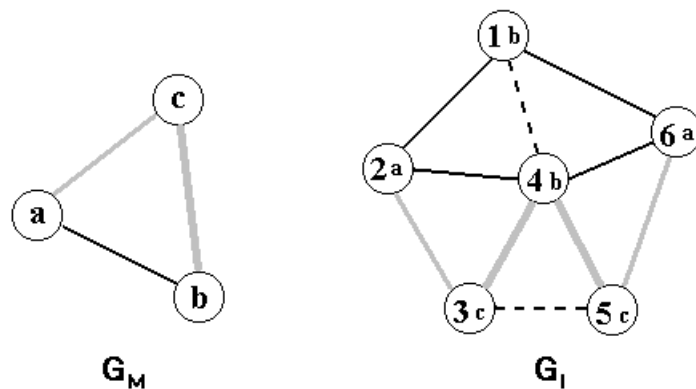


Figura 3.1: Exemplo de solução que viola a restrição de conexidade.

Uma solução para o PCIG pode apresentar eventualmente várias associações que induzem subgrafos não conexos em  $G_I$ . Neste caso, para

cada subgrafo não conexo pode-se gerar um corte específico a ser inserido no modelo.

O modelo apresentado na Seção 3.1 em conjunto com os cortes propostos na expressão 3-8 permite, pelo menos conceitualmente, uma abordagem de resolução exata para o PCIG. Pode-se submeter o modelo (3-4)-(3-7) a um resolvidor de programação inteira e, cada vez que a solução obtida violar a restrição de conexidade, inserir-se na formulação original os respectivos cortes que impedem as associações indevidas, resolvendo-se novamente o modelo estendido. Este processo deve ser repetido até que uma solução viável seja encontrada, que será também uma solução ótima.

Esta formulação apresenta um número polinomial de variáveis ( $O(|V_M| \cdot |V_I|)$ ) e restrições ( $O(|V_M| + |V_I|)$ ), mas o número de cortes necessários para se obter uma solução viável pode ser exponencial no tamanho dos grafos de entrada. A próxima seção apresenta uma representação da restrição de conexidade com um número polinomial de variáveis e restrições, utilizando-se a idéia de problemas de multi-fluxos em grafos.

### 3.3

#### Representação linear da restrição de conexidade

Modelos e métodos baseados em fluxos em redes aparecem na literatura aplicados com sucesso em diversas áreas [16]. Problemas como escalonamento de veículos e tripulações [16], fluxos de multi-comodidades em árvores [37], além de várias aplicações nas áreas de telecomunicações, logística e transportes [3] já foram modelados como problemas de multi-fluxos em redes.

Basicamente, um problema de fluxos em uma rede consiste em enviar-se uma comodidade de um nó origem para um nó destino nesta rede, procurando-se otimizar algum critério e respeitando-se restrições de capacidade. No entanto, diversas aplicações necessitam que várias comodidades compartilhem a mesma rede, cada uma delas sujeita às suas próprias restrições de fluxo. Os problemas em que tais comodidades compartilham os mesmos recursos da rede, de maneira que não podem ser tratadas independentemente para se chegar a uma solução de fluxo ótimo, são chamados de problemas de fluxos de multi-comodidades [3].

A seguir, é apresentado um conjunto de restrições baseadas em fluxos

de multi-comodidades com o objetivo de se garantir a conexidade dos subgrafos induzidos em  $G_I$  pelos vértices associados a um mesmo nó de  $V_M$ . A idéia básica é que cada um dos nós do grafo modelo deve originar um fluxo para o grafo  $G_I$  a ser consumido somente pelos vértices de  $V_I$  que se associarem ao vértice de  $V_M$  que originou o fluxo. O fluxo originado num vértice  $i \in V_M$  deve ser recebido diretamente por um único vértice de  $V_I$ , que deverá então consumir uma unidade deste fluxo e distribuir o restante para os demais vértices associados a  $i$ . Cada vértice  $j \in V_I$  associado ao vértice  $i \in V_M$  deve consumir exatamente uma unidade do fluxo originado em  $i$ , não consumindo fluxos originados de outros vértices. Somente as arestas do subgrafo induzido em  $G_I$  pelos nós associados a  $i$  podem ser percorridas pelo fluxo originado em  $i$ . Como o somatório dos fluxos gerados deve ser igual a  $|V_I|$ , se todas as unidades de fluxo forem consumidas no grafo  $G_I$  tem-se a garantia de que a solução não viola as restrições de conexidade.

Além das variáveis binárias  $x_{ij}$  descritas anteriormente, seja  $y_{ij}$  uma variável binária que indica se o vértice  $j \in V_I$  recebe fluxo diretamente de  $i \in V_M$  ( $y_{ij} = 1$ ) ou não ( $y_{ij} = 0$ ). Esta variável define o vértice  $j \in V_I$  selecionado para receber e distribuir o fluxo que parte de  $i \in V_M$ .  $F_{ij}$  é uma variável real que representa o número de unidades de fluxo originado em  $i \in V_M$  e cujo destino é o vértice  $j \in V_I$  tal que  $y_{ij} = 1$ . A quantidade de fluxo originado em cada vértice  $i \in V_M$  ( $F_{ij}$ ) deve ser igual ao número de vértices de  $V_I$  associados a  $i$ . Este fluxo deverá se distribuir pelo subgrafo induzido em  $G_I$  pelos nós de  $V_I$  que se associam a  $i$ . A variável real  $f_{jj'}^i$  representa o número de unidades do fluxo originado em  $i$  que percorrem a aresta  $(j, j')$  de  $G_I$ . Então, as restrições de conexidade podem ser representadas pelas seguintes equações e inequações:

$$y_{ij} \leq x_{ij}, \forall i \in V_M \text{ e } \forall j \in V_I \quad (3-9)$$

$$\sum_{j \in V_I} y_{ij} = 1, \forall i \in V_M \quad (3-10)$$

$$F_{ij} \leq |V_I| \cdot y_{ij}, \forall i \in V_M \text{ e } \forall j \in V_I \quad (3-11)$$

$$F_{ij} + \sum_{j' \in V_I | j' \neq j} f_{j'j}^i - \sum_{j' \in V_I | j' \neq j} f_{jj'}^i = x_{ij}, \forall i \in V_M \text{ e } \forall j \in V_I \quad (3-12)$$

$$f_{j'j}^i \leq |V_I| \cdot x_{ij}, \forall i \in V_M \text{ e } \forall (j, j') \in E_I \quad (3-13)$$

$$\sum_{i \in V_M} \sum_{j \in V_I} F_{ij} = |V_I|. \quad (3-14)$$

As restrições 3-9 têm como objetivo garantir que o fluxo originado no vértice  $i \in G_M$  só poderá ter como destino um vértice  $j \in G_I$  tal que  $A_S^{-1}(j) = i$ , ou seja,  $j$  estará associado a  $i$  na solução obtida.

As restrições 3-10 cuidam para que cada vértice de  $G_M$  distribua fluxo diretamente para exatamente um único vértice de  $G_I$ . Tem-se então as  $|V_M|$  comodidades, cada uma partindo de um dos vértices do grafo modelo e com um diferente destino no grafo  $G_I$ .

As restrições 3-11 definem um limite para a quantidade de fluxo que um dado vértice  $i$  de  $V_M$  envia para o vértice  $j$  de  $V_I$ . Este limite é igual a  $|V_I|$  para o vértice  $j$  de  $V_I$  tal que  $y_{ij} = 1$ . Para todos os outros vértices de  $V_I$ , este fluxo deve ter valor nulo, conseqüentemente  $\sum_{k \in V_I | y_{ik}=0} F_{ik} = 0, \forall i \in V_M$ .

Nas restrições 3-12 é feito o chamado balanceamento do fluxo, isto é, esta expressão restringe a quantidade de fluxo originado num determinado vértice  $i$  de  $V_M$  que deve ser consumido por cada vértice  $j$  do grafo  $G_I$ . O primeiro termo do lado esquerdo da equação representa a quantidade de fluxo que o vértice recebe diretamente de  $i$ . Os segundo e terceiro termos representam respectivamente a soma dos fluxos que entram e saem do vértice  $j$  originados em  $i$  usando apenas arestas de  $G_I$ . Assim, o lado esquerdo da equação representa o fluxo consumido no vértice  $j$  vindo do vértice  $i$ . Este consumo deve ser de exatamente uma unidade se o vértice  $j$  for associado a  $i$  e zero caso contrário.

As inequações 3-13 limitam a quantidade de fluxo originado num dado vértice  $i \in V_M$  que percorre cada aresta de  $E_I$ . Para todas as arestas cujos vértices terminais se associam a  $i$ , esta quantidade pode ser de até  $|V_I|$  unidades. As demais arestas não podem ser percorridas por fluxos originados em  $i$ .

Finalmente, a restrição 3-14 limita a quantidade total de fluxo a  $|V_I|$  unidades. Portanto, em uma solução viável para o PCIG, todo o fluxo deve ser consumido, satisfazendo-se as restrições apresentadas nesta seção.

### 3.4

#### Formulação linear inteira

Com a representação das restrições de conectividade da forma proposta na seção anterior, é apresentada a seguir a formulação linear inteira para o PCIG, considerando-se na função objetivo somente a contribuição de vértices:

$$\max g(x) = \sum_{i \in V_M} \sum_{j \in V_I} [(2 \cdot s^v(i, j) - 1) \cdot x_{ij}]$$

sujeito às restrições

$$\sum_{i \in V_M} x_{ij} = 1, \forall j \in V_I$$

$$\sum_{j \in V_I} x_{ij} \geq 1, \forall i \in V_M$$

$$y_{ij} \leq x_{ij}, \forall i \in V_M \text{ e } \forall j \in V_I$$

$$\sum_{j \in V_I} y_{ij} = 1, \forall i \in V_M$$

$$F_{ij} \leq |V_I| \cdot y_{ij}, \forall i \in V_M \text{ e } \forall j \in V_I$$

$$F_{ij} + \sum_{j' \in V_I | j' \neq j} f_{j'j}^i - \sum_{j' \in V_I | j' \neq j} f_{jj'}^i = 1 \cdot x_{ij}, \forall i \in V_M \text{ e } \forall j \in V_I$$

$$f_{j'j}^i \leq |V_I| \cdot x_{ij}, \forall i \in V_M \text{ e } \forall j \in V_I, \forall j' \in V_I | j \neq j'$$

$$\sum_{i \in V_M} \sum_{j \in V_I} F_{ij} = |V_I|$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) | i \in V_M, j \in V_I \text{ e } s^v(i, j) > 0$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) | i \in V_M \text{ e } j \in V_I$$

$$0 \leq f_{jj'}^i \leq |V_I|, \forall i \in V_M \text{ e } \forall (j, j') \in E_I$$

$$0 \leq F_{ij} \leq |V_I|, \forall j \in V_I \text{ e } \forall i \in V_M.$$

### 3.5

#### Discussão

Este capítulo apresentou uma formulação original como um problema de programação linear inteira para o PCIG, descrevendo cada passo das

linearizações necessárias à formulação proposta em [14].

Foi efetuada a linearização da contribuição de vértices, além de uma representação da restrição de conexidade por meio de um conjunto de expressões lineares. A formulação apresentada possui  $O(|V_I|^3)$  variáveis e restrições, ou seja, é polinomial no tamanho da entrada.

A contribuição de arestas foi retirada da função objetivo em virtude do conseqüente aumento no número de restrições em relação ao modelo proposto. No entanto, a presença da contribuição de arestas na função objetivo pode ser decisiva para que a solução encontrada represente um bom reconhecimento da cena. A linearização desta contribuição é simples, pois o termo quadrático presente na contribuição é equivalente à uma operação “e” lógico entre duas variáveis binárias. A função  $\max(x, y)$ , também presente na contribuição de arestas, pode ser modelada como uma operação “ou” lógico também entre duas variáveis binárias.

Foram realizados testes preliminares dessa formulação incorporando-se algumas desigualdades válidas e uma perturbação na função objetivo cuja finalidade é a quebra de sua simetria. Como os resultados obtidos para os problemas teste utilizados não apresentaram uma melhora sistemática, os detalhes destas alterações não foram discutidos neste trabalho. Testes adicionais e um estudo sistemático de seus resultados constituem uma interessante linha de pesquisa.

O próximo capítulo propõe algoritmos aproximados para a resolução do PCIG, que podem ser usados para encontrar boas soluções. Estas podem ser utilizadas como limites inferiores para o problema e podem auxiliar na resolução do modelo de programação inteira por um resolvedor de problemas de programação inteira.