

## 6

### Conclusões e Extensões

Esta dissertação apresentou novos algoritmos aproximados e exatos para um problema de correspondência de grafos (PCIG). A principal motivação para o estudo deste problema foi sua aplicação na área de reconhecimento de cenas. Foi apresentada uma breve revisão bibliográfica e descrita uma formulação do problema como um problema de otimização combinatória.

Uma formulação original como um problema de programação linear inteira foi proposta e possibilitou uma abordagem exata do PCIG, baseada na idéia de multifluxos. A resolução do problema inteiro encontrou soluções ótimas para nove de 12 problemas teste utilizados na literatura e limites superiores para outros dois problemas. A formulação proposta possui um número polinomial de variáveis e restrições.

Diversos algoritmos aproximados foram também propostos para a resolução do PCIG. Foram implementados novos algoritmos construtivos e procedimentos de reconexão por caminhos, que foram combinados a uma técnica de busca local num algoritmo GRASP.

Os métodos construtivos desenvolvidos se caracterizam por utilizarem funções gulosas e apresentarem componentes probabilísticas, sendo portanto boas opções para desempenhar a fase de construção de um GRASP. Foram implementadas e testadas três diferentes variantes de algoritmos construtivos gulosos aleatorizados.

Outra heurística proposta para o PCIG foi um algoritmo de reconexão por caminhos. Esta técnica, que foi originalmente proposta como uma forma de intensificação de uma busca tabu, pode ser também utilizada como um elemento de otimização adicional num algoritmo GRASP. Um algoritmo de reconexão por caminhos consiste na tentativa de se incorporar a uma solução inicial atributos de uma solução de elite com o objetivo de

encontrar soluções melhores. Foram projetadas duas variantes de reconexão por caminhos, sendo a primeira baseada na versão proposta em [55] e a segunda apresentando uma modificação com o objetivo de aceitar soluções inviáveis no caminho entre as soluções de elite. Esta modificação foi proposta visando diminuir as possibilidades de término prematuro do algoritmo por não encontrar um movimento viável.

Foi ainda proposto neste trabalho um algoritmo GRASP que combinou cada um dos métodos construtivos implementados com um procedimento de busca local (proposto em [14]) e as variantes de reconexão por caminhos. Foram apresentados os resultados computacionais para cada algoritmo aplicado a 12 problemas teste utilizados na literatura. Os resultados mostraram que estas heurísticas podem constituir uma ferramenta para resolução aproximada para o PCIG, bem como serem utilizados para o cálculo de um limite inferior para o problema, atuando em conjunto com a solução do modelo exato por programação inteira.

A formulação do PCIG como um problema de programação linear inteira foi uma importante contribuição alcançada neste trabalho. Embora tenha permitido a solução exata de problemas de porte médio em grafos com até 95 nós, através de um resolvidor de problemas de programação inteira, a formulação pode ser melhorada e integrada a algoritmos do tipo *branch-and-bound* e *branch-and-price*, de modo a viabilizar a solução de problemas de maior porte. Outra alternativa interessante é investigar a utilização de relaxação lagrangeana para a obtenção de limites superiores (problema de maximização) e para a construção de heurísticas lagrangeanas. Outra linha interessante é o estudo das desigualdades válidas que podem ser adicionadas ao modelo, melhorando a qualidade dos limites superiores e, eventualmente, levando à resolução exata.

Além disso, algumas alterações podem ser estudadas na formulação proposta com a finalidade de se quebrar sua simetria. No modelo apresentado, para cada elemento de  $V_M$ , deve-se eleger um elemento de  $V_I$  para receber diretamente o fluxo proveniente de  $G_M$ . No entanto, para um dado vértice  $i \in V_M$ , qualquer elemento  $j \in V_I$  associado a  $i$  pode ser selecionado. Esta característica implica que uma solução viável para o PCIG pode ser encontrada de diversas formas diferentes. Uma alternativa seria a inserção no modelo de uma restrição quanto ao vértice a ser escolhido para receber o fluxo. Por fim, a realização de testes com a inclusão da componente de contribuição de arestas na formulação apresentada também representa uma

possível extensão deste trabalho.

Em termos de algoritmos aproximados, outras heurísticas podem ser desenvolvidas. Por exemplo, uma heurística de busca tabu permitirá explorar a utilização de memória, que não é tratada de forma eficiente em algoritmos do tipo GRASP.

Uma terceira vertente trata da implementação paralela em *clusters* das heurísticas e dos algoritmos exatos acima mencionados. Finalmente, pode-se estudar extensões e variantes do problema, além de aplicações práticas reais em reconhecimento facial.