

## Referências

- [1] H. J. Herrmann, S. Luding and R. Caflero, *Physica A* **295** (2001) 93-100
- [2] J. Schofield and I. Oppenheim, *Physica A* **196** (1993) 209-240.
- [3] W.A.M Morgado and I. Oppenheim, *Phys. Rev. E* **55** (1997) 1940-1945.
- [4] H. J. Herrmann, *Physica A* **313** (1-2) (2002) 188-210.
- [5] E. Livne, B. Meerson and P. V. Sasorov, *Phys. Rev. E* **65** (2002) 021602.
- [6] B. Meerson *et al* cond-mat/028286 (2002).
- [7] P. K. Haff, *J. Fluid Mech.* **134** (1983) 401-430
- [8] T. Shimbrot and F. J. Mozzio, *Phys. Today* **53**(3) (2000) 25-30.
- [9] F. Rouyer and N. Menon, *Phys. Rev. Letters* **85** (2000) 3676-3679
- [10] H. M. Jaeger, S. R. Nagel and R. P. Behringer, *Phys. Today* **49** (1996) 32.
- [11] E. Vernek, Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, 2003
- [12] Huang, Kerson, "*Statistical Mechanics*", (1987) Jhon Wiley & Sons, (1987).
- [13] T. Pöschel and N. V. Brilliantov, *Phys. Rev. E* **67** (2003) 061304.
- [14] T. Pöschel, N. V. Brilliantov, C. Salueña, T. Schwager, cond-mat/0312616 (2003)
- [15] T. Pöschel and N. V. Brilliantov, *Phys. Rev. E* **61** (2000) 5573.
- [16] S. Chappman & T. G. Cowling, "*Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*", Cambridge (1970).
- [17] I. Goldhirsch and G. Zanetti, *Phys. Rev. Letters* **70** (1993) 1619-1622.
- [18] W.A.M Morgado and I. Oppenheim, *Physica A* **252** (1998) 308-324.
- [19] J. J. Brey, F. Moreno and J. W. Dufty, *Phys. Rev. E* **54** (1996) 445.
- [20] J. J. Brey, James W. Dufty, Chang Sub Kim, Andrés Santos, *Phys. Rev. E* **58** (1998) 4638.
- [21] Y. Oono and S. Puri, *Phys. Rev. A* **38** (1988) 434-453.

- [22] S. Martins, W. A. M Morgado, M. S. O Massunaga and M. Bahiana, Phys.Rev. E **61** (2000) 4118.
- [23] A.Shinozaki and Y Oono, Phys. Rev. E **48** (1993) 2622.
- [24] A. Shinozaki, Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1993.
- [25] J. J. Brey and M.J. Ruiz-Montero Comp. Phys. Comm. **121-122** (1999) 278-283.
- [26] A. Kudrolli and J. Henry, Phys. Rev. E **62** (2000) 1489-1492.
- [27] W.A.M Morgado and E. R. Mucciolo, Physica A **311** (2002) 150-168.
- [28] T. Pöschel N. V. Brilliantov and T. Schwager, cond-mat 0212200 v1 (2002).

# A

## Apêndices

### A.1 Discretização do laplaciano para o CDS

Suponhamos uma função arbitrária  $f(x, y)$ , no caso bidimensional. As expansões desta função em série de Taylor em torno de um ponto genérico  $(x_0, y_0)$  para pequenos desvios  $(a, a)$  serão:

$$f(x_0 + a, y_0) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0} a^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_0} a^3 + \dots \quad (\text{A.1})$$

$$f(x_0 - a, y_0) = f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0} a^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_0} a^3 + \dots \quad (\text{A.2})$$

$$f(x_0, y_0 + a) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y_0} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{y_0} a^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Big|_{y_0} a^3 + \dots \quad (\text{A.3})$$

$$f(x_0, y_0 - a) = f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y_0} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{y_0} a^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Big|_{y_0} a^3 + \dots \quad (\text{A.4})$$

Estas expansões são as expansões para os primeiros vizinhos do ponto  $(x_0, y_0)$ , façamos agora as expansões para seus segundos vizinhos:

$$\begin{aligned} f(x_0 + a, y_0 + a) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} a + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y_0} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0} a^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{y_0} a^2 \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Big|_{y_0} a^2 + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_0} a^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Big|_{y_0} a^3 + \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y_0} a^3 \right. \\ & \left. + \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \Big|_{y_0} a^3 \right] + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + a, y_0 - a) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} a - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y_0} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0} a^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{y_0} a^2 \\ & - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Big|_{y_0} a^2 + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_0} a^3 - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Big|_{y_0} a^3 - \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y_0} a^3 \right. \\ & \left. + \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \Big|_{y_0} a^3 \right] + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} f(x_0 - a, y_0 + a) = & f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} a + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y_0} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0} a^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{y_0} a^2 \\ & - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Big|_{y_0} a^2 + \frac{1}{3} \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_0} a^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Big|_{y_0} a^3 + \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y_0} a^3 \right. \\ & \left. - \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \Big|_{y_0} a^3 \right] + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$f(x_0 - a, y_0 - a) = f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} a - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y_0} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0} a^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{y_0} a^2$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Big|_{y_0} a^2 + \frac{1}{3} \left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_0} a^3 - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Big|_{y_0} a^3 - \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{y_0} a^3 \right. \\
 & \left. - \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \Big|_{y_0} a^3 \right] + \dots
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Somando as expressões (A.1-A.4) temos:

$$\begin{aligned}
 \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{(x_0, y_0)} & = f(x_0 + a, y_0) + f(x_0 - a, y_0) + f(x_0, y_0 + a) \\
 & + f(x_0, y_0 - a) - 4f(x_0, y_0).
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Semelhantemente, a soma das expressões (A.5-A.8) conduz a:

$$\begin{aligned}
 2 \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{(x_0, y_0)} & = f(x_0 + a, y_0 + a) + f(x_0 + a, y_0 - a) \\
 & + f(x_0 - a, y_0 + a) + f(x_0 - a, y_0 - a) \\
 & - 4f(x_0, y_0).
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Por último, dividindo a equação (A.9) por 6 e a (A.10) por 12 e em seguida somando-as obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{(x_0, y_0)} & = \frac{1}{6} \left[ f(x_0 + a, y_0) + f(x_0 - a, y_0) + f(x_0, y_0 + a) \right. \\
 & \left. + f(x_0, y_0 - a) \right] + \frac{1}{12} \left[ f(x_0 + a, y_0 + a) \right. \\
 & + f(x_0 + a, y_0 - a) + f(x_0 - a, y_0 + a) \\
 & \left. + f(x_0 - a, y_0 - a) \right] - f(x_0, y_0).
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Obtivemos portanto uma expressão para o laplaciano no ponto  $(x_0, y_0)$  por uma expansão em série de Taylor até a 4ª ordem. Essa é uma forma isotrópica de discretização do laplaciano. O truncamento das expansões acima fornecem uma boa aproximação sempre que o parâmetro  $a$  for muito pequeno, isto é:  $(a \ll 1)$ . O que fazemos no CDS é considerar válida essas expansões mesmo no caso de  $a = 1$ . Essa consideração será razoável se fizermos a hipótese de que as derivadas são todas pequenas ( $\ll 1$ ), portanto é nesse regime que temos que trabalhar. É comum escrever a última equação numa forma mais compacta:

$$\nabla_{CDS}^2 f = \langle\langle f \rangle\rangle - f, \tag{A.12}$$

com

$$\langle\langle f \rangle\rangle \equiv \frac{1}{6} \sum_{NN} f + \frac{1}{12} \sum_{NNN} f. \tag{A.13}$$

## A.2 Inclusão da Matriz $K$ nas Equações

A partir das equações (A.12) e (A.13), podemos escrever o laplaciano discretizado de uma função  $\phi$ , como:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi = & \frac{1}{2} \{ [\phi(i+1, j) - \phi(i, j)] + [\phi(i-1, j) - \phi(i, j)] \\ & + [\phi(i, j+1) - \phi(i, j)] + [\phi(i, j-1) - \phi(i, j)] \} \\ & + \frac{1}{4} \{ [\phi(i+1, j+1) - \phi(i, j)] + [\phi(i-1, j+1) - \phi(i, j)] \\ & + [\phi(i-1, j-1) - \phi(i, j)] + [\phi(i+1, j-1) - \phi(i, j)] \} + \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Incluindo a matriz  $K$ , temos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi = & \frac{1}{2} \{ [K(i, j, i+1, j)\phi(i+1, j) - K(i+1, j, i, j)\phi(i, j)] \\ & + [K(i, j, i-1, j)\phi(i-1, j) - K(i-1, j, i, j)\phi(i, j)] \\ & + [K(i, j, i, j+1)\phi(i, j+1) - K(i, j+1, i, j)\phi(i, j)] \\ & + [K(i, j, i, j-1)\phi(i, j-1) - K(i, j-1, i, j)\phi(i, j)] \} \\ & + \frac{1}{4} \{ [K(i, j, i+1, j+1)\phi(i+1, j+1) - K(i+1, j+1, i, j)\phi(i, j)] \\ & + [K(i, j, i-1, j+1)\phi(i-1, j+1) - K(i-1, j+1, i, j)\phi(i, j)] \\ & + [K(i, j, i-1, j-1)\phi(i-1, j-1) - K(i-1, j-1, i, j)\phi(i, j)] \\ & + [K(i, j, i+1, j-1)\phi(i+1, j-1) - K(i+1, j-1, i, j)\phi(i, j)] \} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Por um processo análogo ao caso do laplaciano encontramos a derivada em  $x$ , como:

$$\begin{aligned} \partial_x \phi = & \frac{2}{3} \{ [\phi(i+1, j) - \phi(i, j)] - [\phi(i-1, j) - \phi(i, j)] \} \\ & - \frac{1}{12} \{ [\phi(i+2, j) - \phi(i, j)] - [\phi(i-2, j) - \phi(i, j)] \} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Que reescrevemos com a matriz  $K$ , como segue:

$$\begin{aligned} \partial_x \phi = & \frac{2}{3} \{ [K(i, j, i+1, j)\phi(i+1, j) - K(i+1, j, i, j)\phi(i, j)] \\ & - [K(i, j, i-1, j)\phi(i-1, j) - K(i-1, j, i, j)\phi(i, j)] \} \\ & - \frac{1}{12} \{ [K(i, j, i+2, j)\phi(i+2, j) - K(i+2, j, i, j)\phi(i, j)] \\ & - [K(i, j, i-2, j)\phi(i-2, j) - K(i-2, j, i, j)\phi(i, j)] \} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

A derivada em  $y$ , tem uma forma final análoga a da derivada em  $x$ , porém as células em que acontecem fluxos estão na direção  $j$ .

Em nosso modelo computacional utilizamos apenas primeiros vizinhos, contudo colocamos aqui esta forma com segundos e terceiros vizinhos para mostrar como futuras aplicações mais sofisticadas poderão ser implementadas.