

## 4. Resultados e Conclusões

Neste capítulo, vamos testar os modelos apresentados face aos dados empíricos do Ibovespa.

Assumindo que o sistema é ergódico, tal que a média no ensemble é equivalente à média no tempo, nós comparamos as distribuições  $P^*(\mathbf{n})$  calculadas no capítulo anterior com a distribuição empírica  $P^E(\mathbf{n})$  extraída da série temporal.

Os parâmetros dos modelos são obtidos minimizando-se o desvio quadrático médio  $\sum_{\mathbf{n}} [P^E(\mathbf{n}) - P^*(\mathbf{n})]^2$ , onde a soma é sobre os valores  $\mathbf{n}$  disponíveis em forma de histogramas. Deve-se lembrar que os três parâmetros de controle  $\gamma$ ,  $\theta$  e  $\xi$  destes modelos se reduzem a dois parâmetros de ajuste independentes, a saber,  $\theta$  e  $\mathbf{a} \equiv \mathbf{g}/\mathbf{x}^2$ .

### 4.1 Ajuste dos Modelos para a Volatilidade I

Na figura 4.1 apresentamos o ajuste dos modelos estudados para a Volatilidade I.

A partir de uma inspeção visual, os modelos Log-normal e de Miccichè *et. al.* foram os que melhor descreveram a distribuição empírica. Os parâmetros  $\theta$  e  $\alpha$  obtidos a partir do ajuste para estes modelos estão mostrados na tabela abaixo.

Tabela 4.1: Parâmetros encontrados para os melhores modelos para Volatilidade I.

Modelo	Parâmetros	
	$q$	$\mathbf{a}$
Log-normal	$-3,99 \pm 0,01$	$3,08 \pm 0,06$
Micchichè <i>et. al.</i>	$0,0225 \pm 0,0003$	$2,50 \pm 0,10$

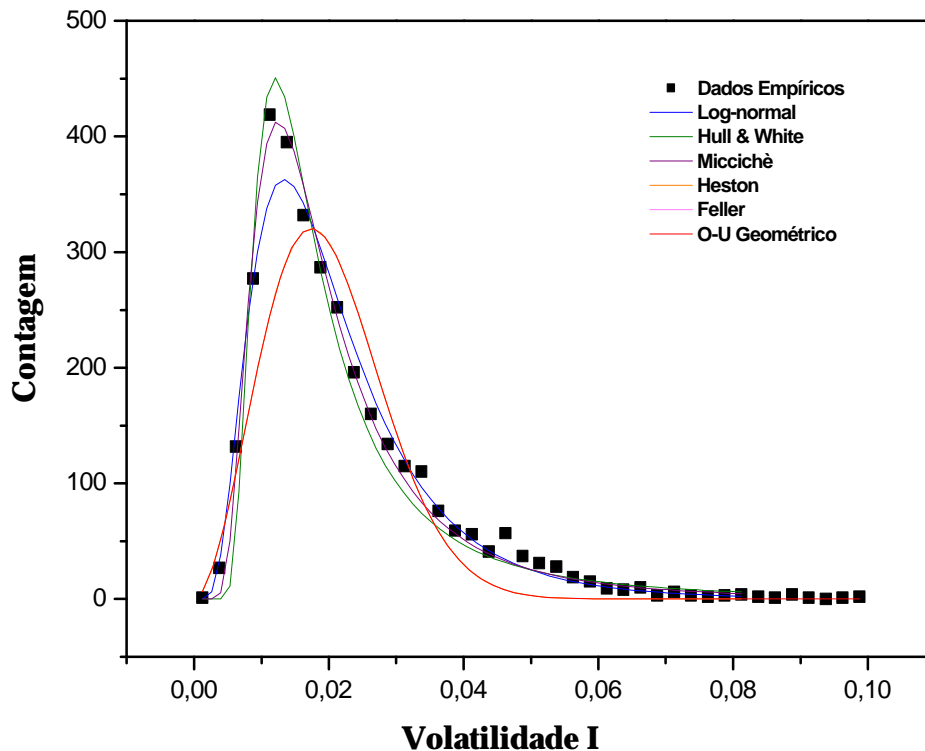


Fig. 4.1. Gráfico linear dos ajustes dos modelos para Volatilidade I.

Estes valores devem ser comparados com os valores médios empíricos. O parâmetro  $q$  está relacionado ao primeiro momento das distribuições. Para o modelo Log-normal,  $q = \langle \ln n \rangle$ , e para o modelo de Micciché *et.al.*,  $q = \langle n \rangle$  (ver Apêndice F). Comparando-se diretamente com os dados das Tabelas (2.1) e (2.3), observa-se ótima concordância com os valores empíricos da Volatilidade I a saber,  $\langle n_I \rangle \cong 0,02$  e  $\langle \ln n_I \rangle \cong -3,98$

O parâmetro  $a \equiv g/x^2$  está relacionado ao segundo momento ou à variância das distribuições. Identificando para a distribuição de Micciché *et.al.*,  $\text{Var}[n] = q^2(a-1)^{-1}$  e para distribuição log-normal,  $\text{Var}[\ln v] = \alpha^{-1}$ , (ver apêndice F), a partir dos ajustes encontrados obtém-se as estimativas:  $\text{Var} \langle n_I \rangle \cong 0,0003$ , segundo o modelo de Micciché *et.al.* e  $\text{Var}[\ln n_I] \cong 0,32$ , segundo o modelo Log-normal.

Estes resultados devem ser comparados com os dados das tabelas 2.1 e 2.3, a saber,  $w^2 = 0,0002$  e  $\ell^2 = 0,34$ , respectivamente, que indicam boa concordância com os dados empíricos.

Para melhor visualizar a qualidade dos ajustes dos diversos modelos apresentamos também os resultados encontrados em gráfico semi-log e log-log.

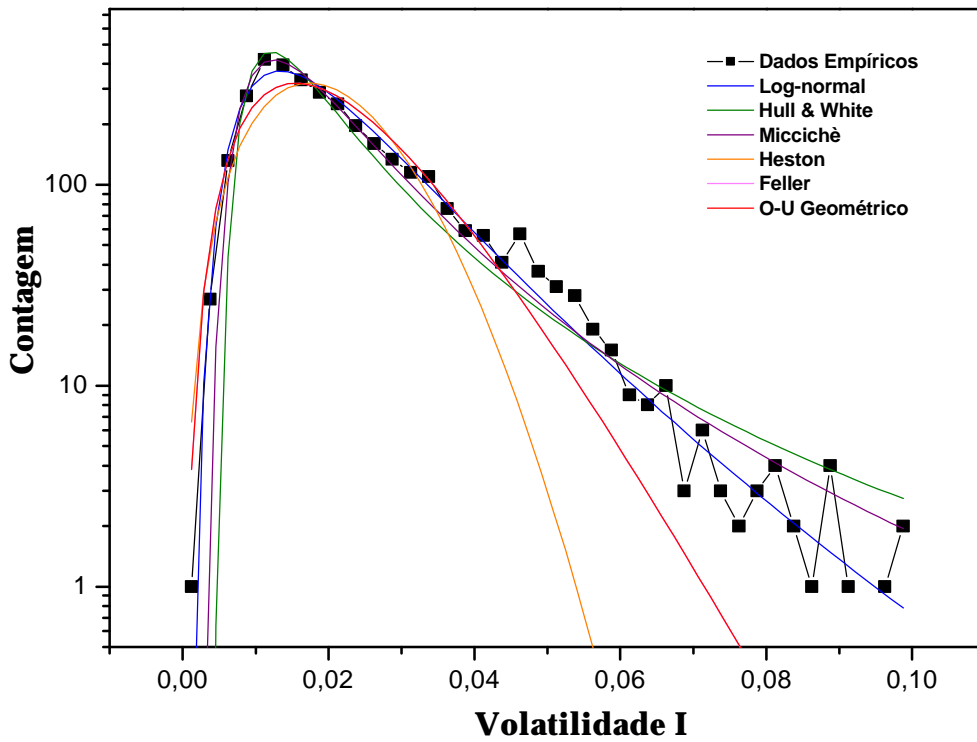


Fig. 4.2. Gráfico semi-log dos ajustes dos modelos para Volatilidade I.

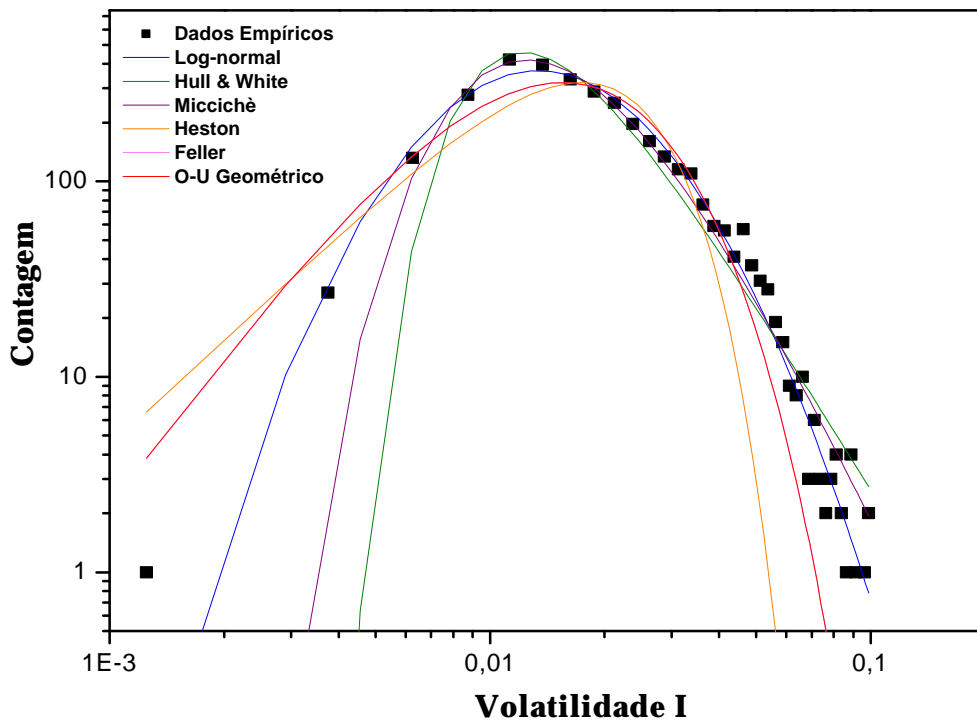


Fig. 4.3. Gráfico em escala logarítmica dos fits para Volatilidade I.

Observa-se pelas figuras 4.2 e 4.3 que os modelos Hull & White e Micciché *et.al.* subestimam a frequência dos dados empíricos para valores pequenos de volatilidade enquanto os modelos de Heston, Feller e O-U geométricos subestimam a cauda da distribuição empírica.

Com o objetivo de avaliarmos de forma objetiva os diversos modelos, utilizamos o teste de hipótese Qui-Quadrado. Este teste estatístico consiste em calcular a soma dos desvios quadráticos do modelo hipotético em relação aos dados empíricos, obtendo-se o parâmetro  $c_0^2$ . Segundo este teste (ver apêndice G), obtém-se um limiar de rejeição,  $c_{r,k}^2$ , onde  $r$  representa o nível de significância do teste e  $k$  o número de graus de liberdade do problema. Para  $c_0^2 > c_{r,k}^2$ , o modelo é rejeitado com nível  $(1 - r)$  de confiança.

A aplicação do teste de hipótese Qui-Quadrado mostrou que apenas a hipótese de log-normalidade da distribuição da volatilidade I não pode ser rejeitada, com nível de significância de 0,5%.

Na tabela abaixo apresentamos o resultado do teste Qui-Quadrado para os modelos estudados.

Tabela 4.2. Resultados do Teste de  $c^2$  aplicado aos diversos modelos para Volatilidade I.

Modelo	$c_{0,005,40}^2 = 66,77$	
	$c_0^2$	Resultado
Log-normal	61,70	Aceito!
Hull & White	251,91	Rejeitado
Micciché <i>et.al.</i>	114,98	Rejeitado
Heston	546,73	Rejeitado
Feller	250,19	Rejeitado
O-U Geométrico	250,19	Rejeitado

Vê-se assim que as outras distribuições forneceram altos valores de  $c_0^2$ , ou seja são rejeitados fortemente.

## 4.2 Ajuste dos Modelos para a Volatilidade II

Na figura 4.4 apresentamos o ajuste dos modelos estudados para a Volatilidade II.

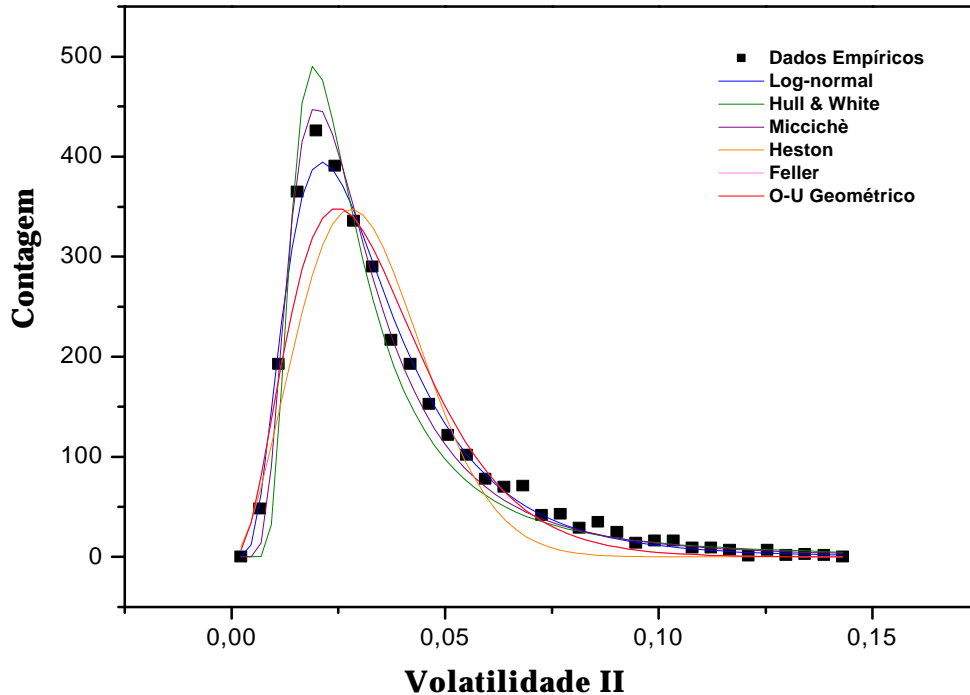


Fig. 4.4. Gráfico linear dos ajustes dos modelos para Volatilidade II.

Novamente, por inspeção visual, os modelos Log-normal e de Miccichè *et.al.* foram os que melhor descreveram os dados experimentais. Os parâmetros  $\theta$  e  $\alpha$  obtidos a partir do ajuste desses modelos estão mostrados na tabela abaixo.

Tabela 4.3: Parâmetros encontrados para os melhores modelos para Volatilidade II.

Modelo	Parâmetros	
	$q$	$a$
Log-normal	$-3,52 \pm 0,02$	$2,96 \pm 0,08$
Micchichè <i>et.al.</i>	$0,0369 \pm 0,0006$	$2,33 \pm 0,09$

Comparando-se o parâmetro  $q$  com os valores médios mostrados nas tabelas (2.1) e (2.3), onde identificamos  $q = \langle n \rangle$  e  $q = \langle \ln n \rangle$  para os modelos Miccichè *et.al.* e de Log-normal, respectivamente (ver apêndice F), obtém-se

novamente ótima concordância com valores empíricos da Volatilidade II a saber,  $\langle n_{II} \rangle \cong 0,04$  e  $\langle \ln n_{II} \rangle \cong -3,5$ .

A partir dos ajustes encontrados e identificando  $\text{Var}[v] = \theta^2 (\alpha-1)^{-1}$  e  $\text{Var}[\ln v] = \alpha^{-1}$  para os modelos de Micciché *et.al.* e Log-normal respectivamente (ver apêndice F) obtém-se as estimativas:  $\text{Var}[n_{II}] = 0,006$ , segundo o modelo de Micciché *et.al.* e  $\text{Var}[\ln n_{II}] \cong 0,34$ , segundo o modelo Log-normal.

Estes resultados devem ser comparados com os valores empíricos  $w^2 \cong 0,001$  e  $\ell^2 \cong 0,35$ , dados nas tabelas 2.1 e 2.3 respectivamente, que indicam novamente boa concordância com os dados empíricos..

Apresentamos nas figuras 4.5 e 4.6 os ajustes encontrados de todos os modelos para a Volatilidade II em gráfico semi-log e log-log.

Enquanto o modelo Log-normal descreve bem toda a faixa de valores empíricos, assim como no caso da Volatilidade I, os modelos de Micciché *et.al.* e de Hull & White falham na descrição dos valores pequenos de volatilidade e os modelos de Heston, Feller e O-U geométrico fornecem caudas mais curtas que os dados empíricos, conforme se vê pelas figuras 4.5 e 4.6.

Realmente, a aplicação do teste de hipótese Qui-Quadrado mostrou que apenas a hipótese de log-normalidade não pode ser rejeitada, utilizando-se nível de significância de 0,5% (ver apêndice G). Na tabela abaixo, apresentamos o valor do teste Qui-Quadrado para os modelos estudados. Com exceção do modelo Log-normal, todas as outras distribuições apresentaram alto nível de rejeição.

Tabela 4.4: Resultados do teste de  $c^2$  aplicado aos diversos modelos para Volatilidade II.

$c_{0,005,33}^2 = 57,60$		
Modelos	$c_0^2$	Resultado
Log-normal	51,13	Aceito!
Hull & White	266,96	Rejeitado
Micciché <i>et.al.</i>	128,12	Rejeitado
Heston	534,79	Rejeitado
Feller	228,88	Rejeitado
O-U Geométrico	228,88	Rejeitado

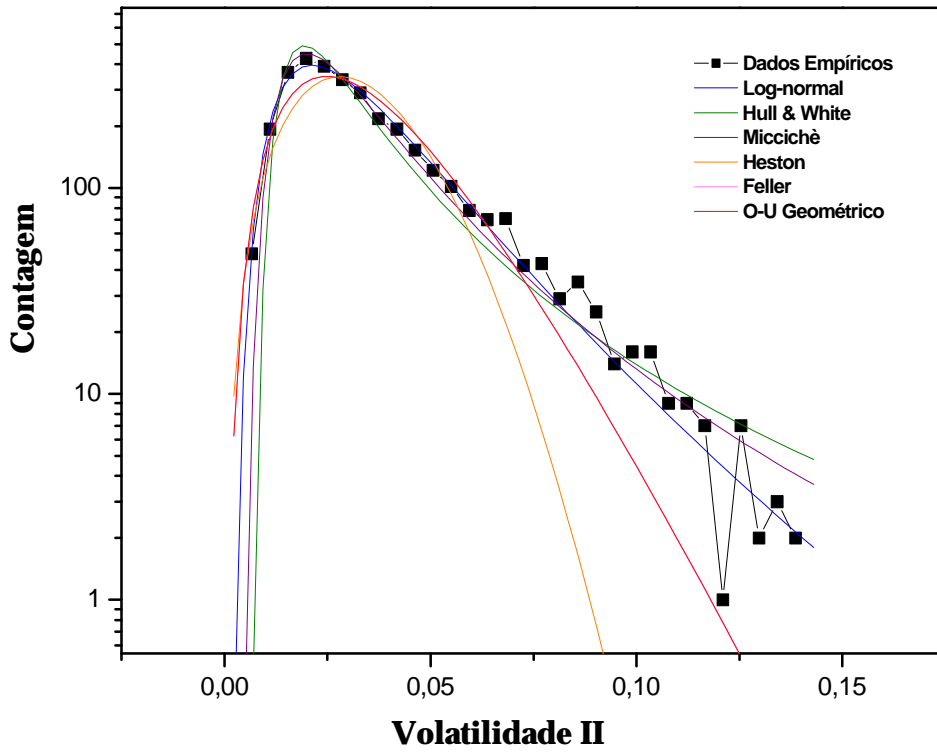


Fig. 4.5. Gráfico semi-log dos ajustes dos modelos para Volatilidade II.

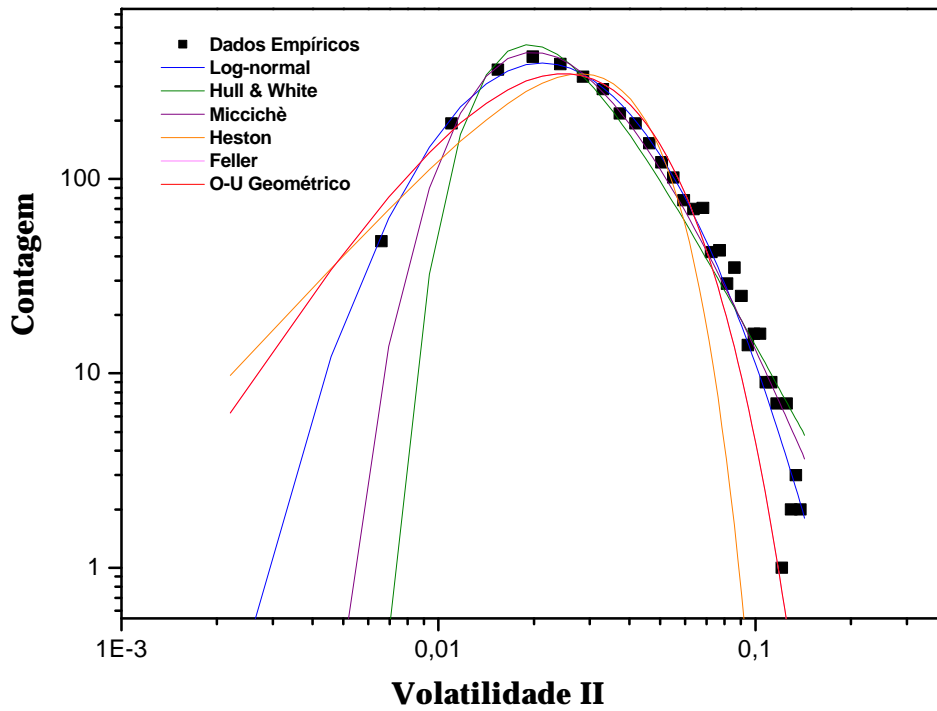


Fig. 4.6. Gráfico em escala logarítmica dos ajustes dos modelos para Volatilidade II.

### 4.3 Ajuste dos Modelos para a Volatilidade III

No caso da definição de volatilidade III, todos os modelos apresentaram melhores resultados. Na figura 4.7 apresentamos os ajustes encontrados.

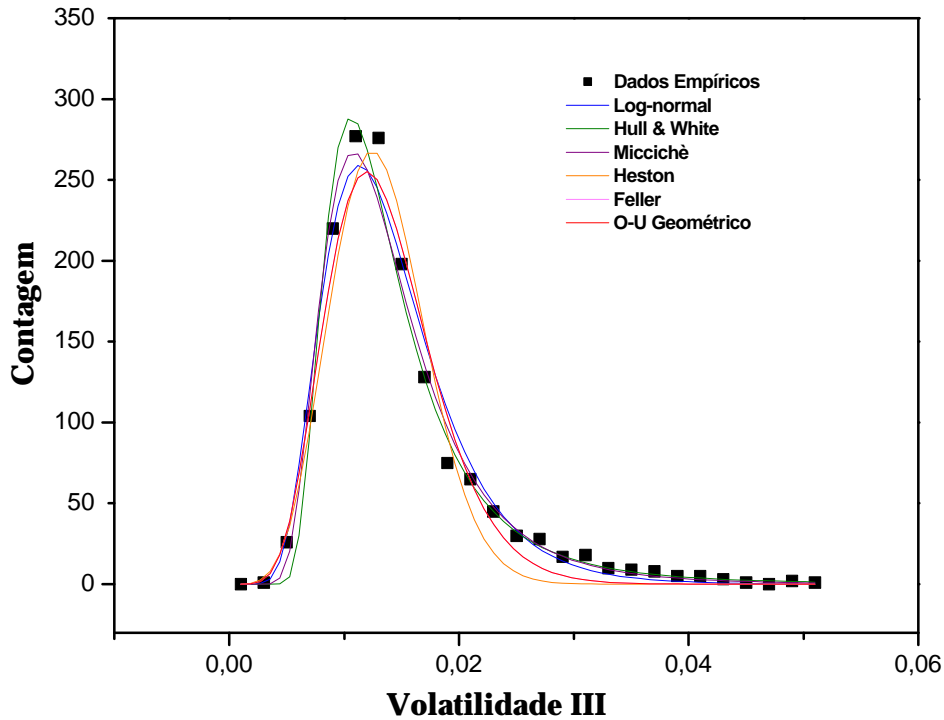


Fig. 4.7. Gráfico linear dos ajustes dos modelos para Volatilidade III

Na tabela abaixo, mostramos os valores  $\alpha$  e  $\theta$  obtidos para os modelos que apresentaram melhor ajuste visual.

Tabela 4.5: Parâmetros encontrados para os melhores modelos para Volatilidade III.

Modelo	Parâmetros	
	$q$	$a$
Log-normal	$-4,33 \pm 0,01$	$6,53 \pm 0,20$
Hull & White	$0,00029 \pm 0,00001$	$0,94 \pm 0,08$
Micchichè <i>et.al.</i>	$0,0146 \pm 0,0002$	$5,61 \pm 0,27$

A partir dos parâmetros mostrados na tabela 4.5 e os dados empíricos nas tabelas (2.1) e (2.3), podemos comparar as estimativas de  $\theta$  para as distribuições Log-normal, de Miccichè *et.al.* e de Hull & White respectivamente, com os valores de  $\langle \ln n \rangle$ ,  $\langle n \rangle$  e  $\langle n^2 \rangle$  (ver apêndice F). Os valores estimados para  $\theta$  nos



dois primeiros modelos estão em bom acordo com os resultados empíricos, a saber,  $\langle \ln \mathbf{n}_{III} \rangle \cong -4.3$  e  $\langle \mathbf{n}_{III} \rangle \cong 0,02$ . O valor de  $\langle \mathbf{n}_{III}^2 \rangle$  pode ser obtido da tabela (2.1) através de  $\langle \mathbf{n}_{III}^2 \rangle = \langle \mathbf{n}_{III} \rangle^2 + \mathbf{w}^2$ , fornecendo o valor  $\langle \mathbf{n}_{III}^2 \rangle = 0.0005$ , que é da ordem de grandeza do parâmetro  $\theta$  encontrado para o modelo Hull & White.

Os parâmetros  $\alpha$  dos modelos de Miccichè *et.al.* e Log-normal estão relacionados à variância das distribuições através de  $\text{Var}[\mathbf{n}] = \mathbf{q}^2 (\mathbf{a} - 1)^{-1}$  e  $\mathbf{a}^{-1} = \text{Var}[\ln \mathbf{n}]$  respectivamente, fornecendo as estimativas:  $\text{Var}[\mathbf{n}_{III}] \cong 0,5 \cdot 10^{-4}$  e  $\text{Var}[\ln \mathbf{n}_{III}] \cong 0,15$ . Comparando-se com os dados empíricos mostrados nas tabelas 2.1 e 2.3, a saber  $\mathbf{w}^2 \cong 1,0 \cdot 10^{-4}$  e  $\ell^2 \cong 0,18$ , respectivamente, ambos os modelos fornecem estimativas consistentes com os dados empíricos.

Deve-se observar também que, apesar da semelhança das equações diferenciais estocásticas dos modelos Hull & White e Miccichè *et.al.* (dados pela equação (3.12) com  $\mathbf{d} = 1$ , sendo  $x \equiv \mathbf{J} = \mathbf{v}^2$  (volatilidade quadrática) ou  $x \equiv \mathbf{v}$  (volatilidade), respectivamente), os valores encontrados para os parâmetros nos dois modelos não devem ser equivalentes, uma vez que tanto o valor médio  $\mathbf{q}$  quanto a taxa de reversão à média relativa  $\mathbf{a} = \mathbf{g}/\mathbf{x}^2$  a princípio são diferentes, pois descrevem o comportamento de variáveis estocásticas diferentes.

Isto pode ser ilustrado analisando-se a equação diferencial estocástica do modelo Hull & White para a volatilidade. A partir da equação diferencial estocástica para volatilidade quadrática, eq. (3.12) com  $\mathbf{d} = 1$ , e usando o Lema de Itô [22] para mudança de variável, obtém-se:

$$d\mathbf{n} = \frac{1}{2\mathbf{n}} \left[ \left[ -\mathbf{g}(\mathbf{n}^2 - \mathbf{q}) - \frac{1}{2} \mathbf{x}^2 \mathbf{n}^2 \right] dt + \mathbf{x} \mathbf{n}^2 dz \right] \quad (4.1)$$

Reescrevendo (4.1):

$$d\mathbf{n} = \frac{1}{2\mathbf{n}} \left[ -\mathbf{g}'(\mathbf{n}^2 - \mathbf{q}') dt + \mathbf{x} \mathbf{n}^2 dz \right] \quad (4.2)$$

com  $\mathbf{g}' = \mathbf{g} + \mathbf{x}^2/2$  e  $\mathbf{q}' = \mathbf{g}\mathbf{q}/\mathbf{g}'$ .

Vê-se assim que os parâmetros que têm significado “econofísico” equivalentes dos modelos Hull & White e Micciché *et.al.* são diferentes.

Apresentamos nas figuras abaixo os ajustes encontrados para todos os modelos estudados para a Volatilidade III através de gráficos semi-log e log-log.

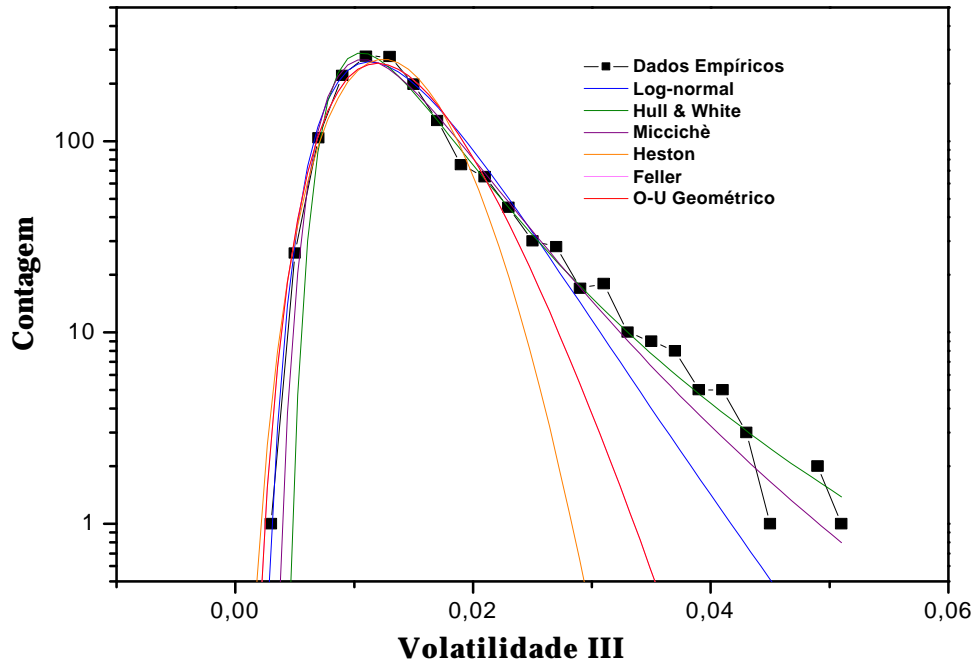


Fig. 4.8. Gráfico semi-log dos ajustes dos modelos para Volatilidade III.

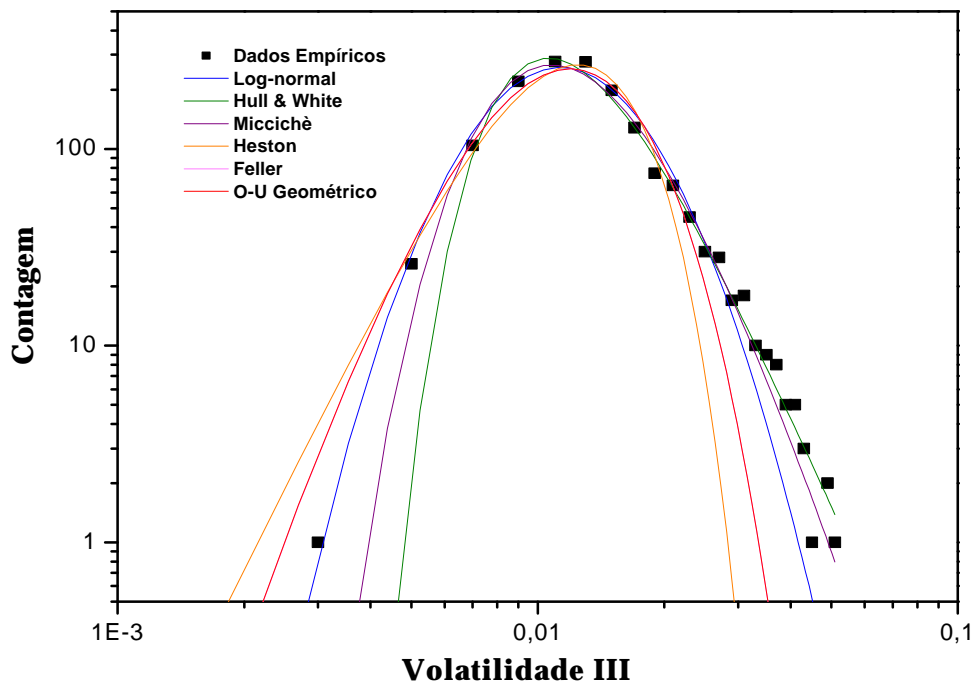


Fig. 4.9. Gráfico em escala logarítmica dos ajustes dos modelos para Volatilidade III.

Observa-se claramente pelas figuras 4.8 e 4.9 que o modelo Log-normal neste caso descreve bem os valores baixos de volatilidade mas subestima a cauda da distribuição. Já o modelo Hull & White superestima a volatilidade nesta região, enquanto o modelo de Micciché *et.al.* fornece cauda com comportamento intermediário entre a da distribuição log-normal e a de Hull & White. Os modelos de Heston, Feller e O-U Geométrico fornecem caudas mais curtas do que as observadas nos dados empíricos.

Utilizando o teste Qui-Quadrado para a Volatilidade III, apenas a hipótese do modelo de Micciché *et.al.* não pode ser rejeitada com nível de significância de 0.5%.

Na tabela abaixo apresentamos os resultados para os vários modelos.

Tabela 4.6: Resultados do teste de  $\chi^2$  aplicado aos diversos modelos para Volatilidade III.

$\chi^2_{0.005,26} = 48,29$		
Modelos	$\chi^2_0$	Resultado
Log-normal	56,71	Rejeitado
Hull & White	52,78	Rejeitado
Micciché <i>et.al.</i>	36,15	Aceito!
Heston	194,18	Rejeitado
Feller	119,61	Rejeitado
O-U Geométrico	119,61	Rejeitado

De forma geral, os modelos Log-normal e Micciché *et.al.* foram os que melhor descreveram os dados empíricos do Ibovespa. Os modelos Feller, O-U geométrico e o de Heston não servem para modelar estes dados.

Tais resultados estão de acordo com os obtidos para outros índices mercados a saber:

- a distribuição de volatilidade para o NYSE, obtida a partir de dados de retornos diários de acordo com a definição I dada por (2.4) e para várias janelas temporais T, é bem descrita pela distribuição log-normal [20];
- ainda de acordo com a definição I, utilizando-se retornos intradiários e várias janelas temporais T, a distribuição de valores intermediários de volatilidade para o S&P500 é descrita por distribuição log-normal porém com cauda da distribuição descrita por lei de potência;
- resultados recentes para a volatilidade do mercado americano, utilizando-se a definição III dada por (2.7) e retornos intra-diários, mostram que a distribuição

de volatilidade diária é melhor descrita pela distribuição de Micciché *et.al.* [27], que possui cauda em lei de potência e cujo valor estimado do parâmetro  $\mathbf{a} = 4.3$  é comparável ao encontrado aqui para o mercado brasileiro,  $\mathbf{a} = 5.6$ . Deve-se ressaltar porém o caráter não-universal deste expoente, uma vez que tanto a taxa de reversão à média  $\gamma$  quanto a amplitude de ruído  $\xi$  dependem de cada mercado.

Comparando-se as distribuições estacionárias dos modelos de Micciché *et.al.* eq.(3.21) com as dos modelos O-U geométrico eq.(3.11) ou Feller eq.(3.14), observa-se que as distribuições estacionárias são equivalentes por uma troca  $\mathbf{n} \leftrightarrow 1/\mathbf{n}$ .

Investigando a equação diferencial estocástica do modelo de Micciché *et.al.*,

$$dn = -g(n - q)dt + \mathbf{x}ndz \quad (4.3)$$

e usando o Lema de Itô para mudança de variável  $\mathbf{n}' = 1/\mathbf{n}$ , obtém-se:

$$dn' = -g'(n' - q')n'dt + \mathbf{x}n'dz \quad (4.4)$$

Comparando-se com (3.9), identificamos (4.4) como descrevendo o processo O-U geométrico com parâmetros modificados:

$$g' = gq \quad \text{e} \quad q' = \frac{1 + 2\mathbf{a}^{-1}}{q} \quad (4.5)$$

Para confirmar a validade do modelo de Micciché *et.al.* no caso da Volatilidade III, investigamos as propriedades estatísticas do inverso da volatilidade diária. Na tabela seguinte mostramos os resultados.

Tabela 4.7: Dados estatísticos das distribuições para o inverso da volatilidade.

	Média	Variância ( $w^2$ )	Assimetria	Curtose
$1/v_I(t)$	63,28	1471	1,93	7,46
$1/v_{II}(t)$	39,08	545	1,52	3,45
$1/v_{III}(t)$	79,34	1034	1,02	2,44

A seguir, apresentamos os gráficos com os ajustes dos modelos estudados em escala linear, semi-log e log-log para a Volatilidade III.

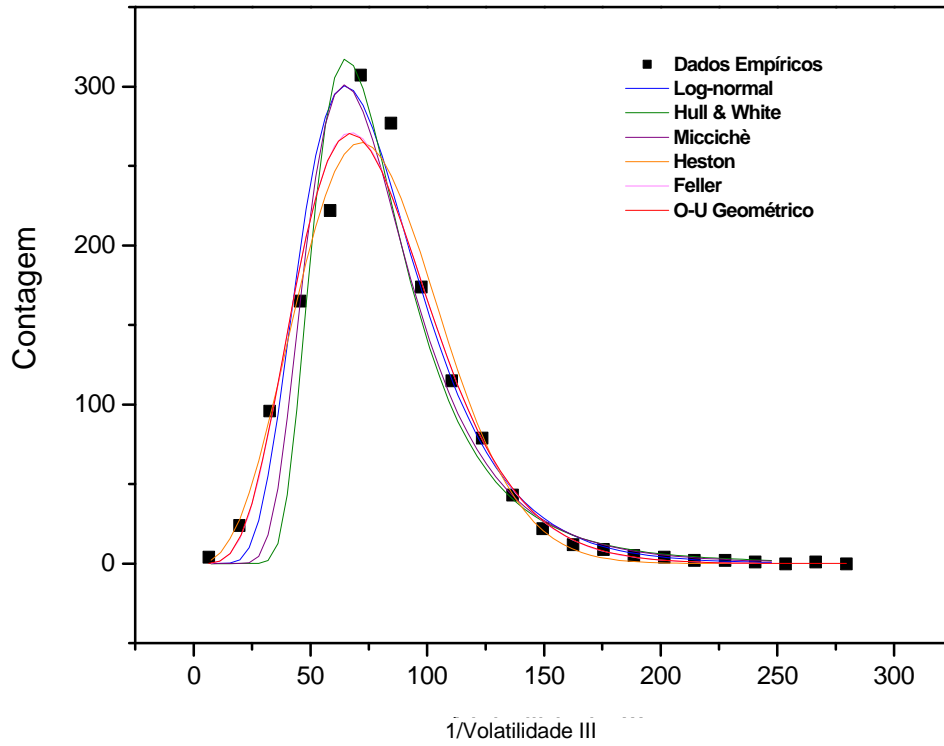


Fig. 4.10. Gráfico linear dos ajustes dos modelos para 1/Volatilidade III.

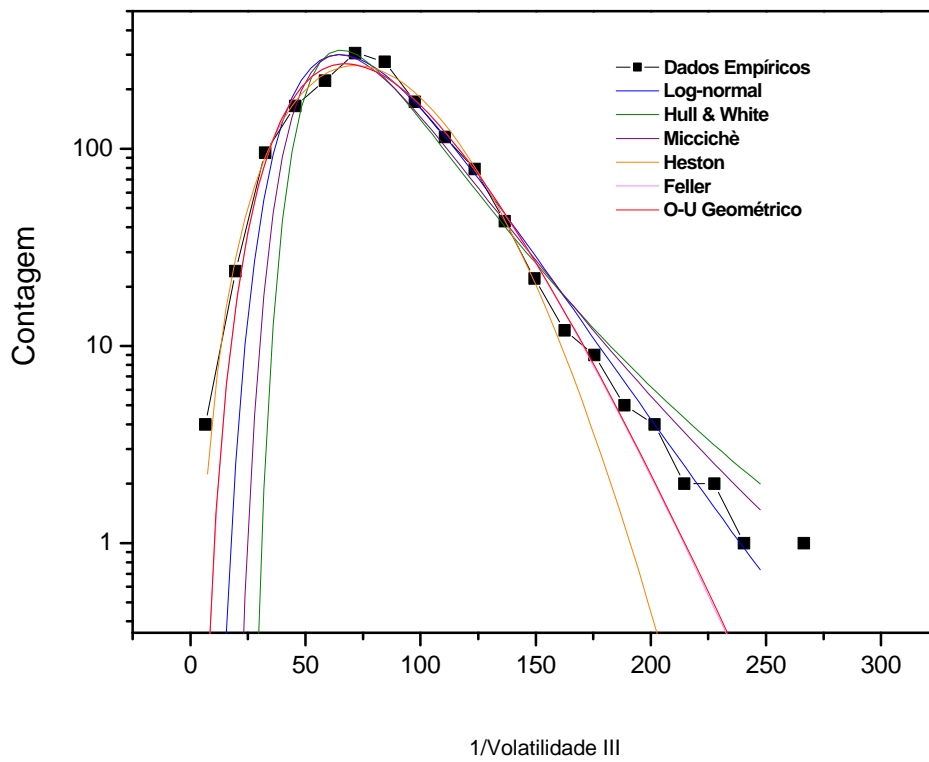


Fig. 4.11. Gráfico semi-log dos ajustes dos modelos para 1/Volatilidade III.

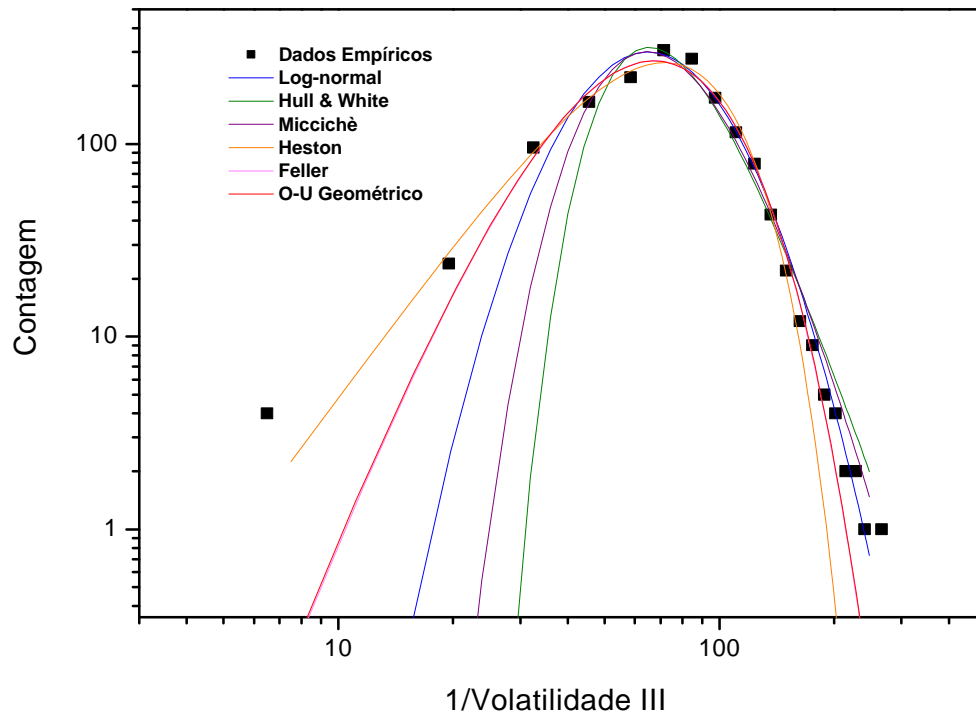


Fig. 4.12. Gráfico em escala logarítmica dos ajustes dos modelos para 1/Volatilidade III.

Observa-se pelas figuras 4.11 e 4.12 que agora, os modelos mais adequados para descrever a distribuição empírica são os modelos de Heston, Feller e O-U geométrico, principalmente para baixos valores de  $1/n$ .

O teste Qui-Quadrado confirmou este resultado, mostrado na tabela abaixo.

Tabela 4.8: Resultados Teste  $\chi^2$  aplicado aos diversos modelos para 1/Volatilidade III.

Modelo	$\chi^2_{0,005,22} = 42,80$	
	$\chi^2_0$	Resultado
Log-normal	112,20	Rejeitado
Hull & White	288,28	Rejeitado
Micciché <i>et.al</i>	204,49	Rejeitado
Heston	48,40	Rejeitado
Feller	52,33	Rejeitado
O-U Geométrico	41,65	Aceito!

Neste caso, o único modelo não rejeitado, ao nível de significância de 0.5% foi o modelo O-U geométrico.

Na tabela a seguir apresentamos os valores de parâmetros encontrados para os três melhores modelos.

Tabela 4.9: Parâmetros encontrados nos melhores modelos para 1/Volatilidade III.

Modelos	Parâmetros	
	$q'$	$a'$
Heston	$7053 \pm 137$	$0,00026 \pm 0,00001$
Feller	$79,66 \pm 0,80$	$0,081 \pm 0,003$
O-U Geométrico	$92,08 \pm 1,02$	$0,081 \pm 0,003$

Analisando os parâmetros obtidos pelo ajuste do modelo O-U geométrico dado pela tabela 4.9,  $q' \simeq 92$  e  $a' \simeq 0.08$ , e usando (4.4), obtém-se os parâmetros do modelo de Miccichè *et.al.* para a Volatilidade III,  $a \simeq 5.4$  e  $q \simeq 0.015$ , que estão em excelente acordo com os resultados apresentados na tabela 4.5.

Este resultado vem confirmar o modelo de Miccichè *et.al.* como o mais adequado na descrição do processo dinâmico da volatilidade, de acordo com a definição III.

Conforme já observado, a definição III utiliza dados intradiários que por sua vez apresentam forte correlação, resultando em caudas mais longas para a distribuição do que a descrita pela distribuição log-normal. Por outro lado, quando consideradas as definições I e II, que utilizam informações em janela temporal diária, a distribuição Log-normal fornece a descrição mais adequada para os dados empíricos.

#### 4.4 Discussão Final

A presença de correlação de longo alcance na série temporal da volatilidade mostra que qualquer modelo de caracterização da série temporal financeira deve incluir necessariamente a dinâmica da volatilidade.

Assim, uma das mais importantes questões no estudo dos retornos de preços é a variabilidade da volatilidade do mercado. Isto é particularmente importante nos mercados em desenvolvimento onde se observa um maior nível médio de incertezas de preço e de risco do que no mercado financeiro desenvolvido.

O processo estocástico da volatilidade, sendo subjacente ao de preços, pode também ser avaliado através das distribuições empíricas de retorno.

Recentemente [29] foi proposto modelo para o processo estocástico de flutuação de preços,  $\{y_t\}$  descrito pelo movimento Browniano Geométrico com volatilidade estocástica dado pela equação:

$$\frac{dy}{y} = \mathbf{m}dt + \mathbf{n}_t dW ,$$

com parâmetro de “drift”  $\mu$  e passos de processo de Wiener  $dW$ . A volatilidade dependente do tempo  $v_t$  caracteriza a amplitude do processo de Wiener e é descrita pelo processo estocástico segundo o modelo de Heston. Este modelo fornece distribuição estacionária de retornos com decaimento exponencial nas caudas, como o observado em alguns mercados e em particular o mercado brasileiro [8]. Mostramos no entanto com nossos resultados que a volatilidade empírica do Ibovespa não pode ser modelada pelo modelo de Heston, o que implica que a dinâmica de preços com variância estocástica para o nosso mercado ainda necessita de uma modelagem adequada.

Ainda é necessário também desenvolver modelos cuja equação estocástica de Itô-Langevin seja mais apropriada para descrever a volatilidade tanto do ponto de vista da dinâmica quanto na forma da função de auto-correlação. Uma vez que a volatilidade tem correlação de longo alcance, este aspecto importante deve ser levado em conta. Desta forma, os modelos tratados aqui, que são tipicamente caracterizados por uma correlação de curto alcance, devem ser generalizados.

Conforme apresentado no capítulo 3, as caudas das distribuições dos vários modelos estudados são caracterizadas pelo parâmetro  $\mathbf{a} \equiv \mathbf{g}/\mathbf{x}^2$ , que dependem tanto da reatividade do mercado  $\xi$  à informação passada quanto da taxa  $\gamma$  de eficiência informacional do mercado. Assim, as caudas das distribuições tem comportamento não-universal. No entanto, assim como o comportamento de memória de longo alcance da volatilidade observada em nosso mercado (apresentada no capítulo 2), é semelhante a dos mercados desenvolvidos, as distribuições estacionárias de melhor ajuste aqui encontradas (apresentadas neste capítulo) são consistentes com os resultados obtidos naqueles mercados. Isto indica que, apesar de diferenças entre instituições e de fluxo de informação nos diversos mercados, produzindo valores diferentes do parâmetro  $\alpha$ , elas não são significativas o suficiente para produzir resultados qualitativamente diferentes com relação à forma da distribuição de volatilidade.