2
Uma revisão dos cálculos de seqüentes intuicionistas

Na década de trinta, Gerhard Gentzen apresentou dois tipos de sistemas formais conhecidos como sistemas de *Dedução Natural* e *Cálculo de Seqüentes.* Nós estudaremos o cálculo de seqüentes e nos referiremos a Dedução Natural somente para esclarecer aspectos do outro tipo de sistema. O objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos envolvidos neste cálculo e realizar uma revisão (não estritamente cronológica) das principais alternativas apresentadas à versão intuicionista de Gentzen.
Em função do caráter introdutório do capítulo, nos limitaremos, em geral, a mostrar as particularidades já presentes nos fragmentos proposicionais. Ainda assim, apresentamos desde o início uma linguagem de primeira ordem.

2.1
Linguagem

Usaremos os seguintes símbolos para uma linguagem (L) de primeira ordem (LPO):

1. Símbolos lógicos:

(i) Símbolos proposicionais: $\wedge, \vee, \rightarrow$.

(ii) Quantificadores: $\forall$ e $\exists$.

(iii) Uma constante para o absurdo: $\perp$.

2. Símbolos não-lógicos:

(i) Parâmetros individuais: $a_1, a_2, ...$ que representaremos com as letras a,b,c,...

(ii) Variáveis ligadas: $x_1, x_2, ...$ que representaremos com as letras x,y,z,...

(iii) Símbolos funcionais: $f_1^n, f_2^n, ...$ para funções de n argumentos que poderemos representar como f,g,h,...

(iv) Símbolos de predicados: $R_1^n, R_2^n, ...$ para representar relações com n argumentos.

(v) Símbolos auxiliares: parênteses.

Definição 1 (Termo) . *t é um* termo *se e somente se:*

(i) t *é um parâmetro individual de L.*

(ii) t *é* $f^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ *onde* $t_1, t_2, ..., t_n$ *são termos e* f^n *é uma constante funcional n-ária.*

Definição 2 (Fórmula) *A é uma* fórmula *se e somente se:*

(i) $A \equiv \perp$.

(ii) A *é* $R^n(t_1, t_2, ..., t_n)$ *onde* $t_1, t_2, ..., t_n$ *são termos e* R^n *é uma letra de predicado n-ária.*

(iii) A *é* $(C \to D), (C \vee D)$ *ou* $(C \wedge D)$ *onde C e D são fórmulas.*

(iii) A *é* $\forall x B(x)$ *ou* $\exists x B(x)$ *onde B(x) é o resultado de substituir as ocorrências do parâmetro 'b' na fórmula B(b).*

Usaremos $A, B, C, ..., A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ...$ como metavariáveis das fórmulas. Nos sistemas com $\perp$ como símbolo primitivo,$\neg A$ será definido como $A \to \perp$ mas nos manteremos fiéis aos textos originais dos autores segundo tenham colocado como constantes primitivas o '$\perp$' ou '$\neg$´.

Definição 3 (Grau de uma fórmula) . *O* grau *de uma fórmula A (que podemos escrever como g(A)) é o número de ocorrências dos símbolos lógicos de A, exceto o símbolo* $\perp$.

2.2
O cálculo de seqüentes apresentado por Gentzen: motivação técnica do sistema e conceitos principais

Na década de trinta, Gerhard Gentzen apresentou em "Investigation into logical deduction"[1] sistemas formais para a lógica clássica e intuicionista denominados sistemas de *Dedução Natural*. A motivação estava vinculada ao estudo das provas matemáticas: *"My starting point was this: The formalization of logical deduction, especially as it has been developed by Frege, Russell, and Hilbert, is rather far removed from the forms of deduction used in practice in mathematical proofs. (...) In contrast, I intended first to set up a formal system which comes as close as possible to actual reasoning".*[2] Nesse sistema, as derivações clássicas podiam considerar como premissa uma instância do princípio do terceiro excluído ou podiam agregar uma regra ao sistema para a eliminação da dupla negação:

[1] Gentzen, G. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, p.68
[2] Gentzen. *The Collected...*,p.68.

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

A regra da dupla negação ficava excluída do sistema de introduções e eliminações e era um ostáculo para Gentzen encontrar uma forma normal das provas em Dedução Natural. Encontrar as provas normais em Dedução Natural foi possível apenas a partir do sistema de Dedução Natural desenvolvido por Prawitz em 1965[3] que substituiria a eliminação da dupla negação pela regra de absurdo clássica:

$$\begin{array}{c} [\neg A] \\ \vdots \\ \dfrac{\bot}{A}\,(\bot_c) \end{array}$$

Até então, o cálculo considerado por Gentzen mais *natural*, não era o mais adequado aos interesses técnicos, isto é, a busca por provas normais. Esse obstáculo fez com que Gentzen formulasse um novo tipo de sistema formal denominado *Cálculo de Seqüentes*. Este tipo de sistema confirmaria a sua adequação para investigações em teoría da prova ao ser usado também nas provas de consistência da aritmética via indução transfinita até ε_0. Essa busca por provas normais motivou o desenho de um novo sistema[4].

Definição 4 (Seqüente) . *Um seqüente é uma expresão da forma* $A_1, ..., A_n \Rightarrow B_1, ..., B_m$ *onde* $A_1, ..., A_n$ *e* $B_1, ..., B_m$ *são seqüencias ordenadas de fórmulas que se denominam respectivamente* antecedente *e* sucedente. *Representaremos seqüências de fórmulas no antecedente e no sucedente com as letras* $\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda, \Sigma, \Omega$, *etc. Se* $m \leq 1$, *dizemos que* $A_1, ..., A_n \Rightarrow B_1, ..., B_m$ *é um* seqüente de sucedente único*; se* $m \geq 0$, *se denomina* seqüente de sucedente múltiplo.

O primeiro caso mencionado acima é interpretado como *uma derivação de* B *a partir das premissas* $A_1, ..., A_n$. As vírgulas no antecedente são consideradas como conjunções implícitas e as vírgulas no sucedente como disjunções implícitas. Assim, considera-se que o significado informal do seqüente

[3] O sistema de Prawitz, denominado C', tem como conjunto de símbolos primitivos a $\wedge, \rightarrow, \forall, \bot$. Em: *Natural Deduction.*

[4] Embora o contexto no qual se desenvolveu o trabalho de Gentzen não seja tema desta tese, podemos considerar a formulação desses sistemas formais no contexto do programa de Hilbert. Vale ressaltar que o corolário e a motivação mais importante para encontrar provas normais era a consistência do sistema. Portanto, podemos apreciar a formulação das regras não somente do ponto de vista da derivavilidade do sistema, mas também a sua adequação para a obtenção de resultados proofteoréticos. Embora esta parte do trabalho de Gentzen seja contemporânea aos resultados de Gödel no início dos anos 30, o própio Gentzen acreditou numa reformulação do programa de Hilbert. Isto pode ser apreciado no texto "The Present State of Research into the Foundations of Mathematics", na pág. 234 de *The Collected Papers of Gerhard Gentzen.*

$A_1, ..., A_n \Rightarrow B_1, ..., B_m$ é o mesmo que o da fórmula $(A_1 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee ... \vee B_m)$. O seqüente de sucedente múltiplo pode ser considerado como uma representação da distinção entre casos[5]. Essa interpretação teve continuidade e é explicada de modo detalhado por Negri e von Plato: *"...we may read a sequent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ as consisting of the open assumptions Γ and the open cases Δ"*[6]. No caso em que $\Delta = \varnothing$, $A_1, ..., A_n$ conduz a uma contradição: *"... the sequent express the fact that on the basis of the assumptions $A_1, ..., A_n$ no possibility remains open, i.e.: the assumptions are incompatible, they lead to a contradiction"*[7]. Se $\Gamma = \varnothing$, então $B_1, ..., B_m$ vale independentemente de qualquer hipótese, portanto, é um teorema. (A apresentação dos sistemas para lógica clássica (LK) e intuicionista (LJ) pode se ver nas Figura 1 e 2 do Apêndice respectivamente).

A seguir desenvolvemos alguns aspetos dos sistemas de seqüentes que nos ajudarão a uma melhor compreensão dos mesmo.

Definição 5 (Derivação) *Seja S um seqüente. Uma derivação de S é uma árvore com um seqüente em cada nó tal que:*

(i) Os seqüentes superiores são os axiomas (ou seqüentes iniciais*) do sistema. De fato, consideraremos que os seqüentes iniciais são derivações de um só nó.*

(ii) Para cada seqüente S que ocorre na árvore (exceto os iniciais), S ocorre imediatamente abaixo de um ou dois seqüentes sendo S o resultado de uma regra de inferência do sistema. A fórmula inferior da árvore é chamada de seqüente final ou conclusão. Uma CF-derivação é uma derivação sem ocorrências da regra de corte.

Definição 6 (Subderivação) *Seja S um seqüente que ocorre numa derivação π. Uma sub-derivação de π determinada por S é a árvore obtida a partir de π eliminando todos os seqüentes abaixo de S.*

Conforme temos apresentado, os antecedente e sucedentes nos sistemas originais de Gentzen são seqüências ordenadas. Porém, poderemos também consider esses grupos de fórmulas como *conjuntos* (coleções de fórmulas nas quais a ordem e o número de ocorrências das fórmulas é irrelevante) ou *multiconjuntos* (coleções de fórmulas nas quais a ordem é irrelevante mas o número de ocorrências é essencial). Nas regras dos sistemas, a fórmula com o conectivo lógico introduzido na conclusão é chamada de *fórmula principal* e

[5]Gentzen. *The Collected...*, p.254
[6]Negri e von Plato. *Structural Proof Theory*, p. 47.
[7]Gentzen. *The Collected ...*, p. 255

as fórmulas ressaltadas na premissa ou premissas são as *fórmulas ativas*. Nas regras de inferência, as letras gregas maiúsculas $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Omega$, etc., representam as fórmulas adicionais que podem ocorrer, e neste caso, não estão ativas. Essas coleções de fórmulas são chamadas de *contextos* das regras.

Regras e contextos

Verificamos que nos sistemas LK e LJ, além das regras de introdução das constantes lógicas, Gentzen apresenta neste cálculo um novo grupo de regras denominadas *estruturais* e, neste caso, não envolvem as constantes lógicas.

Um desenvolvimento detalhado do papel das regras estruturais pode ser encontrado no livro *Substructural Logics* de Schroeder-Heister e Došen. O nome de *lógicas subestruturais* denomina às lógicas que podem ser obtidas mediante a manipulação da parte estrutural da versão clássica. Deste ponto de vista, "*Logical constants are in principle secondary: they are invariant, they play the same role in different structural contexts*"[8]. Então, poderiamos dividir as regras do cálculo de seqüentes em dois grupos: as regras lógicas (ou operacionais) e as regras estruturais. Veremos que o papel de cada grupo não é tão preciso assim porque as regras operacionais escondem, às vezes, aspectos estruturais do sistema. Este aspecto é evidenciado nos sistemas de Kleene e de Dragalin nos quais as regras estruturais podem ser "absorvidas" realizando algumas variações nos contextos das regras operacionais e/ou nos seqüentes iniciais.

As regras operacionais do cálculo de seqüentes podem ser apresentadas de diferentes modos. Consideremos as seguintes versões de $(\wedge_R)$:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B)} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma' \Rightarrow \Delta', B}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta', (A \wedge B)}$$

Na versão da esquerda, as premissas têm *contextos compartilhados*(ou *aditivos*). (LK e LJ são aditivos). As premissas da versão direita têm *contextos independentes* (ou multiplicativos). Disso se seguem as seguintes observações:

(i) As versões aditivas e multiplicativas são equivalentes diante das regras estruturais. No caso dos contextos independentes, a regra de contração é necessária, isto é, é possível produzir a duplicação de algumas hipóteses. Considerando a versão aditiva, as hipóteses são tratadas como se fossem conjuntos. Tal como tem sido afirmado por Girard e lembrado por Dyckhoff, os contextos compartilhados contam como uma contração.

(ii) As regras com duas premissas resultam mais problemáticas na busca por provas já que não sabemos, em princípio, em que modo o contexto

[8] Došen."A Historical Introduction to Substructural Logic". In: *Substructural Logics*, p.1.

da conclusão deve ser dividido nos contextos das premissas. Dado um seqüente $\Gamma \Rightarrow (A \wedge B)$ é mais fácil considerar premissas de contextos compartidos que procurar uma divisão entre Γ e Γ'.

Para o caso de $(\vee_R)$ e $(\wedge_R)$, Gentzen apresenta versões da forma:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B), \Delta}(\vee_R) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B), \Delta}(\vee_R)$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B) \Rightarrow \Delta}(\wedge_L) \qquad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, (A \wedge B) \Rightarrow \Delta}(\wedge_L)$$

Com esta versão de $(\vee_R)$ em LK é necessária a regra de contração para derivar o princípio de terceiro excluído. Uma outra versão é equivalente na presença das regras estruturais:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B), \Delta}(\vee_R)$$

Esta versão é invertível e portanto, mais adequada para a busca de provas. Percíba-se que as regras da lógica clássica podem ser formuladas de modo que sejam invertíveis. Este fato não acontece com as regras de LJ que é aditivo e não pode ter duas fórmulas no sucedente da premissa, nem sequer para o caso de algumas constantes lógicas nos sistemas LJ' ou $IL^{>}$.

O teorema de eliminação do corte

No cálculo de seqüentes, o corte é a única regra que apaga totalmente uma fórmula e não somente algumas ocorrências (como faz a regra de contração). Essa fórmula deletada não é necessariamente uma subfórmula da conclusão. O teorema de eliminação de corte foi referido por Gentzen como *Hauptsatz* (*proposição principal*) e afirma (para un determinado cálculo de seqüentes C):

> *Seja π uma derivação em C do seqüente* $\Gamma \Rightarrow \Delta$*. Então π pode ser transformada em π' livre de corte do mesmo seqüente.*

Nas derivações livres de corte as fórmulas não desaparecem ao longo da derivação o que permite demonstrar a consistência do sistema. O teorema é um resultado sobre a estrutura das derivações e sua conseqüência imediata é o *principio de subfórmula*:

> *Seja π uma derivação de um seqüente S. Todas as fórmulas que ocorrem em π são subfórmulas de S.*

O que nos interessa nesta seção é esclarecer o que compreendemos quando nos referimos a uma prova de eliminação de corte no estilo Gentzen ou "à Gentzen". A prova no estilo Gentzen consiste numa dupla indução sobre o grau da fórmula de corte e o rank do corte que definimos a seguir. Considerando a $\mathrm{R}(\alpha)$ como denotando o rank de uma aplicação α do corte, a R_D como o rank da premissa direita e R_E é o rank da premissa esquerda do corte, podemos definir:

Definição 7 (Rank de uma aplicação de corte) *Se α é uma aplicação do corte, então $R(\alpha) = R_D + R_E$ onde R_D é o maior número de seqüentes consecutivos que tem a fórmula de corte tal que o último seqüente é a premissa direita, e R_E é o maior número de seqüentes consecutivos que têm a fórmula de corte e o último seqüente desse ramo é a premissa esquerda.*

O procedimento reduz os cortes à aplicações de corte com fórmulas de corte de um grau menor. Quando isso não é possível, podemos reduzir as derivações à derivações com fórmula de corte do mesmo grau mas de um rank menor. Nessa situação se pode usar a hipótese indutiva. As novas derivações têm possívelmente um número maior de cortes com fórmulas mais simples ou, se não é o caso, as antigas aplicações são "puxadas" para cima.

O problema para aplicar a técnica de Gentzen radica na presença da regra de contração de modo que a derivação:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \dfrac{A, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}\,(C_L)}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta}\,(corte)$$

tem como resultado de sua redução uma outra derivação com a forma:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow A \quad A, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A, \Gamma' \Rightarrow \Delta}\,(corte)}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta}\,(corte)$$

onde as últimas inferências são o corte com as contrações necessárias em Γ, Γ. Esta redução produz uma aplicação do corte que não tem nem grau menor da fórmula de corte nem rank menor. Para dar conta dos problemas com a regra de contração é introduzida uma versão generalizada do corte, chamada *Mix*, que elimina todas as ocorrências do corte da seguinte forma:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A^n \qquad A^m, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(mix)$$

onde n e m são as ocorrências da fórmula de corte tal que $n, m > 0$. Nota-se que o corte é um caso particular do mix. Na presença de regras estruturais, ambas regras são equivalentes e disso se conclui que a eliminação do corte em cálculo de seqüentes é feita via eliminação do mix.

2.3
A versão intuicionista e as alternativas apresentadas

A apresentação do sistema LJ foi formulada por Gentzen conjuntamente com a versão clássica. A diferença entre as versões clássica e intuicionista se concentra na natureza do seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Conforme mencionado anteriormente, se admitem seqüentes de múltiplo sucedente somente para o caso clássico. Isto é necessário para a derivação do princípio de terceiro excluído. Ao contrário, seqüentes de derivações intuicionistas têm no máximo uma fórmula no sucedente. Este tipo de restrição é referida como uma restrição *global*, enquanto restrições de caráter *local* são consideradas aquelas que concentram o aspecto intuicionista em restrições a determinadas regras de inferência.

Considerando que a passagem de LJ a LK radica na admissão de mais de uma fórmula no sucedente, acostuma-se referir ao sucedente múltiplo como o elemento que representa o aspecto clássico no sistema. Nas seguintes décadas à obra de Gentzen foram formulados diversos sistemas intuicionistas que desenvolveram a idéia de que essa restrição forte na cardinalidade do sucedente podia ser atenuada por restrições locais. Assim, sistemas intuicionistas de múltiplas conclusões foram apresentados restituindo, embora parcialmente, a simetria clássica. Apressentamos, a continuação, vários trabalhos que têm assegurado o aspecto intuicionista dos sistemas em modos diferentes. O primeiro grupo que apresentamos situa o problema no uso irrestrito das regras para determinados operadores lógicos. Tal é o caso de LJ' (o primeiro sistema intuicionista de sucedente múltiplo) e $IL^{>}$ a seguir. Notamos que estes sistemas apresentam também restrições na cardinalidade dos sucedentes, mas isso não é realizado no conceito de seqüente e sim em determinadas regras de inferência.

Os sistemas LJ' e $IL^{>}$.

No início dos anos 50, Maehara [9] apresentou um cálculo intuicionista cuja diferença a respeito do caso clássico eram as seguintes regras de inferência [10]:

[9] O trabalho original de Maehara, "Eine darstellung der intuitionistischen logik in der klassischen" não foi traduzido do alemão.

[10] Essa mesma restrição tem a regra $(\forall_R)$ na apresentação original para lógica de predicados: a partir da premissa $\Gamma \Rightarrow F(a)$ podemos inferir $\Gamma \Rightarrow \forall x F(x)$. No apêndice colocamos o sistema completo embora trabalhamos aqui apenas com a parte proposicional do mesmo. Estudamos com o mesmo critério os demais sistemas deste capítulo exceto o formulado para a Lógica de Domínios Constantes

$$\frac{D, \Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg D}\ (\Rightarrow \neg) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}\ (\Rightarrow\to)$$

No caso de sistemas com o $\perp$ como símbolo primitivo, as regras da negação podem ser consideradas como un caso particular das regras de introdução do condicional. Como podemos perceber, uma instancia da regra:

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}\ (\to_R)$$

é a seguinte figura:

$$\frac{A \Rightarrow A, \perp}{\Rightarrow A, A \to \perp}$$

com a qual se deriva $(A \vee (A \to \perp))$ mediante introdução de uma disjuncão. Isto nos leva a conjeturar que, de fato, o que leva à lógica clássica, no fragmento proposicional, é uma regra $(\to_R)$ sem restrições e não, necessariamente, o sucedente múltiplo. Como veremos nos sistemas que restringem a regra do condicional à direita podemos considerar que, se num seqüente da forma $\Gamma \Rightarrow (A \to B), \Delta$ o condicional foi introduzido pela sua regra operacional, a disjunção no sucedente representada pela vírgula é uma disjunção intuicionista.

Este sistema, (reproduzido integralmente na Figura 3 do apêndice), é apresentado por Takeuti em *Proof Theory* como LJ' e é usado para provar a completude da lógica intuicionista. Também é reproduzido por Dummett[11] como L'. Este sistema, ao qual nos referiremos como LJ', é equivalente a LJ, isto é, se cumpre:

$$\vdash_{LJ'} \Gamma \Rightarrow B_1, ...B_n \text{ se e somente se } \vdash_{LJ} \Gamma \Rightarrow B_1 \vee ... \vee B_n$$

E isto permite extrair como corolário:

$$\vdash_{LJ'} \Rightarrow A \text{ se e somente se } \vdash_{LJ} \Rightarrow A$$

Um fato característico de LJ' é que a regra de enfraquecimento à direita é imprescnidible, como no exemplo seguinte:

$$\frac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow (A \to A)}\ (\to_R)}{\Rightarrow (A \to A), B}\ (W_R)$$

já que o seqüente $\Rightarrow (A \to A), B$ não pode ser derivado a partir de um seqüente inicial do tipo $\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta$ tenod em conta que o condicional não poderia ser introduzido. Isto é, temos seqüentes iniciais com sucedente único e regras que requerem o sucedente único para ser aplicadas. Portanto o sucedente múltiplo

[11] M. Dummett *Elements of Intuitionism*, p.136

somente pode ser gerado depois das regras com restrições à cardinalidade do sucedente.(Como veremos no sistema de Dragalin, isto é resolvido de modo diferente). Ainda assim, LJ' é considerado um sistema de sucedente múltiplo.

Um sistema no estilo LJ' para lógica proposicional pode concentrar todas as restrições na regra do condicional já que a negação pode figurar como símbolo definido. Esta mudança é feita por Schellinx no seu sistema $IL^{>}$ reproduzido na figura 5 do apêndice. Nesse caso, a linguagem tem o símbolo $\perp$ como primitivo para o qual se agrega um axioma para o bottom.

Eliminação do corte para LJ'.

Considerando o caso de uma prova ao estilo Gentzen, Takeuti[12] refere que uma prova de eliminação de corte para LJ' seria uma trivial adaptação das técnicas usadas por Gentzen na prova de eliminação de corte para LK. Isto não é exatamente assim. Em "Some Syntactical Observations on Linear Logic", Schellinx assinala alguns problemas que surgiriamem se tentássemos eliminar os cortes ao estilo Gentzen quando temos regras com restrições no estilo LJ'. No seguinte exemplo podemos apreciar que as restrições em algumas regras prejudicam a "subida" do corte:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B)} \qquad \dfrac{(A \vee B), \Theta, C \Rightarrow D}{(A \vee B), \Theta \Rightarrow (C \to D)}(*)}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, (C \to D)} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B)} \qquad (A \vee B), \Theta, C \Rightarrow D}{\Gamma, \Theta, C \Rightarrow \Delta, D}}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, (C \to D)}(**)$$

onde (*) é uma aplicação correta de ($\to_R$)em LJ' e (**) não é uma aplicação correta dessa regra.

É importante nos determos na eliminação do corte para este caso, não somente pelo abundante uso que se tem feito de LJ', mas para apreciar como os problemas causados pelas restrições em algumas regras são superados no sistema FIL. Veremos que, marcando as relações de dependência entre as fórmulas do antecedente e do sucedente de seqüentes em FIL, uma prova de eliminação do corte no estilo Gentzen flui facilmente.

Apresentamos, a continuação, duas formas de provar a eliminação de corte para estes sistemas. Uma possibilidade consiste em provar o teorema diretamente para LJ'. Outra forma considera que o teorema de eliminação do corte vale para LJ[13] e obtém eliminação de corte para LJ' via a sua tradução a LJ. Este modo indireto é considerado uma versão fraca do teorema que não mostra as reduções nas derivações do próprio sistema. Desta maneira se

[12] Takeuti. *Proof Theory*, p.60

[13] A prova de eliminação do corte para LJ é uma caso particular da realizada por Gentzen para o caso clássico. Simplesmente não é necessário considerar todos os casos.

procede do seguinte modo:

1. Considerar uma derivação π de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em LJ'.
2. Definir uma função f tal que $f[\pi] = \pi^*$ onde π^* é uma derivação de $\Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta$ em LJ e $\bigvee \Delta$ é a disjunção de todas as fórmulas de Δ.
3. Transformar π^* em π^{**} livre de corte.
4. Garantir a "volta" para LJ' livre de corte.

Os pontos 1 e 2 afirmam a correção de LJ' a respeito de LJ: eles derivam os mesmos teoremas. O ponto 3 é o teorema de eliminação de corte para LJ realizado por Gentzen. O ponto 2 é formulado no seguinte teorema:

Teorema 1 . $\vdash_{LJ'} \Gamma \Rightarrow \Delta$ *se e somente se* $\vdash_{LJ} \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta$.

($\Leftarrow$) Prova.
Suponhamos que o seqüente $\Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta$ é derivável em LJ e tem a forma $\Gamma \Rightarrow A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n$. A partir de seqüentes iniciais $A_1 \Rightarrow A_1, ..., A_n \Rightarrow A_n$ podemos obter o seqüente $\bigvee \Delta \Rightarrow \Delta$ em LJ':

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A_1 \Rightarrow A_1}{A_1 \Rightarrow A_1, A_2}(W_R) \quad \dfrac{A_2 \Rightarrow A_2}{A_2 \Rightarrow A_1, A_2}(W_R)}{A_1 \vee A_2 \Rightarrow A_1, A_2}(\vee_L)}{A_1 \vee A_2 \Rightarrow A_1, A_2, A_3}(W_R) \quad \dfrac{A_3 \Rightarrow A_3}{A_3 \Rightarrow A_1, A_2, A_3}(W_R)}{A_1 \vee A_2 \vee A_3 \Rightarrow A_1, A_2, A_3}(L\vee)$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\dfrac{A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee ... \vee A_{n-1} \Rightarrow A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}}{A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee ... \vee A_{n-1} \Rightarrow A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n}(W_R) \quad \dfrac{A_n \Rightarrow A_n}{A_n \Rightarrow A_1, A_2, ..., A_n}(W_R)}{A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n \Rightarrow A_1, A_2, ..., A_n}(\vee_L)$$

Por corte entre $\Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta$ e $\bigvee \Delta \Rightarrow \Delta$, obtemos $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

($\Rightarrow$). Prova por indução sobre comprimento das derivações em LJ'.
Caso base. Seja $A \Rightarrow A$ um axioma em LJ'. $A \Rightarrow A$ é também um axioma em LJ.

H.I.: Seja $\vdash_{LJ'} \Gamma \Rightarrow \Delta$ e premissa de uma regra de inferência. Então $\vdash_{LJ} \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta$.

As regras de introdução no antecedente que não manipulam fórmulas dos sucedentes das premissas são imediatas a partir da H.I. Por exemplo no

seguinte caso.
Caso $(\vee_L)$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma, A \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}\pi_2\\ \Gamma, B \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma, (A \vee B) \Rightarrow \Delta}$$

Por H.I., $\vdash_{LJ} \Gamma, A \Rightarrow \bigvee \Delta$ e $\vdash_{LJ} \Gamma, B \Rightarrow \bigvee \Delta$. Por $(\vee_L)$ obtemos em LJ o seqüente $\Gamma, (A \vee B) \Rightarrow \bigvee \Delta$.

O mesmo vale para $(\wedge_L)$ e as regras estruturais à esquerda.

Caso $(\rightarrow_L)$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow A, \Delta\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}\pi_2\\ \Gamma', B \Rightarrow \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma', (A \rightarrow B) \Rightarrow \Delta, \Delta'}$$

Por H.I. $\vdash_{LJ} \Gamma \Rightarrow A \vee \bigvee \Delta$ e $\vdash_{LJ} \Gamma', B \Rightarrow \bigvee \Delta'$. O seqüente $\Gamma, \Gamma'(A \rightarrow B) \Rightarrow \bigvee \Delta \vee \bigvee \Delta'$ pode ser obtido com a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1'\\ \Gamma \Rightarrow A \vee \bigvee \Delta\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad B \Rightarrow B}{A, (A \rightarrow B) \Rightarrow B}\,(\rightarrow_L) \qquad \begin{matrix}\pi_2'\\ \Gamma', B \Rightarrow \bigvee \Delta'\end{matrix}}{A, (A \rightarrow B), \Gamma' \Rightarrow \bigvee \Delta'}\,(corte)}{A, (A \rightarrow B), \Gamma' \Rightarrow \bigvee \Delta \vee \bigvee \Delta'}\,(\vee_R) \qquad \dfrac{\bigvee \Delta \Rightarrow \bigvee \Delta}{\bigvee \Delta \Rightarrow \bigvee \Delta \vee \bigvee \Delta'}\,(\vee_R)}{A \vee \bigvee \Delta, (A \rightarrow B), \Gamma' \Rightarrow \bigvee \Delta \vee \bigvee \Delta'}\,(\vee L)}{\Gamma, (A \rightarrow B), \Gamma' \Rightarrow \bigvee \Delta \vee \bigvee \Delta'}\,(corte)}{\Gamma, \Gamma', (A \rightarrow B) \Rightarrow \bigvee \Delta \vee \bigvee \Delta'}\,(E_L)$$

Caso Corte:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, C\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}\pi_2\\ C, \Gamma' \Rightarrow \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}$$

Por H.I. $\vdash_{LJ} \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta \vee C$ e $\vdash_{LJ} C, \Gamma' \Rightarrow \bigvee \Delta'$. Podemos obter $\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \bigvee \Delta \vee \bigvee \Delta'$ a partir da seguinte derivação em LJ:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1'\\ \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta \vee C\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\bigvee \Delta \Rightarrow \bigvee \Delta}{\bigvee \Delta \Rightarrow \bigvee \Delta \vee \bigvee \Delta'}\,(\vee_R) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_2'\\ C, \Gamma' \Rightarrow \bigvee \Delta'\end{matrix}}{C, \Gamma' \Rightarrow \bigvee \Delta \vee \bigvee \Delta'}\,(\vee_R)}{\bigvee \Delta \vee C, \Gamma' \Rightarrow \bigvee \Delta \vee \bigvee \Delta'}\,(\vee_L)}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \bigvee \Delta \vee \bigvee \Delta'}\,(corte)$$

No caso das regras à direita temos que $(\rightarrow_R)$ e $(\neg_R)$ são iguais em ambos sistemas.

Caso (W_R):

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi \\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Por H.I.: $\vdash_{LJ} \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta$. Por $(\vee_R)$, $\vdash_{LJ} \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta \vee A$.

Caso (C_R):

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, C, C\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, C}$$

Por H.I.: $\vdash_{LJ} \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta \vee C \vee C$. $\Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta \vee C$ é obtido em LJ com a seguinte derivação:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi' \\ \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta \vee C \vee C\end{matrix} \qquad \dfrac{\bigvee \Delta \vee C \Rightarrow \bigvee \Delta \vee C \qquad \dfrac{C \Rightarrow C}{C \Rightarrow \bigvee \Delta \vee C}\,(\vee_R)}{\bigvee \Delta \vee C \vee C \Rightarrow \bigvee \Delta \vee C}\,(\vee_L)}{\Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta \vee C}\,(corte)$$

Caso (E_R):

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Delta'\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A, \Delta'}$$

Por H.I. temos uma derivação π' de S $= \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta \vee A \vee B \vee \bigvee \Delta'$ é derivável em LJ. O seqüente $\Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta \vee B \vee A \vee \bigvee \Delta'$ pode ser derivado em LJ pela seguinte derivação:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi' \\ \vdots \\ S\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\bigvee \Delta \Rightarrow \bigvee \Delta}{\bigvee \Delta \Rightarrow (\bigvee \Delta \vee (B \vee A)) \vee \bigvee \Delta'}\,(\vee_R) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow (B \vee A)}\,(\vee_R) \qquad \dfrac{B \Rightarrow B}{B \Rightarrow (B \vee A)}\,(\vee_R)}{(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)}\,(\vee_L)}{(A \vee B) \Rightarrow \bigvee \Delta \vee (B \vee A)}\,(\vee_R)}{(A \vee B) \Rightarrow (\bigvee \Delta \vee (B \vee A)) \vee \bigvee \Delta'}\,(\vee_R)}{(\bigvee \Delta \vee (A \vee B)) \Rightarrow (\bigvee \Delta \vee (B \vee A)) \vee \bigvee \Delta'}\,(\vee_L) \qquad \dfrac{\bigvee \Delta' \Rightarrow \bigvee \Delta'}{\bigvee \Delta' \Rightarrow (\bigvee \Delta \vee (B \vee A)) \vee \bigvee \Delta'}}{(\bigvee \Delta (\vee A \vee B)) \vee \bigvee \Delta' \Rightarrow (\bigvee \Delta \vee (B \vee A)) \vee \bigvee \Delta'}}{\Gamma \Rightarrow (\bigvee \Delta \vee (B \vee A)) \vee \bigvee \Delta'}\,(corte)$$

Caso $(\vee_R)$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \Gamma \Rightarrow A, \Delta\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B), \Delta}\,(\vee_R^1)$$

Por H.I. $\Gamma \Rightarrow A \vee \bigvee \Delta$ é derivável em LJ e podemos construir a seguinte derivação:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi'\\ \Gamma \Rightarrow A \vee \bigvee \Delta\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow (A \vee B)}\,(\vee_R)}{A \Rightarrow (A \vee B) \vee \bigvee \Delta}\,(\vee_R) \qquad \dfrac{\bigvee \Delta \Rightarrow \bigvee \Delta}{\bigvee \Delta \Rightarrow (A \vee B) \vee \bigvee \Delta}\,(\vee_R)}{A \vee \bigvee \Delta \Rightarrow (A \vee B) \vee \bigvee \Delta}\,(\vee_L)}{\Gamma \Rightarrow (A \vee B) \vee \bigvee \Delta}\,(corte)$$

De modo similar para $(\vee_R^2)$.

Caso $(\wedge_R)$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1\\ \Gamma \Rightarrow A, \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2\\ \Gamma \Rightarrow B, \Delta\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow (A \wedge B), \Delta}\,(\wedge_R)$$

Por H.I., temos π_1' do seqüente $S_1' = \vdash_{LJ} \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta \vee A$ e π_2' do seqüente $S_2' = \vdash_{LJ} \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta \vee B$. O seqüente $\Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta \vee (A \wedge B)$ pode ser derivado em LJ do seguinte modo:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_2'\\ \vdots\\ S_2'\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\bigvee \Delta \Rightarrow \bigvee \Delta}{\bigvee \Delta \Rightarrow (\bigvee \Delta \vee (A \wedge B))}}{\Gamma, \bigvee \Delta \Rightarrow (\bigvee \Delta \vee (A \wedge B))}\,(W_L) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\pi_1'\\ \vdots\\ S_1'\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\bigvee \Delta \Rightarrow \bigvee \Delta}{\bigvee \Delta \Rightarrow (\bigvee \Delta \vee (A \wedge B))} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow A}\,(W_L) \qquad \dfrac{B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow B}\,(W_L)}{A, B \Rightarrow (A \wedge B)}\,(\wedge_R)}{A, B \Rightarrow (\bigvee \Delta \vee (A \wedge B))}}{(\bigvee \Delta \vee A), B \Rightarrow (\bigvee \Delta \vee (A \wedge B))}}{\Gamma, B \Rightarrow (\bigvee \Delta \vee (A \wedge B))}}{\Gamma, (\bigvee \Delta \vee B) \Rightarrow (\bigvee \Delta \vee (A \wedge B))}}{\Gamma \Rightarrow (\bigvee \Delta \vee (A \wedge B))}$$

□

Considerando que o teorema de eliminação de corte vale para LJ devemos agora garantir que a "volta" a LJ' não agregue cortes nas derivações.

Lema 1 *Se* $\vdash_{LJ} \Gamma \Rightarrow \bigvee\Delta$ *livre de corte, então* $\vdash_{LJ'} \Gamma \Rightarrow \Delta$ *livre de corte.*

Vejamos os dois casos abaixo a modo de exemplo:
Caso ($\vee_R$). Seja $\Gamma \Rightarrow (\bigvee\Delta \vee A)$ derivável em LJ livre de corte. Por H.I. temos em LJ' o seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$. Por ($\vee_R$) obtemos $\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B)$ sem cortes.

Caso ($\wedge_R$). Seja $\Gamma \Rightarrow (\bigvee\Delta \vee A)$ e $\Gamma \Rightarrow (\bigvee\Delta \vee B)$ deriváveis em LJ. Pela H.I. temos em LJ' derivações dos seqüentes $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ e $\Gamma \Rightarrow \Delta, B$. Por ($\wedge_R$) temos $\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B)$ em LJ' livre de corte.

Apresentamos agora a prova direta de eliminação de corte es Seguimos a apresentação das definições e procedimentos que esso autor realiza para o sistema $IL^{>}$. Ambos os sistemas são aditivos mas a regra de ($\rightarrow_L$) é apresentada de modo multiplicativo em LJ'. A principal diferença entre LJ' e $IL^{>}$ é o uso do bottom. Schellinx facilita esta prova trabalhando com multiconjuntos e usando a ordem das fórmulas segundo a conveniência. Sabemos que, na presença das regras estruturais, não temos diferença.

Definição 8 (Comprimento de uma derivação) . *Seja* π *uma derivação em LJ' e* $\mathcal{C}$ *uma função que confere o comprimento de* π. *Então:*

(i) Se π *é um axioma:* $\mathcal{C}(\pi) = 0$;

(ii) Se π *é o resultado da aplicação de uma regra a* π': $\mathcal{C}(\pi) = \mathcal{C}(\pi') + 1$;

(iii) Se π *é o resultado da aplicação de una regra às derivações* π' *e* π'': $\mathcal{C}(\pi) = max\ (\mathcal{C}(\pi'), \mathcal{C}(\pi'')) + 1$.

Definição 9 (Altura de uma derivação) . *Seja* π *uma derivação em LJ'e* $\mathcal{A}$ *uma função que confere a altura de* π. *Então:*

(i) Se π *é um axioma:* $\mathcal{A}(\pi) = 0$;

(ii) Se π *é o resultado da aplicação de uma regra estrutural a* π': $\mathcal{A}(\pi) = \mathcal{A}(\pi')$;

(iii) Se π *é o resultado da aplicação do corte às derivações* π' *e* π'': $\mathcal{A}(\pi) = max(\mathcal{A}(\pi'), \mathcal{A}(\pi''))$;

(iv) Se π *é o resultado da aplicação de uma regra lógica a* π': $\mathcal{A}(\pi) = \mathcal{A}(\pi') + 1$;

(v) Se π *é o resultado da aplicação de una regra lógica às derivações* π' *e* π'': $\mathcal{A}(\pi) = max\ (\mathcal{A}(\pi'), \mathcal{A}(\pi'')) + 1$.

Definição 10 (Fórmula principal de uma derivação) *Seja π uma derivação de um seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$. A é a fórmula principal da derivação se é a fórmula introduzida na primeira regra operacional acima de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ (lendo a derivação de forma ascendente).*

Definição 11 (Instância mais alta de corte) *Chamamos instância mais alta de corte numa derivação π a uma instância de corte, na qual as subderivações determinadas pelas suas premissas não contêm nenhuma outra instância de corte.*

Definição 12 (Altura de uma instância de corte) *Seja α uma aplicação da regra de corte cujas premissas $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ e $A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ são o resultado das derivações π e π'. Então, $\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}(\pi) + \mathcal{A}(\pi')$.*

Lema 2 *Seja π uma CF-derivação em LJ' de $\Gamma \Rightarrow (A \boxplus B), \Delta$ ou $\Gamma, (A \boxplus B) \Rightarrow \Delta$ onde $\boxplus \epsilon \{\wedge, \vee\}$. π pode ser transformada numa CF-derivação que acaba com uma aplicação da $\boxplus$-regra ou com uma aplicação dessa regra seguida por contração.*

Prova. Indução sobre comprimento das CF-derivações em LJ'.
O lema estabelece a invertibilidade das regras para $\vee$ e $\wedge$, isto é, a partir de uma CF-derivação da conclusão podemos obter provas livres de corte para as premissas. O lema então pode ser dividido nos seguintes enunciados a provar:

(i) Se o seqüente $\Gamma \Rightarrow (A \wedge B)^n, \Delta$ no qual $n \geq 1$ é o número de ocorrências de essa conjunção[14], tem uma CF-derivação, então, os seqüentes $\Gamma \Rightarrow A^n, \Delta$ e $\Gamma \Rightarrow B^n, \Delta$ têm CF-derivações.

(ii) Se o seqüente $\Gamma, (A \wedge B)^n \Rightarrow \Delta$ tem uma CF-derivação, então $\Gamma, A^n \Rightarrow \Delta$ ou $\Gamma, B^n \Rightarrow \Delta$ têm uma CF-derivação.

(iii) Se o seqüente $\Gamma \Rightarrow (A \vee B)^n, \Delta$ tem uma CF-derivação, então, $\Gamma \Rightarrow A^n \Delta$ ou $\Gamma \Rightarrow B^n, \Delta$ têm uma CF-derivação.

(iv) Se o seqüente $\Gamma, (A \vee B)^n \Rightarrow \Delta$ tem uma CF-derivação, então, os seqüentes $\Gamma, A^n \Rightarrow \Delta$ e $\Gamma, B^n \Rightarrow \Delta$ têm uma CF-derivação.

LJ' não cumpre este lema para o caso das fórmulas condicionais ou negações (nos estamos referindo somente à parte proposicional do sistema). Isto é, uma derivação do seqüente $\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B)^n, \Delta$ não pode acabar com a aplicação da regra $(\rightarrow_R)$ nos casos em que $\Delta \neq \varnothing$. Exatamente o mesmo vale para a regra $(\neg_R)$.

[14]Em função do Mix é necessário considerar as n ocorrências da fórmula de corte.

Revisemos, a título de exemplo, a prova do caso (ii).
Consideremos uma CF-derivação π de $\Gamma, (A \wedge B)^n \Rightarrow \Delta$. Quando $\mathcal{C}(\pi)$= 0, o seqüente é um axioma da forma $(A \wedge B) \Rightarrow (A \wedge B)$. Neste caso é uma derivação com somente um nó (obviamente livre de corte) onde n=1.

H.I.: Seja π uma CF-derivação de $\Gamma, (A \wedge B)^n \Rightarrow \Delta$ com $\mathcal{C}(\pi)$ = m. Então, tem uma CF-derivação π'do seqüente $\Gamma, A^n \Rightarrow \Delta$ ou uma CF-derivação π_2' do seqüente $\Gamma, B^n \Rightarrow \Delta$.

Consideremos como exemplo a derivação π' e o caso em que a última regra de inferência de π' é $(\rightarrow_R)$. Se a última regra é $(\rightarrow_R)$, Δ tem no máximo uma fórmula. Consideremos uma CF-derivação π de $\Gamma, (A \wedge B)^n \Rightarrow (C \rightarrow D)$ com $\mathcal{C}(\pi)$= m+1. Então a derivação de $\Gamma, (A \wedge B)^n, C \Rightarrow D$ tem comprimento m. Por H.I.: $\Gamma, A^n, C \Rightarrow D$ tem CF-derivação. Logo, podemos obter uma CF-derivação do seqüente $\Gamma, A^n \Rightarrow (C \rightarrow D)$ por $(\rightarrow_R)$ que é livre de corte.
De modo similar para a partir do caso de π_2' e para os demais casos.

Definição 13 (Instância primitiva de uma fórmula) *Uma instância de uma fórmula A se diz primitiva se a mesma foi sido introduzida por meio de um axioma.*

Lema 3 *Seja I qualquer uma das instâncias mais altas de corte tal que $\mathcal{A}(I)$=0. Então, I pode ser eliminada.*

Isto é, se consideram os cortes mais altos aqueles que são feitos entre axiomas ou os cortes que somente tem regras estruturais acima deles.
Prova.
(1) A fórmula do corte é uma fórmula primitiva.
(1.1)A aplicação I do corte tem a forma:

$$\frac{A \Rightarrow A \quad A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A}$$

que pode ser reduzida a:

$$A \Rightarrow A$$

(1.2) A fórmula do corte tem somente uma ocorrência como fórmula primitiva:

$$\frac{A \Rightarrow A \qquad \begin{matrix} \pi_1 \\ A, \Gamma \Rightarrow \Delta \end{matrix}}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

que pode ser reduzida a:

$$\begin{array}{c} \pi_1 \\ \\ A, \Gamma \Rightarrow \Delta \end{array}$$

(1.3) A aplicação do corte tem a forma:

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\!\!=\!\! \quad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}$$

na qual a dupla linha representa a aplicação de regras estruturais que pode ser transformada em:

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}=$$

para logo ser tratada como no caso (1.2).

Se a ocorrência de A na premissa direita também é primitiva, podemos subir o corte até os axiomas e eliminá-lo como no caso 1.1.

(2) Se A não é primitiva, ela somente pode ter sido introduzida por enfraquecimento já que $\mathcal{A}(I)$=0. Então, essa aplicação tem a forma:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \qquad \dfrac{\Gamma' \Rightarrow \Delta'}{A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}$$

que pode ser transformada em:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}= \ (W_L, W_R)$$

Consideremos o caso em que a regra de enfraquecimento não é aplicada imediatamente antes do corte, por exemplo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma^\circ \Rightarrow \Delta^\circ}{\Gamma^\circ \Rightarrow \Delta^\circ, A}\,(W_R)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}=\,(R_1, ..., R_n) \qquad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(corte)$$

onde $(R_1, ..., R_n)$ são aplicações de regras estruturais. Esta derivação pode ser transformada em:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma^\circ \Rightarrow \Delta^\circ}{\Gamma \Rightarrow \Delta}=\,(R_1, ..., R_n)}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}=\,(W_L, W_R)$$

Lema 4 *Seja I qualquer uma das instâncias mais altas de corte tal que a fórmula de corte é primitiva. Então, I pode ser eliminada.*

O lema considera as aplicações do corte (cortando fórmulas primitivas) que não têm necessariamente altura 0, isto é, a derivação das premissas tem regras operacionais e podem ser igualmente tratadas como os casos 1.2 e 1.3 do lema anterior.

Teorema 2 (Eliminação de corte de LJ') *Toda derivação de um seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em LJ' pode ser transformada numa derivação livre de corte.*

Prova. Seja π uma derivação de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em LJ'. Pelo lema 2, π pode ser transformada numa π' cujas instâncias mais altas de corte tem altura > 0 e não tem fórmulas primitivas como fórmulas de corte. Notamos que se a fórmula for introduzida pela W-regra, então, poderíamos obter o seqüente $\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$ diretamente com regras estruturais a partir da derivação das premissas. Portanto, necessitamos somente considerar o caso em que $(A \boxplus B)$ com $(\boxplus \, \epsilon \{\vee, \wedge\})$ foi introduzida pela respectiva regra operacional.

1. Caso em que a fórmula de corte, em uma das instancias mais altas de corte, é $(A \boxplus B)$. Se a fórmula foi introduzida pela respectiva regra operacional e pelo lema 2 sabemos que a CF-derivação das premissas pode ser transformada numa CF-derivação onde $(A \boxplus B)$ com $\boxplus$ é a fórmula principal. Isto é, na derivação:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, (A \boxplus B)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_2 \\ (A \boxplus B), \Gamma' \Rightarrow \Delta'\end{matrix}}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(Corte)$$

π_1 e π_2 podem ser transformadas em derivações onde $(A \boxplus B)$ é a fórmula principal. Consideremos o caso da conjunção como exemplo. Pelo lema 2 temos derivações de $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$, $\Gamma \Rightarrow \Delta, B$ e de $\Gamma', A \Rightarrow \Delta'$ ou de $\Gamma', B \Rightarrow \Delta'$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_3 \\ \Gamma^\circ \Rightarrow \Delta^\circ, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_4 \\ \Gamma^\circ \Rightarrow \Delta^\circ, B\end{matrix}}{\Gamma^\circ \Rightarrow \Delta^\circ, (A \wedge B)}\,(\wedge_R)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B)}\,(R_1, ..., R_n) \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_5 \\ \Gamma'^\circ, A \Rightarrow \Delta'^\circ\end{matrix}}{\Gamma'^\circ, (A \wedge B) \Rightarrow \Delta'^\circ}\,(\wedge_L)}{\Gamma', (A \wedge B) \Rightarrow \Delta'}\,(R'_1, ..., R'_n)}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(corte)$$

onde $R_1, ..., R_n$ e $R'_1, ..., R'_n$ são aplicações de regras estruturais e a perda do símbolo '$\circ$' indica as possíveis mudanças nos seqüentes. Esta derivação pode ser transformada em:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_3 \\ \Gamma^\circ \Rightarrow \Delta^\circ, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\pi_5 \\ \Gamma'^\circ, A \Rightarrow \Delta'^\circ\end{matrix}}{\Gamma^\circ, \Gamma'^\circ, \Rightarrow \Delta^\circ, \Delta'^\circ}\,(Corte)}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(R_1, ..., R_n, R'_1, ..., R'_n)$$

onde a fórmula de corte é de menor complexidade, isto é, tem um grau menor. De modo similar para $\vee$.
Logo após realizar todas as transformações, os cortes restantes vão ser de altura 0 ou com fórmulas primitivas como fórmulas de corte. Podemos então começar pelas instâncias mais altas e aplicar os passos do lema 3 para removê-las.
2.Examinaremos agora os casos em que a fórmula de corte tem como símbolo principal '$\rightarrow$' ou '$\neg$', nos quais, intervêm as regras com restrições. As derivações das premissas esquerdas têm a forma:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ \Gamma, A \Rightarrow B\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B)}}{\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B), \Delta} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\pi_1 \\ A, \Gamma \Rightarrow\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \neg A}}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta}$$

Revisemos então o caso problemático no qual a primeira regra na premissa direita é uma das regras com restrições:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B)}}{\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B), \Delta} \qquad \dfrac{(A \rightarrow B), \Theta, C \Rightarrow D}{(A \rightarrow B), \Theta \Rightarrow (C \rightarrow D)}}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, (C \rightarrow D)} \quad \Rrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow (A \rightarrow B)} \quad (A \rightarrow B), \Theta, C \Rightarrow D}{\Gamma, \Theta, C \Rightarrow D}}{\Gamma, \Theta \Rightarrow (C \rightarrow D)}}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, (C \rightarrow D)}$$

Como o conjunto Δ tem sido agregado por enfraquecimento na primeira derivação, ele pode ser agregado depois da aplicação das regras com restrições, assim, resolvendo o problema.

$\square$

Trabalhamos na seção anterior com LJ' porque é o sistema que foi mais utilizado. Tenhamos em conta que o sistema de Schellinx não foi publicado até o início dos anos de 1990. Como o sistema que apresentaremos no próximo capítulo tem o $\perp$ como símbolo primitivo, trabalharemos em relação a $IL^{>}$ em vez de LJ'. Sabemos já que LJ e LJ' cumprem o teorema 1 formulado acima: $\vdash_{LJ'} \Gamma \Rightarrow \Delta$ se e somente se $\vdash_{LJ} \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta$

obtendo como resultado adicional:

Corolário 1 $\vdash_{LJ'} \Rightarrow A$ *se e somente se* $\vdash_{LJ} \Rightarrow A$

Podemos ver no trabalho de Schellinx a prova de que $IL^{>}$ cumpre, em relação a IL[15] os seguintes teoremas:

Teorema 3 $\vdash_{IL^{>}} \Gamma \Rightarrow \Delta$ *se e somente se* $\vdash_{IL} \Gamma \Rightarrow \bigvee \Delta$.

Corolário 2 $\vdash_{IL^{>}} \Rightarrow A$*, então* $\vdash_{IL} \Rightarrow A$

2.3.1
Sistemas com regras estruturais absorvidas.

A passagem da lógica clássica para a lógica intuicionista pode ser obtida de uma outra maneira restringindo as regras estruturais. Došen apresenta no capítulo “A Historical Introduction to Substructural Logics”, (na obra com Schroeder-Heister já mencionada), a lógica intuicionista como aquela que restringe a regra de enfraquecimento à direita admitida somente no seguinte caso:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow A}$$

Considerando a negação como símbolo definido, assume para o $\perp$ as seguintes regras:

$$(\perp_L) \qquad \perp \Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \perp}\ (\perp_R)$$

No livro *Introducción a las metamatemáticas*[16], Kleene apresenta três famílias de sistemas em cálculo de seqüentes denominadas G_1, G_2 e G_3 reproduzidos respectivamente nas Figuras 6,7 e 8 do apêndice. Embora Kleene trabalhe a negação como símbolo primitivo, poderíamos dizer que são sistemas que refletem a idéia de que a diferença entre as versões clássicas e intuicionistas radicam no uso da regra de enfraquecimento á direita. A forma em que os sistemas são apresentados tem feito, em geral, com que sejam considerados sistemas de sucedente múltiplo já que cada G_i é apresentado simultaneamente para a lógica clássica e intuicionista. Isto é, a formulação do grupo de sistemas é feita com seqüentes de sucedente múltiplo.

[15]IL, sistema apresentado na Figura 4 do Apêndice, é a versão de LJ trabalhada com $\perp$ como símbolo primitivo no trabalho de Schellinx.

[16]Os sistema G_1 e G_2 são trabalhados também no artigo “Permutability of Inferences in Gentzen's Calculi LK and LJ” do mesmo autor.

Mencionamos os sistemas de Kleene pelas seguintes razões. As derivações intuicionistas dos sistemas G_i têm, no máximo, uma fórmula no sucedente. Mas, a cardinalidade do sucedente dos seqüentes intuicionistas não é estabelecida na definição do seqüente como é o caso de LJ, mas é o resultado da apresentação das regras. Deste modo, a cardinalidade dos seqüentes intuicionistas é um resultado e não está preestablecido na definição do seqüente. Assim, derivações intuicionistas cumprem com o seguinte lema:

Lema 5 *Se o seqüente* $\Gamma \Rightarrow B_1, ..., B_m$ *é derivável em* G_1 *ou em* G_2*, então* $m = 0$ *ou* $m = 1$*.*

Consideremos que os seqüentes iniciais do sistema têm no máximo uma fórmula no sucedente e as única regras que poderiam agregar uma fórmula ao sucedente são (W_R) e $(\neg_R)$. Logo, restringindo essas regras não é possível aumentar a cardinalidade do sucedente ao longo das derivações.

Uma outra razão para apresentar os sistemas de Kleene é o uso que tem sido feito do sistema G_3 como ferramenta para a busca de provas conjuntamente com o sistema apresentado por Dragalin (conforme a figura 9 do apêndice). Ambos são exemplos que tem eliminado a apresentação das regras estruturais. Essa absorção das regras estruturais foram resolvidas por ambos autores de forma diferente.

Consideremos primeiro o sistema G_3 de Kleene. O objetivo de Kleene é reduzir, ao mínimo, o número de opções de premissas quando tentamos demonstrar um seqüente ou esgotar as possibilidades quando esse seqüente não é demonstrável. Para fazer desnecessárias as regras estruturais apresentam-se os seqüentes de modo tal que sua aplicação seja independente da ordem e do número de repetições de fórmulas nos antecedentes, isto é, o antecedente e o sucedente são conjuntos. Além disso, o axioma tem a forma $A, \Gamma \Rightarrow A$ fazendo com que a regra de enfraquecimento seja desnecessária. Para garantir a invertibilidade (isto é, a leitura inversa de uma regra: a partir da conlcusão podem-se derivar às premissas) das regras repeten-se as fórmulas principais nas premissas.

No caso de Dragalin a invertibilidade é garantida pela apresentação dos dois componentes da conjunção (em $(\wedge_L)$) e disjunção (em $(\vee_R)$). O sistema GHPC apresentado por Dragalin em *Mathematical Intuitionism. Introduction to Proof Theory* é um outro exemplo de sistema que eliminou as regras estruturais. A primeira diferença fundamental com os sistemas de Kleene é que o sistema intuicionista de Dragalin tem derivações de sucedente múltiplo. Os antecedentes e sucedentes são multiconjuntos e esta é justamente a sua maior peculiaridade: podemos provar a admissibilidade da contração sem estarmos obrigados a considerar o antecedente e o sucedente como conjuntos. Como o sistema de Dragalin tem a regra do condicional restrita ao estilo LJ' e $IL^{>}$, o enfraquecimento à direita é resolvido admitindo um Δ arbitrário na conclusão da regra $(\rightarrow_R)$. A repetição do condicional na premissa esquerda de $(\rightarrow_L)$ é necessária para provar a admisibilidade da contração. Os recursos apresentados por ambos sistemas têm sido trabalhados por Dyckhoff, embora não para sistemas de sucedente múltiplo, mas para uma versão do sistema GHPC de sucedente único. Até a década de 90, os únicos sistemas que permitiam derivações intuicionistas de sucedente múltiplo eram o LJ' e o GHPC. O sistema mais usado foi o LJ', enquanto, o trabalho de Dragalin foi resgatado especialmente pelas técnicas de eliminação da contração aplicadas a seu sistema.

A seguir apresentamos como funciona a prova de Dragalin da admissibilidade da contração.

Definição 14 (Altura de uma derivação em GHPC) . *A altura de uma derivação em GHPC* ($\mathcal{A}^D$) *é o número de seqüentes no ramo mais longo.*

Lema 6 (Invertibilidade de regras de inferência) . *Seja R qualquer uma das regras* $(\vee_R), (\vee_L), (\wedge_R), (\wedge_L)$. *Se a conclusão de R tem uma derivação* π *tal que* $\mathcal{A}^D(\pi) = n$, *então a premissa (ou premissas) tem uma derivação* π*' tal que* $\mathcal{A}^D(\pi') \leq n$. *No caso da regra* $(\rightarrow_L)$, *se a conclusão tem uma derivação* π *tal que* $\mathcal{A}^D(\pi)= n$, *então, a premissa direita tem uma derivação* π*' tal que* $\mathcal{A}^D(\pi') \leq n$.

Teorema 4 (Admissibilidade da contração) . *(i) Se tem uma derivação* π *do seqüente* $\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A$ *e* $\mathcal{A}^D(\pi)= n$, *então, existe uma derivação* π' *de* $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ *com* $\mathcal{A}^D(\pi') \leq n$. *(ii) Se tem uma derivação* π^* *do seqüente* $A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ *e* $\mathcal{A}^D(\pi)$=*n, então, existe uma derivação* π'^* *de* $A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ *com* $\mathcal{A}^D(\pi') \leq n$.

Prova por indução em A com uma sub-indução na altura da derivação. Observemos o seguinte caso:

1. Caso n=0. Se $\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A$ é um axioma, $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ também.

Um argumento similar se aplica para (C_L)

H.I. A regra de contração é admissível para derivações de altura n.

Apresentamos o caso do condicional para mostrar a necessidade da fórmula principal na premissa esquerda de $(\rightarrow_L)$:

2.1 Seja π uma derivação do seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B), (A \rightarrow B)$ no qual a última inferência é R.

2.1.1 R $\neq (\to_R)$. Então π tem a seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ \Gamma^{\circ} \Rightarrow \Delta^{\circ}, (A \to B), (A \to B)\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \to B), (A \to B)}\,(R)$$

Pela H.I. temos π' de $\Gamma^{\circ} \Rightarrow \Delta^{\circ}, (A \to B)$ e aplicando R temos $\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \to B)$

2.1.1 R $= (\to_R)$. Consideremos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ A, \Gamma \Rightarrow B\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \to B), (A \to B)}\,(\to_R)$$

A partir da mesma premissa podemos agregar um contexto diferente pela aplicação da mesma regra:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi\\ A, \Gamma \Rightarrow B\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \to B)}\,(\to_R)$$

2.2. Consideremos o caso problemático em que o seqüente $(A \to B), (A \to B), \Gamma \Rightarrow \Delta$ foi obtido por $(\to_L)$ e a fórmula $(A \to B)$ é a fórmula principal nas duas premissas:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ (A \to B), (A \to B), \Gamma \Rightarrow A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ B, (A \to B), \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{(A \to B), (A \to B), \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\to_L)$$

Pela H.I. temos π_1' de $(A \to B), \Gamma \Rightarrow A$. Consideremos a premissa direita $B, (A \to B), \Gamma \Rightarrow \Delta$. Como também $(A \to B)$ é fórmula principal de $(\to_L)$, pela invertibilidade da regra afirmada no lema 6 temos uma derivação da sua premissa direita, isto é π_3 de $B, B, \Gamma \Rightarrow \Delta$. Agora podemos realizar a contração aplicando a H.I. e obtendo π_3' de $B, \Gamma \Rightarrow \Delta$. Logo:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1'\\ (A \to B), \Gamma \Rightarrow A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_3'\\ B, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{(A \to B), \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\to_L)$$

Como sugerimos anteriormente, Dyckhoff tem sido o grande difusor do trabalho de Dragalin e responsável pelo fato de que o mesmo seja comum na bibliografía de busca de provas. Embora o sistema de Dragalin seja livre de contração, o problema da duplicação de fórmulas persiste porque a fórmula principal é repetida no caso da $(\rightarrow_R)$. Ou seja, embora seja possível proceder desde o seqüente final de forma ascendente até os axiomas, não podemos asegurar o final do processo. Dyckhoff trabalha com uma versão do sistema de Dragalin, mas de sucedente único que chamamos como LJ^D (conforme a Figura 10 no apêndice, na qual se apresentam também as variações do LJT). O objetivo das variações apresentadas em LJT é assegurar a terminação do processo de busca e para isto, a regra de $(\rightarrow_L)$ é substituida por quatro regras que apresentam um tratamento mais detalhado da implicação que dependem da forma do antecedente do condicional.

2.3.2 Sistemas com marcação das relações de dependência entre as fórmulas de um seqüente

Como temos mencionado, os sistemas LJ' e GHPC foram os únicos sistemas intuicionistas de sucedente múltiple ato a década dos 90. (O sistema de Schellinx com $\perp$ foi publicado no ano de 1991). O desenvolvimento do tipo de sistemas que nos interessa, aqueles que indicam a relação de dependência entre as fórmulas, se retrae a inícios da década dos 90. Foram duas as motivações principais. A primeira radicava na dificuldade para eliminar os cortes em sistemas com regras restringidas, tipo LJ'. Desde o livro de Takeuti, acreditava-se que a eliminação dos cortes para LJ' era trivial ja que constituia um caso particular das provas de Gentzen. O problema foi justamente apresentado no trabalho de Schellinx do ano 91 com o já referido contraexemplo que repetemos a continuação:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B)} \qquad \dfrac{(A \vee B), \Theta, C \Rightarrow D}{(A \vee B), \Theta \Rightarrow (C \rightarrow D)}(*)}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, (C \rightarrow D)} \quad \Rrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B)} \qquad (A \vee B), \Theta, C \Rightarrow D}{\Gamma, \Theta, C \Rightarrow \Delta, D}}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, (C \rightarrow D)}(**)$$

onde (*) é uma aplicação correta de $(\rightarrow_R)$em LJ' e (**) não é uma aplicação correta da mesma regra.

Uma segunda motivação surgeou com as dificultades na formulação de um sistema em cálculo de seqüentes para a lógica linear intuicionista com o fragmento multiplicativo para o qual LJ' não era adequado. A idéia de formular um sistema considerando as relações de dependência entre as fórmulas do antecedente e o sucedente proveio de Hyland. A origem do sistema FIL é descrita por De Paiva e Pereira justamente motivada pela formulação de um sistema para a lógica linear intuicionista que estava sendo desenvolvido nessa época por De Paiva e Hyland com todos os operadores (aditivos e multiplicativos)[17]. Um contraexemplo nessa lógica análogo ao de Schellinx foi encontrado por Pereira e apresentado no artigo dos autores:

$$\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p}{p \Rightarrow p, \bot} \qquad \dfrac{\bot, 0 \Rightarrow q}{\bot \Rightarrow (0 \multimap q)}}{p \Rightarrow (0 \multimap q), p}$$

Como referimos na introdução, estes novos sistemas na década de 90 impulsionaram uma virada na forma em que o caráter intuicionista dos sistemas era assegurado. Em um fato curioso, se desenvolveram paralelamente dois sistemas de sucedente múltiplo baseados em relações de dependencia entre fórmulas. O sistema de De Paiva e Pereira, FIL (Full Intuitionistic Logic, Figura 13 do Apêndice), surgiou como um sistema intuicionista mas, com o potencial para ser aplicado ás lógicas intermediárias entre a clássica e a intuicionista. Um dos problemas bastante discutido[18] era a possibilidade de uma formulação de um sistema livre de corte para a lógica de domínios constantes. Um outro sistema baseado nas relações de dependência estava sendo formulado na mesma época por Kashima e Shimura, justamente para resolver esse problema. No artigo do ano 94 eles apresentaram um sistema para a lógica de Domínios Constantes que satisfaz eliminação de corte.

A incorporação de uma notação aos seqüentes sobre as relações de dependência foi evoluindo do seguinte modo. Em primeiro lugar apresentou-se a formulação do sistema para a lógica linear intuicionista chamado FILL(Full Intuitionistic Linear Logic) por Hyland e De Paiva[19]. Posteriormente no trabalho de Braüner com De Paiva[20] que corrige em parte o original com Hyland, essas relações são definidas indutivamente em forma paralela à apresentação das regras do sistema. Finalmente no trabalho de De Paiva e Pereira[21]para a lógica proposicional intuicionista (FIL) foi definido um tipo diferente de seqüente, um seqüente "decorado" que incorporava na definição de seqüente a informação so-

[17]O sistema cabou sendo apresentado numa versão final corregida por De Paiva e Braüner e pode se ver nas Figuras 11 e 12 do Apêndice).

[18]Veja na bibliografia as refencias aos artigos de López-Escobar

[19]Véja-se a apresentação do sistema no artigo dos autores "Full intuitionistic linear logic (extended abstract)".

[20]Véjase o artigo dos autores "Cut Elimination for Full Intuitionistic Linear Logic.

[21]O sistema está publicado em "A Short Note on Intuitionistic Propositional Logic with Multiple Conclusions".

bre as relações de dependência entre as fórmulas do antecedente e o sucedente. A versão de Kashima e Shimura (para CDL) também com a informação internalizada no seqüente foi publicada no ano 94 em "Cut-Elimination Theorem for the Logic of Constant Domain"[22], reproduzido na Figura 14 do Aoêndice.

No início do capítulo escrevemos sobre a interpretação dos seqüentes que proveio do próprio Gentzen: um seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ pode ser interpretado como a fórmula ($\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$). No caso de LK, pela fórmulação da regra ($\rightarrow_R$), o condicional pode ser internalizado sem problemas nessa disjunção representada pelas vírgulas do sucedente. Em que forma devemos interpretar as vírgulas de um sucedente multiplo num seqüente intuicionista? Começemos notando que as regras de ($\vee_R$) e ($\wedge_L$) são iguais em FIL e em LK. Como já vimos, nesse fragmento não é possível distinguir uma lógica da outra e, como referimos na introdução, o fragmento implicacional sim é suficente para distinguir a lógica clássica da intuicionista. É importante destacar que, as relações de dependência nos permitem um modo enriquecido de apreciar às diferenças entre ambas as lógicas. Deste modo, os sucedentes não são somente explicados no que diz respeito ás propriedades das disjunções (clássica e intuicionista) de modo isolado, mas no modo no qual a disjunção interage com outras constantes lógicas. Assim, a diferença entre sistemas de sucedente múltiplo clássico e estes sistemas de sucedente múltiplo intuicionista radica no modo pelo qual o condicional pode se comportar a respeito dessa disjunção. Enquanto essa internalização é feita sem restrições na lógica clássica, em FIL, o condicional pode ser internalizado na disjunção com determinadas restrições concentradas na regra do condicional. Os condicionais podem ser introduzidos respeitando determinadas relações de dependência. Isto permite agregar à premissa da regra ($\rightarrow_R$) um contexto Δ. Essas restrições são suficentes para garantir o caráter intuicionista do sistema proposicional.

Vimos em sistemas anteriores considerados de sucedente múltiplo (LJ' e GHPC) que a simetria, no que diz respeito à cardinalidade, era parcialmente restituida, mas o condicional não podia ser internalizado de modo nenhum. Podemos perceber em FIL que a simetria na cardinalidade do sucedente é restuída totalmente em todas as regras dos sistemas. A noção de dependência entre fórmulas é uma forma, diferente da cardinalidade, de impor restrições às regras do sistema. Revisamos, a continuação, detalhes desses sistemas para várias lógicas que incorporaram este conceito de dependència entre fórmulas.

Em "Cut-Elimination for Full Intuitionistic Linear Logic", Braüner e de Paiva apresentam o sistema FILL para a lógica linear intuicionista Full

[22] O sistema já tinha sido trabalhado por Kashima em "Cut-elimination for the intermediate logic CD".

Intuitionistic Linear Logic) que está baseado numa noção de dependência entre ocorrências de fórmulas. A definição num seqüente $\Gamma, B \Rightarrow A, \Delta$ de quando uma fórmula A depende de uma fórmula B permite expressar o carater intuicionista do sistema. Os autores apresentam primeiro o sistema CLL (Classical Linear Logic) caraterizando posteriormente o grupo de derivações que são intuicionistas, tal como é feito a seguir:

Definição 15 (Conjunto Dep_π(A)) . *Seja π uma derivação do seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Uma fórmula A (tal que $A \,\epsilon \Delta$) depende de uma fórmula B (onde $B \,\epsilon \Gamma$) se e somente se $B \,\epsilon Dep_\pi(A)$*[23].

Definição 16 (Derivação de FILL) . *Uma derivação π em FILL é uma derivação em CLL onde a regra ($\multimap_R$) é aplicada em π a uma premissa da forma $\Gamma, B \Rightarrow C, \Delta$ para obter $\Gamma \Rightarrow (B \multimap C), \Delta$ se nehuma das fórmulas em Δ depende de B em π.*

Como podemos ver, a diferença radica na introdução dos condicionais.
Uma noção similar é usada por Braüner em: "A Cut-Free Gentzen Formulation of the Modal Logic S5". O trabalho resolve um problema na formulação de S5 que, num sistema ao estilo Gentzen, não tinha sido provado ser livre de corte. Um contraexemplo mostra que o problema está concentrado na regra de introdução do $\Box$ à direita ($\Rightarrow \Box$):

$$\frac{\Box\Gamma \Rightarrow A, \Box\Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Box\Delta}\,(\Rightarrow \Box)$$

O seqüente $\Rightarrow \Box\neg\Box A, A$ não teria uma prova livre de corte:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box A \Rightarrow \Box A}{\Rightarrow \neg\Box A, \Box A}}{\Rightarrow \Box\neg\Box A, \Box A} \qquad \dfrac{A \Rightarrow A}{\Box A \Rightarrow A}}{\Rightarrow \Box\neg\Box A, A}$$

No sistema S5 apresentado por Braüner, a inferência ($\Rightarrow \Box$) deve ser realizada tendo em conta que nenhuma das fórmulas de Γ e Δ tenham determinadas relações de dependência com A. Esta regra permete mais provas no sistema (mas não mais seqüentes deriváveis), podendo-se construir esta prova livre de corte:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\Box A \Rightarrow A}}{\Rightarrow \neg\Box A, A}}{\Rightarrow \Box\neg\Box A, A}$$

[23] O conjunto $Dep_\pi(A)$ é definido indutivamente nas figura 11 e 12 do Apêndice.

Braüner define primeiro um sistema auxiliar *pre-S5* a partir da lógica proposicional clássica com regras para os operadores modais. S5 é obtido a partir de pre-S5 impondo restrições às regras ($\Rightarrow \Box$) e ($\Diamond \Rightarrow$). O sistema inclui uma nocão de *conexão* entre fórmulas em uma derivação. Esta noção é introduzida por Braüner para agregar condições na regra ($\Rightarrow \Box$) e ($\Diamond \Rightarrow$). Isto é, a apresentação de S5 a partir de pre-S5 necessita da noção de *conexão* entre fórmulas já que as provas do sistema S5 são caracterizadas como aquelas cujas aplicações de ($\Rightarrow \Box$) e ($\Diamond \Rightarrow$) cumprem com determinadas condições em relação às conexões entre as fórmulas:

Definição 17 (Derivação em S5) *Uma derivação em S5 é uma derivação em pre-S5 na qual, sempre que* ($\Box_R$) *é aplicada a uma derivação* π *de* $\Gamma \Rightarrow A, \Delta$ *para obter uma derivação de* $\Gamma \Rightarrow \Box A, \Delta$ *nenhuma das fórmulas em* Γ *e* Δ *depende de ocorrências de* A *em* π*.*

De modo similar a FILL, a relação de dependência no caso de Braüner não está internalizada nos seqüentes.

A internalização da relação de dependência ou coneção entre as fórmulas de um seqüente foi feita por de De Paiva e Pereira no artigo já mencionado. Nesse trabalho é apresentado um novo tipo de seqüente (a *decorated sequent*) que tem a seguinte forma:

$$A_1(n_1), ..., A_k(n_k) \Rightarrow B_1/S_1, ..., B_m/S_m$$

onde:

(a) A_i (sendo $1 \leq i \leq k$) e Bj (sendo $1 \leq j \leq m$) são fórmulas da lógica proposicional intuicionista.

(b) n_i (sendo $1 \leq i \leq k$) é um número natural que é o *índice* da fórmula A_i.

(c) S_j (sendo $1 \leq j \leq m$) é um conjunto de números naturais tal que S_j é o *conjunto de dependência* da fórmula B_j.

Deste modo, uma fórmula B/S no sucedente depende das fórmulas do antecedente que tenham índices em S, isto é, cada fórmula no sucedente tem um conjunto associado de hipóteses. A regra ($\rightarrow_R$) em FIL (igual que ($\multimap_R$)) tem a restrição para usar algumas hipóteses na lógica intuicionista.

No artigo já mencionado, De Paiva e Pereira provam a eliminação do corte e a correção a respeito da lógica proposicional intuicionista, isto é, que todo teorema de FIL pode ser provado em LJ.

Como já vimos, para o tratamento das relações de dependência, se apresenta em De Paiva e Pereira uma outra versão da regra de corte chamada *corte indexado*. A seguir apresnetamos algumas definições específicas para esta prova de eliminação do corte para FIL1 via corte indexado.

Em De Paiva e Pereira é apresentada uma outra regra denominada *corte indexado* que indica as posições das ocorrências que devem ser deletadas[24]:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \quad \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} < A; n_1, ..., n_k; m_1, ..., m_j >$$

A seqüência $< A; n_1, ..., n_k; m_1, ..., m_j >$ indica que a fórmula ser cortada é a formula 'A' e que deve ser deletada somente nas posições $n_1, ..., n_k$ do sucedente da premissa esquerda e nas posições $m_1, ..., m_j$ do antecedente da premissa direita.

O corte indexado é um caso particular do mix. Na direção inversa é suficente usar a regra de contração para depois aplicar o corte. Vejamos o problema que surge com a regra do mix no seguinte exemplo, no qual a aplicação desta regra impede a aplicação da regra $(\rightarrow_R)$:

$$\frac{B(n), \Gamma \Rightarrow (A \wedge C)/S_1, (A \wedge C)/S_2 \cup \{n\}, \Delta \qquad \dfrac{A, C, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{(A \wedge C)(m)\Gamma' \Rightarrow \Delta'/S'}(\wedge_L)}{B(n)\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'/(S' \cup S_1 \cup S_2 \cup \{n\})}(mix)$$

A fórmula com índice n fica agora vinculada a Δ' e não pode ser usada para uma outra fórmula $(A \wedge C)$ que possa ser introduzida por (W_R). Pelo contrário, fazendo a escolha das ocorrências, o condicional pode ser introduzido depois do corte indexado como se mostra a seguir:

$$\dfrac{\dfrac{B(n), \Gamma \Rightarrow (A \wedge C)/S_1, (A \wedge C)/S_2 \cup \{n\}, \Delta \qquad \dfrac{A, C, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{(A \wedge C)(m)\Gamma' \Rightarrow \Delta'/S' \cup \{m\}}(\wedge_L)}{B(n)\Gamma, \Gamma' \Rightarrow (A \wedge C)/S_2 \cup \{n\}, \Delta, \Delta'/(S' \cup S_1)} < (A \wedge B); 1; 1 >}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow (B \rightarrow (A \wedge C))/S_2, \Delta, \Delta'/(S' \cup S_1)}(\rightarrow_R)$$

Outros sistemas a partir de FIL tem sido desenvolvidos desde então. Véja-se na bibliografía (e figuras 15 e 16 do Apêndice) o trabalho de Ludmilla Franklin com a versão de FIL para Dedução Natural Intuicionista com múltiples conlusões (NFIL). Esse sistema resulta também um apoio intuitivo para compreender a versão em cálculo de seqüentes.

De Paiva e Pereira também destacam a adequação de um sistema tipo FIL para trabalhar com a Lógica de Domínios Constantes[25]. Esta lógica agrega

[24]No sistema de Kashima y Shimura, também apresentam um mix especial que permite fazer a seleção das ocorrências.

[25]A *Lógica de Domínios Constantes* (CDL), introduzida por Grzegorczyk (1964) e axiomatizada por Gornemann (1971).

à lógica intuicionista o axioma:

(CD) $\forall x(B \vee A(x)) \rightarrow (B \vee \forall x A(x))$, onde x não está livre em B

CDL tinha uma formulação prévia em cálculo de seqüentes que tinha todas as regras clássicas exceto as regras de introdução da negação e do condicional à direita com as restrições de LJ'. (Ou seja, o sistema LJ' mais a regra clássica de introdução do universal à direita permite a derivação do axioma CD). Este sistema não satisfaz a eliminação de corte. Em "Cut-Elimination Theorem for the Logic of Constant Domain" Kashima e Shimura mencionam o trabalho de López-Escobar que prova que esse sistema não satisfaz a eliminação de corte. Um contraexemplo o constitui a seguinte derivação:

$$\dfrac{\begin{matrix}\pi\\ \forall x(A(x) \vee B) \Rightarrow B, \forall x A(x)\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x A(x) \Rightarrow \forall x A(x)}{C, \forall x A(x) \Rightarrow \forall x A(x)}\,(W_L)}{\forall x A(x) \Rightarrow (C \rightarrow \forall x A(x))}\,(\rightarrow_R)}{\forall x(A(x) \vee B) \Rightarrow B, (C \rightarrow \forall x A(x))}\,(corte)$$

Além disso, López-Escobar considerou que não seria possível, agregando um número finito de regras, obter um sistema para Domínios Constantes livre de corte. Nesse mesmo artigo, Kashima e Shimura se ocupam exatamente desse problema e apresentam uma variação de CDL_1 que se concentra na regra ($\Rightarrow\rightarrow$). O sistema tem agregada a definição de uma *conexão* ($\sim$) entre fórmulas que representa a relação binária de dependência entre fórmulas no antecedente e fórmulas no sucedente. O novo seqüente é um seqüente etiquetado com números naturais que permite distinguir as ocorrências das fórmulas. A regra ($\rightarrow_R$):

$$\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

é aceita se a premissa $A^1, \Gamma \Rightarrow \Delta, B^2$ cumpre que $A^1 \nsim \Delta$. Mais precisamente a seguinte regra é admitida com um conjunto de condições:

$$\dfrac{A^1, \Gamma \Rightarrow \Delta, B^2}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B)^3}$$

onde (sendo G qualquer fórmula em Γ e D uma fórmula qualquer de Δ:

(i) $A^1 \nsim D$ no seqüente superior.

(ii) $G \sim D$ no seqüente inferior somente se estão relacionadas também no superior.

(iii) $G \sim (A \rightarrow B)^3$ no seqüente inferior se $G \sim B^2$ no seqüente superior.

Este novo sistema para Domínios Constantes satisfaz eliminação de corte.

2.3.3
Aplicações dos sistemas intuicionistas de sucedente múltiplo.

Como já dissemos, até a década dos 90, o sistema de sucedente múltiplo mais usado foi o LJ' (enquanto o trabalho de Dragalin foi rescatado pelas suas provas de admissibildiade da contração). O sistema LJ', quando apresentado por Takeuti[26], permitiu a aplicação de técnicas de análise de seqüentes para a obtenção de derivações, e portanto, de provas de completude para a lógica de primeira ordem. No caso do sistema de Gentzen, vemos que um seqüente em LJ da forma $\Gamma \Rightarrow (A \vee B)$ não pode ser reduzido a um seqüente da forma $\Gamma \Rightarrow A, B$. Isto sim é possível com LJ'. O mesmo problema pode ser percebido no processo de redução apresentado por Gentzen na sua primeira prova de consistência da Aritmética de Peano trabalhando com o fragmento $\{\wedge, \neg, \forall\}$. Pode se apreciar que, para o caso intuicionista, a prova necessita dos sucedentes múltiplos para trabalhar o caso da disjunção e, portanto, não pode ser realizada com LJ. Uma aplicação das técnicas usadas por Gentzen no caso clássico pode ser feita para o caso intuicionista usando LJ' como base lógica para a Aritmética de Heyting[27].

Notemos que as aplicações podem ser extendidos da lógica intuicionista para às lógicas intermediárias usando como base à intuicionista. Se caracterizarmos uma lógica como o conjunto de teoremas, então com o nome de *lógicas intermediárias* se denominam aquelas lógicas cuja força dedutiva se encontra entre a clássica e a intuicionista. Sistemas axiomáticos para estas lógicas podem se obter partindo de um sistema axiomático intuicionista (tipo Heyting) e agregando axiomas válidos na lógica clássica mas não na intuicionista. Em sistemas de seqüentes, o uso de LJ' para estas lógicas aparece no trabalho de Umezawa. Em "On logics intermediate between intuitionistics and classical predicate logic", Umezawa estuda as lógicas intermediárias usando LJ' como ponto de partida agregando outros seqüentes iniciais como novos axiomas. Deste modo estuda as relações de inclusão entre as diversas lógicas, inclusive a lógica de Dummett (caracterizada pela lei $((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$. Em "On intermediate propositional logics", o mesmo autor trabalha com LJ' para as lógicas intermediárias proposicionais estudando a independência de alguns símbolos lógicos em algumas lógicas, isto é, em que sistema intermediário cada símbolo perde sua independência em relação aos outros.

No caso de aplicações dos sistemas de sucedente múltiplo já vimos que, considerando as relações de dependência, foi possível formular sistemas para

[26]Takeuti. *Proof Theory*. Véja-se a prova de completude para LJ' e a formulação do *processo de redução de seqüentes* apresentado para esse objetivo.

[27]Pallares, M.F. "Extending the First Gentzen´s Consistency Proof to the Intuitionistic case".

a lógica linear com o fragmento multiplicativo e um sistema S5 livre de corte. Também foi possível com o sistema de Kashima e Shimura formular o sistema livre de corte para CDL. O contraexemplo mencionado tem a seguinte prova livre de corte (que fazemos com a notação de FIL:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a)(1) \Rightarrow A(a)/\{1\} \qquad B(2) \Rightarrow B/\{2\}}{(A(a) \vee B)(1) \Rightarrow A(a)/\{1\}, B/\{1\}}\,(\vee_L)}{\forall x(A(x) \vee B)(1) \Rightarrow A(a)/\{1\}, B/\{1\}}\,(\forall_L)}{\forall x(A(x) \vee B)(1) \Rightarrow B/\{1\}, A(a)/\{1\}}\,(E_R)}{\forall x(A(x) \vee B)(1) \Rightarrow B/\{1\}, \forall x A(x)/\{1\}}\,(\forall_R)}{C(3), \forall x(A(x) \vee B)(1) \Rightarrow B/\{1\}, \forall x A(x)/\{1\}}\,(W_L)}{\forall x(A(x) \vee B)(1) \Rightarrow B/\{1\}, (C \rightarrow \forall x A(x))/\{1\}}\,(\rightarrow_R)
$$

Percebe-se que, na última inferência, o condicional pode ser introduzido porque o índice da hipótese não ocorre na fórmula B.