

## 5

### Conclusões

#### 5.1

##### Modelagem do Centro das Distribuições de Retorno

Analizamos as distribuições empíricas de retornos intradiários do IBOVESPA para várias escalas temporais  $\Delta t$ , utilizando  $3,5 \times 10^5$  índices de preço obtidos a cada 30 segundos. A partir das propriedades de escala destas distribuições de acordo com o intervalo  $\Delta t$  das medidas de retorno, propusemos uma modelagem para a dinâmica de preços intradiária do mercado de ações brasileiro baseada na estatística não-extensiva de Tsallis.

O colapso de dados de retornos intradiários normalizados em uma única curva mestra, mostrado na figura 4.10, revelou a propriedade de invariância por mudança de escala temporal  $\Delta t$ .

A observação de invariantes nos sistemas econômicos, assim como nos sistemas físicos, denota a existência de grandezas conservadas e de mesmas leis a governar a dinâmica destes processos.

Retornos em escalas temporais ampliadas por um fator  $n$  são obtidos pela agregação de  $n$  retornos da escala original. Sendo assim, o resultado anterior nos leva a modelar as distribuições de retorno intradiários por distribuições invariantes por agregação de variável aleatória.

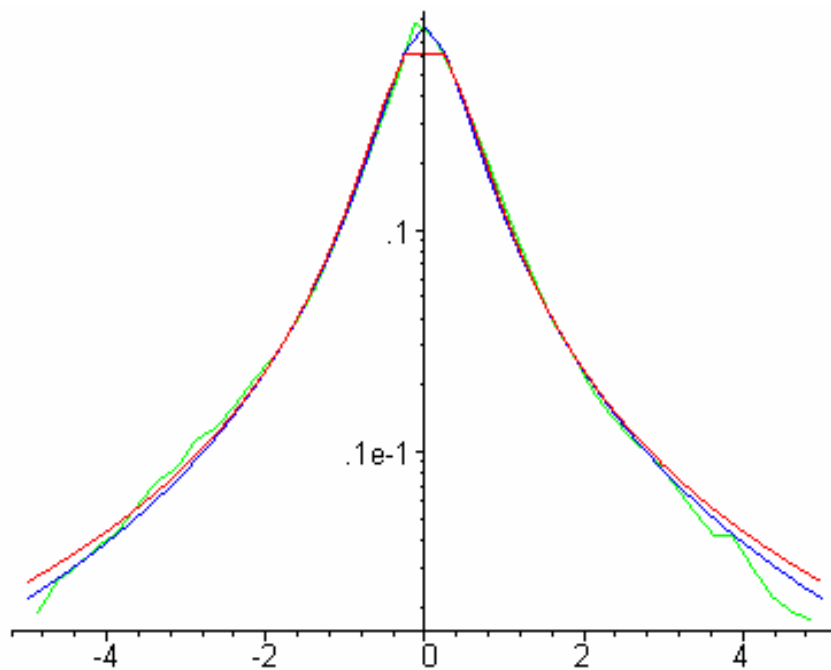
De acordo com o TLC generalizado para variáveis fracamente dependentes, deve-se utilizar para testes de hipótese, as distribuições Gaussianas e de Lévy. A primeira mostrou-se inadequada para a descrição dos dados empíricos. Por outro lado, na escala intradiária, deve-se esperar forte memória na formação dos preços, o que permite a modelagem por outras distribuições. Em particular, utilizamos neste trabalho como distribuições testes  $q$ -Gaussianas, que são soluções invariantes para uma classe de processos difusivos anômalos com correlação, regidos pela equação (3.29).

Considerando como região de ajuste a parte central da distribuição de  $\Delta t = 1$  minuto, correspondente aos valores de retornos até a magnitude de  $5\sigma$ , e o número de bins dos histogramas igual a 40, obtivemos para o valor ótimo do

parâmetro não extensivo  $q = 1,75$  e para o parâmetro  $\beta = 4,47\sigma$ , mostrados na figura 4.16.

No entanto, uma análise de dados intradiários do mercado americano (ver figura 1.2) mostrou que as distribuições empíricas eram consistentes com região central descrita por distribuições de Lévy. É natural então verificarmos a acuracidade deste ajuste em nossos dados.

O ajuste da distribuição de  $\Delta t = 1$  minuto por distribuições de Lévy definidas em (2.10) fornece os parâmetros  $\alpha = 1,3$  e  $\gamma = 0,3$ . Comparando-se o ajuste ótimo realizado para as distribuições de Lévy e de Tsallis na região central de retornos de  $\Delta t = 1$  minuto do IBOVESPA, verificamos na figura a seguir, que as q-Gaussianas fornecem uma descrição mais adequada.



**Figura 5.1 – Comparação entre a distribuição empírica para o retorno normalizado na escala de tempo de  $\Delta t = 1$  minuto (linha verde), e os melhores ajustes para a distribuição de Lévy (linha vermelha) e q-Gaussiana (linha azul).**

Mostramos também que os parâmetros da q-Gaussiana ótima para as distribuições de retornos de  $\Delta t = 1$  minuto eram estáveis ao longo de todo o período de observação, conforme podemos verificar através dos resultados dos ajustes ao longo dos meses das figuras 4.18 e 4.19.

Mostramos ainda que o parâmetro  $q$  era estacionário no horizonte de escalas microscópicas ( $\Delta t < 20$  minutos), verificando a consistência do ajuste de

$q$ -Gaussianas com  $q^*=1.75$  na região central das distribuições nestas escalas temporais, como mostrado nas figuras 4.31 e 4.32.

Discutimos também a necessidade de padronização na análise dos histogramas, pois o parâmetro não-extensivo  $q$  é relativamente sensível a pequenas mudanças do número de bins do histograma e da região de ajuste. Mostramos que, para um mesmo número de bins, utilizando região de ajuste formada por toda a faixa dos dados empíricos, encontramos valor de  $q$  ótimo menor do que o obtido com o ajuste apenas no centro da distribuição. Com o ajuste no *bulk* obtivemos valor  $q=1,75$ , próximo a  $q=2$ , correspondente à distribuição Lorentziana, que foi o resultado encontrado para o centro da distribuição de retornos nos dois mercados coreanos KOSPI e KODAQ [37]. Por outro lado, com o ajuste por toda a faixa dos dados empíricos, os valores do parâmetro  $q$  para o mercado brasileiro na escala intradiária são comparáveis aos obtidos de forma semelhante para o mercado americano NYSE e NASDAQ [11,12], como podemos constatar ao compararmos nosso resultado, mostrado na figura 4.15, com as figuras 1.6 e 1.7. No entanto, mostramos que o ajuste por toda a faixa de dados empíricos é menos acurado e que, neste caso, o valor ótimo do parâmetro  $q$  é na verdade um parâmetro efetivo, produzido pela contribuição das caudas curtas truncadas das distribuições empíricas.

## 5.2

### Truncamento das Distribuições de Retorno

Embora o valor  $q=1,75$  ultrapasse o valor limite  $q_c = 5/3$  para a existência de variância finita das distribuições de Tsallis, nas aplicações reais as caudas longas em lei de potência são sempre limitadas pela finitude do conjunto de dados. Assim, tais distribuições, com caudas atenuadas ou truncadas, podem descrever a variância finita dos dados empíricos.

Ao analisar as flutuações intradiárias de preços do IBOVESPA, verificamos que a distribuição de Tsallis com truncamento exponencial nas caudas modela as flutuações de preço de forma acurada, como mostrado na figura 4.21.

A realização de truncamentos exponenciais tem sido proposta recentemente como fato característico em algumas análises do mercado financeiro [8,10,21,37]. Deve-se observar ainda a semelhança de nossos resultados para intervalos de tempo intradiários mesoscópicos ( $\Delta t > 20$  minutos), mostrados na figura 4.33, com os do mercado americano [10], mostrados na

figura 1.5, no qual o comportamento exponencial da cauda das distribuições é dominante.

### 5.3

#### **Análise das Correlações Intradiaárias**

Analisamos também de forma qualitativa e quantitativa a existência de correlação ou memória nos retornos intradiaários sucessivos no tempo.

Para tal, realizamos a análise da evolução temporal das distribuições de retornos de uma série artificial produzida pelos retornos reais misturados, destruindo-se assim as correlações. Como mostrado na tabela 4.5, as distribuições provenientes dos dados misturados (MIST) convergiram com muita rapidez para a Gaussiana, em intervalo de apenas 1 hora, enquanto os dados das séries reais de retorno (EMP) ainda apresentavam parâmetro  $q_{\text{efetivo}} > 1$ , evidenciando o efeito da correlação temporal em retardar esta convergência.

A análise direta das auto-correlações linear e não-linear dos retornos de  $\Delta t = 1$  minuto, mostradas respectivamente nas figuras 4.27 e 4.28, apresentou resultados quantitativos muito semelhantes aos obtidos para o mercado americano [13], em particular, correlação linear de curto alcance até intervalo temporal  $\tau = 20$  minutos e correlação não-linear de longo alcance em todo intervalo temporal intradiaário. De acordo com estes resultados, obtivemos um forte comportamento superdifusivo em escalas temporais intradiaárias devido à presença destas correlações, como mostrado na figura 4.26.

Dos resultados anteriores conclui-se que a presença de correlação temporal retardando a convergência à distribuição Gaussiana permite a observação de um regime quase estacionário em escalas de tempo intradiaárias. Isto sugere a busca por uma modelagem superdifusiva e correlacionada para a dinâmica dos retornos de alta frequência. Os ajustes apresentados nas figuras 4.31 e 4.32 mostram que o regime estacionário é  $q$ -Gaussiano em escalas microscópicas. No entanto, devido ao truncamento exponencial das caudas, esta estacionaridade de curto prazo é quebrada, havendo uma transição para o regime Gaussiano de longo prazo.

## 5.4

### Modelagem para a Dinâmica dos Preços

O ajuste das distribuições de retorno de preços não é suficiente para uma completa descrição do processo estocástico dos preços. É necessário avaliar modelos para a evolução dinâmica das flutuações de preços.

Com este objetivo, analisamos a consistência dos resultados empíricos em escala de tempo ultra-curtas ( $\Delta t < 20$  minutos) com os previstos pela E.F.P. não-linear (3.29) com termo de força de reversão à média  $K(x) = a x + b$ . Pode-se mostrar [38], analisando a equação de Itô-Langevin associada (3.30), que esta modelagem implica na existência de correlação linear das flutuações sucessivas de preço, quando  $b \neq 0$ , assim como na presença de correlação não-linear nestas flutuações, para  $q \neq 1$ , através de termo de ruído multiplicativo  $G(x,t)$  dado por (3.28a). Estas características são importantes para a correta descrição dos resultados empíricos que mostram a existência das duas formas de dependência temporal entre os retornos de alta frequência do mercado acionário brasileiro.

Esta modelagem para o mercado financeiro intradiário pode ser melhor entendida a partir do coeficiente de difusão fenomenológico (3.28b) cuja forma funcional é proporcional a  $[P_q(x,t)]^{1-q/2}$ : os negociadores reagem tanto às informações quanto às atuações recentes dos outros negociadores, e desta interação mútua que precede a formação de preços, resulta que a mudança de preço futura depende da probabilidade da mudança de preço mais recente. O parâmetro  $q$  mede o grau de difusão anômala resultante desta interação entre os agentes.  $q > 1$  descreve a dinâmica superdifusiva na qual, segundo (3.28b) e (3.30), flutuações de preços improváveis ( $x$  grandes) tendem a ser seguidas por outra flutuação de preço improvável. Este fenômeno é também um fato estilizado da dinâmica de retornos de preço conhecido com “clustering” da volatilidade: retornos grandes tendem a ser seguidos por retornos grandes, não importando o sinal destas flutuações de preço.

A E.F.P. (3.29) possui como soluções  $P_q(x,t)$  distribuições  $q$ -Gaussianas com parâmetro não-extensivo  $q$  fixo e parâmetro de escala  $\beta(t)$  dado por (3.44). Verificamos através dos resultados mostrados na figura 4.34 que a evolução temporal da distribuição de retornos do índice de preços reescalados da BOVESPA é bem descrita por esta E.F.P. com parâmetro estacionário  $q^* = 1.75$ . Obtivemos assim uma descrição adequada para a dinâmica dos retornos de alta frequência através de um comportamento superdifusivo regido por parâmetro de

difusão  $D \cong 0,29$  e parâmetro de retorno à média  $b \cong 0,025$ . Este resultado é semelhante ao obtido para o S&P500 do mercado americano [34].

Lembrando que  $\beta(t)$  escala como  $\sigma^{-2}(t)$ , o inverso da variância, ou seja,  $\beta(t) \sim t^{-2H}$ , a equação (3.48) prevê comportamento superdifusivo com  $H = 1/(3-q^*) = 0,8$  para escalas de tempo tais que  $(t-t_0) \gg \Gamma_q$ . Substituindo os valores dos parâmetros em (3.47) encontramos  $\Gamma_q \cong 1$ . Desta forma, prevê-se que este comportamento é válido nas escalas mesoscópicas. No entanto, o valor previsto para o expoente de Hurst é maior do que o valor  $H \cong 0,7$ , mostrado na figura 4.26, obtido empiricamente para escalas de tempo até uma hora. Este resultado é esperado, pois além da modelagem utilizada ser apenas aproximada para escalas de tempo mesoscópicas, devido ao truncamento das caudas das distribuições empíricas, é menor a eficiência do mecanismo difusivo.

Nesta modelagem, a existência de força restauradora  $K(x)$  com taxa de reversão à média  $b \neq 0$  é fundamental para a obtenção de uma distribuição estável. O tempo característico (3.42a) do processo difusivo anômalo para atingir a  $q$ -Gaussiana de equilíbrio fornece o valor  $\tau=32$  minutos. No entanto, como vimos, a função de autocorrelação de retornos encontra-se em nível de ruído a partir de  $\tau = 20$  minutos. Isto significa que a partir desta escala de tempo, o parâmetro de reversão à média torna-se irrelevante, não sendo mais possível a evolução da distribuição de retornos para uma  $q$ -Gaussiana estável, de acordo com os resultados empíricos.

A estacionariedade de curto prazo é então quebrada e novo regime intradiário surge para escalas de tempo mesoscópicas, como um regime de transição até a escala diária, na qual  $H=0,5$ , segundo resultados recentes para o mercado de ações brasileiro [21,39].

Por outro lado, conforme nossos resultados, as flutuações de preço são dependentes em todas as escalas de tempo intradiárias analisadas. Assim, apesar do truncamento exponencial das caudas das distribuições serem cada vez mais dominantes neste novo regime, a presença de correlações não-lineares no processo difusivo é responsável pela convergência lenta ao regime Gaussiano de longo prazo, que só é atingido na escala mensal [21].

## 5.5

### Perspectivas Futuras

Alguns mercados ao redor do mundo já foram objeto de análise econofísica. Contudo, ainda existe muito trabalho a ser realizado. Em certos mercados, como os de países em desenvolvimento, os resultados são incipientes.

Como extensão natural do trabalho desenvolvido nesta dissertação, é necessário analisar empiricamente o comportamento de outras variáveis estocásticas como a volatilidade e o volume das negociações, incluindo-as na análise de formação de preços. Desta forma, espera-se poder modelar o termo estocástico fenomenológico da equação de Langevin (3.30) associada à E.F.P. não-linear (3.29) e assim descrever a presença de correlações de curto e de longo alcance que permeiam tais processos.