PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321140/CA

# 3 O Mecanismo de Oscilação dos Neutrinos

Neste capítulo, vamos descrever o mecanismo de oscilação de neutrinos devido a massas e misturas.

Em geral, quando os neutrinos tem massas não nulas, os seus auto-estados de massas diferentes dos auto-estados de interação. Nós definiremos o auto-estado de massa por $(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ e os auto-estados de massas dos léptons carregados por $(e, \mu, \tau)$. Os auto-estados de interação correspondentes são $(e^I, \mu^I, \tau^I)$ e $\vec{\nu} = (\nu_{Le}, \nu_{L\mu}, \nu_{L\tau})$. Na base de massa, as interações de corrente carregada leptônica são dadas por:

$$-\mathcal{L}_{\rm CC} = \frac{g}{\sqrt{2}}(\overline{e}_L \ \overline{\mu}_L \ \overline{\tau}_L)\gamma^\mu U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} W_\mu^+ + \text{h.c.}. \qquad (3\text{-}1)$$

Aqui $U$ é uma matriz $3 \times 3$. Dado uma matriz de massa do lépton carregado $M_\ell$ e a matriz de massa de neutrino $M_\nu$ numa base de interação,

$$-\mathcal{L}_M = (\overline{e}_L^I \ \overline{\mu}_L^I \ \overline{\tau}_L^I) \ M_\ell \begin{pmatrix} e_R^I \\ \mu_R^I \\ \tau_R^I \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\bar{\vec{\nu}})^c M_\nu \vec{\nu} + \text{h.c.} \ , \qquad (3\text{-}2)$$

podemos encontrar as matrizes diagonalizadas $V^\ell$ e $V^\nu$:

$$V^{\ell\dagger} M_\ell {M_\ell}^\dagger V^\ell = \text{diag}(m_e^2, m_\mu^2, m_\tau^2), \quad V^{\nu\dagger} M_\nu^\dagger M_\nu V^\nu = \text{diag}(m_1^2, m_2^2, m_3^2). \quad (3\text{-}3)$$

Aqui $V^\ell$ é uma matriz unitária $3\times3$, enquanto $V^\nu$ é uma matriz unitária $3\times3$. A matriz de mistura de neutrinos $U$ pode ser encontrada diagonalizando:

$$U_{ij} = P_{\ell,ii} \, {V_{ik}^{\ell}}^\dagger \, V_{kj}^\nu \, (P_{\nu,jj}), \qquad (3\text{-}4)$$

onde $P_\nu$ é uma matriz diagonal com fases arbitrárias apenas para os estados de Dirac e para neutrinos de Majorana, sendo uma matriz unitária (67). Esta matriz $U$ é análoga a matriz de mistura dos quarks conhecida como matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (68).

Usando esta matriz obtida na Eq.(3-4), podemos relacionar auto-estados de massas e auto-estados de sabores de neutrinos como:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{3} U^*_{\alpha i}|\nu_i\rangle \tag{3-5}$$

onde $|\nu_\alpha\rangle$ com $\alpha = e, \mu, \tau$ são os auto-estados de sabores e $|\nu_i\rangle$ com $i = 1, 2, 3$ são os auto-estados de massas.

## 3.1 Oscilação em 2 Gerações

Embora existam três sabores de neutrinos, vamos considerar um sistema mais simples com apenas dois neutrinos, para ilustrar o aspecto fundamental do fenômeno de oscilação.

### 3.1.1 Oscilação no Vácuo

Para ser mais simples, primeiramente vamos ignorar o efeito de matéria e considerar oscilação do neutrinos no vácuo. Supondo que os dois neutrinos têm massas não nulas e diferentes $m_1 \neq m_2$, os auto-estados de sabores e massas estão relacionados como,

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{2} U^*_{\alpha i}|\nu_i\rangle, \tag{3-6}$$

onde matriz de mistura $2 \times 2$ $U$ é dada por,

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{3-7}$$

O parâmetro $\theta$ é chamado ângulo de mistura e neste caso existe um única diferença de massa-quadrada $\Delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$.

Dado um neutrino produzido como auto-estado de sabor $|\nu_\alpha(0)\rangle$ e num instante $t$ ou após percorrer uma distância[1] $L \simeq t$:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{i=1}^{2} U^*_{\alpha i}|\nu_i(t)\rangle = U^*_{\alpha i}|\nu_i(0)\rangle \mathrm{e}^{-E_i t}\ . \tag{3-8}$$

A probabilidade deste neutrino ser detetado como $\nu_\beta$ é,

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) &= |\langle\nu_\beta|\nu_\alpha(t)\rangle|^2 = \left|\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} U^*_{\alpha i} U_{\beta j}\langle\nu_j(0)|\nu_i(t)\rangle\right|^2, \\ &= \delta_{\alpha\beta} - (2\delta_{\alpha\beta} - 1)\sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E}L\right) \end{aligned} \tag{3-9}$$

onde usamos as relações

[1] Como as massas dos neutrinos são muitos pequenas, em geral são ultra relativísticos, então é conveniente usarmos unidades naturais, $\hbar = c = 1$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321140/CA

Tabela 3.1: Valores Característicos de $L$ e $E$ para várias fontes de neutrinos e experimentos. Adaptada de Ref. (69)

| Experimentos | L (m) | E (MeV) | $\Delta m^2$ (eV$^2$) |
|---|---|---|---|
| Solar | $10^{10}$ | 1 | $10^{-10}$ |
| Atmosférico | $10^4 - 10^7$ | $10^2$–$10^5$ | $10^{-1} - 10^{-4}$ |
| Reator | $10^2 - 10^3$ | 1 | $10^{-2} - 10^{-3}$ |
| Acelerador | $10^2$ | $10^3$–$10^4$ | $\gtrsim 0.1$ |
| Acelerador (grande comprimento) | $10^5 - 10^6$ | $10^4$ | $10^{-2} - 10^{-3}$ |

$$E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \simeq p_i + \frac{m_i^2}{2E_i} \,. \tag{3-10}$$

e $p_i \simeq p_j \equiv p \simeq E$.

A probabilidade tem um comportamento oscilatório, com o comprimento de oscilação:

$$l_0^{\text{osc}} = \frac{4\pi E}{\Delta m^2} \; = \; \frac{\pi}{1.27}\left[\frac{E}{\text{MeV}}\right] \; \left[\frac{\text{eV}^2}{\Delta m^2}\right] \; \text{m} \tag{3-11}$$

Podemos ver claramente que para que a probabilidade de oscilação eq.(3-9) não seja nula, é preciso termos as seguintes condições: $\theta \neq 0$ e $\Delta m^2 \neq 0$.

Um experimento é caracterizado por uma energia típica $E$ do neutrino por um baseline $L$ (distância entre fonte e detector). Para ter uma sensibilidade para uma dado valor de $\Delta m^2$, o experimento tem que ser colocado com $E/L \approx \Delta m_{ij}^2$ ($L \sim l_0^{\text{osc}}$). Os valores típicos de $L/E$ para diferentes tipos de fontes e experimentos de neutrinos estão resumidos na tabela 3.1.

Se $(E/L) \gg \Delta m^2$ ($L \ll l_0^{\text{osc}}$), a oscilação não tem tempo para ter um efeito apreciável pois $\sin^2(\pi L/l_0^{\text{osc}}) \ll 1$. O caso de $(E/L) \ll \Delta m^2$ ($L \gg l_0^{\text{osc}}$) exige considerações mais cuidadosas. Nós não levamos em consideração feixes de neutrinos monocromáticos, assim, ao invés de medirmos $P_{\alpha\beta} = P(\nu_\alpha \to \nu_\beta)$ os experimentos são sensíveis para a probabilidade média

$$\begin{aligned} \langle P_{\alpha\beta} \rangle \;&= \frac{n_{\text{alvo}} \displaystyle\int dE_\nu \frac{d\Phi}{dE_\nu} \sigma_{CC}(E_\nu) P_{\alpha\beta}(E_\nu) \epsilon(E_\nu)}{n_{\text{alvo}} \displaystyle\int dE_\nu \frac{d\Phi}{dE_\nu} \sigma_{CC}(E_\nu) \epsilon(E_\nu)} \\ &= \delta_{\alpha\beta} - (2\delta_{\alpha\beta} - 1) \sin^2 2\theta \left\langle \sin^2\left(\frac{L}{l_0^{\text{osc}}}\pi\right)\right\rangle, \end{aligned} \tag{3-12}$$

onde $\Phi$ é o fluxo de energia do neutrino, $\sigma_{CC}$ é a seção de choque para o processo na qual o neutrino é detetado, $\epsilon(E_\nu)$ é a eficiência do detetor e $n_{\text{alvo}}$ é o número de alvo. Para $L \gg l_0^{\text{osc}}$ a fase oscilatória dá vários ciclos antes de ser detetado e a média para $\langle \sin^2(\pi L/l_0^{\text{osc}}) \rangle \simeq 1/2$.

### 3.1.2

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321140/CA

**Oscilação na Matéria**

Nesta seção , vamos discutir o efeito de matéria para oscilação de neutrinos. Com a presença de matéria, a Hamiltoniana efetiva que descreve a interação de neutrino eletrônico com a matéria devido à corrente carregada pode ser descrita como

$$H_{\text{ef}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e\ \gamma^\mu (1 -\ \gamma^5) \nu_e \bar{e} \gamma_\mu (1 -\ \gamma^5) e, \tag{3-13}$$

onde $G_F$ é constante de Fermi cujo valor numerico (59) é $1.16637 \times 10^{-5}$ GeV$^{-2}$. Esta Hamiltoniana efetiva implica no seguinte potencial de corrente carregada $V_{CC}$ para o neutrino[2] (11),

$$V_{\text{cc}} = \sqrt{2} G_F N_e, \tag{3-14}$$

onde $N_e$ é a densidade número de eletrons. Para $\bar{\nu}_e$, o $V_{\text{cc}}$ tem um sinal negativo.

Por outro lado, o potencial efetivo devido à corrente neutra que é comum para todos os tipos de neutrinos e é descrito como

$$V_{\text{cn}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_n, \tag{3-15}$$

onde $N_n$ é a densidade número de nêutrons e usamos neutralidade de matéria, isto é, número de prótons é igual a número de elétrons. Usualmente este potencial pode ser ignorado quando consideramos os efeitos de oscilação de neutrinos pois não depende de sabor. Portanto, vamos considerar só potencial devido a CC na Eq.(3-14).

Esse potencial pode ser expresso em termos da densidade de matéria $\rho$,

$$V_{\text{CC}} = \sqrt{2} G_F N_e \simeq 7.6 \times 10^{-14}\ Y_e \left[\frac{\rho}{\text{g/cm}^3}\right]\ \text{eV}\ , \tag{3-16}$$

onde $Y_e = \frac{N_e}{N_p + N_n}$ é número de elétron por núcleon. Três exemplos de densidades de matérias que são relevantes para as observações:

- No centro da Terra, $\rho \sim 10$ g/cm$^3$ and $V_{\text{CC}} \sim 10^{-13}$ eV;
- No centro do Sol, $\rho \sim 100$ g/cm$^3$ e $V_{\text{CC}} \sim 10^{-12}$ eV;
- Em Supernova, $\rho \sim 10^{14}$ g/cm$^3$ e $V_{\text{CC}} \sim$ eV.

Por simplicidade, vamos considerar o sistema de dois neutrinos misturados de $\nu_e$ com $\nu_x$ ($x = \mu$ ou $\tau$). A equação que descreve a evolução dos neutrinos na presença de matéria é dada por[3]

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_x \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_x \end{pmatrix}, \tag{3-17}$$

[2] Para um tratamento mais detalhado vide o apêndice A.
[3] Vide apêndice B.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321140/CA

cuja a hamiltoniana $H$ é definida por,

$$
\begin{aligned}
H &\equiv \frac{1}{2E}\left[U\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta m^2 \end{pmatrix}U^\dagger\right] + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} a & (\Delta m^2/4E)\sin 2\theta \\ (\Delta m^2/4E)\sin 2\theta & (\Delta m^2/2E)\cos 2\theta \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3-18}
$$

onde $a \equiv \sqrt{2}G_F N_e$ é o pontencial de interação do neutrinos com a matéria.

Definimos o auto-estado de massa na matéria, $\nu_i^m$, como os auto-estados de matriz de Hamiltoniana na Eq. (3-18). Eles estão relacionados com o auto-estado de interação através de uma rotação unitária $U(\theta_m)$

$$
\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_x \end{pmatrix} = U(\theta_m)\begin{pmatrix} \nu_1^m \\ \nu_2^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_m & \sin\theta_m \\ -\sin\theta_m & \cos\theta_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_1^m \\ \nu_2^m \end{pmatrix}. \tag{3-19}
$$

Os autovalores de $H$ correspondem as massas efetivas na matéria e são dados por (11, 12):

$$
\mu_{1,2}^2(x) = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} + 2aE \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(\Delta m^2\cos 2\theta - 2aE\right)^2 + \left(\Delta m^2 \sin 2\theta\right)^2}\ , \tag{3-20}
$$

enquanto que o ângulo de mistura na matéria é dado por:

$$
\tan 2\theta_m = \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{\Delta m^2\cos 2\theta - 2aE}, \tag{3-21}
$$

Nas Figs. 3.1 and 3.2 são mostradas, respectivamente, as massas efetivas e o ângulo de mistura em função do potencial $a$, para $a > 0$ e $\Delta m^2 \cos 2\theta > 0$. Nota-se que, mesmo se os neutrinos fossem partículas sem massas, o efeito da matéria produz neles uma massa efetiva, dado pelo potencial $V_{CC}$.

A densidade ressonante (ou potencial) $a_R$ é definida com o valor de $a$ para o qual o $\theta_m$ dá máxima mistura. Como estamos no quadrante (0,$\pi/2$), esse valor é máximo quando $\theta_m = 45^0$ o que implica $a_R = \Delta m^2\cos 2\theta$.

Portanto, quando $\theta_m = \pi/4$, esperamos o maior efeito de oscilação , pois $\sin 2\theta_m = 1$ o que corresponde a amplitude de oscilação tem o seu valor máximo. O ângulo de mistura na matéria $\tan\theta_m$ muda de sinal no $a_R$, onde podemos ver na eq (3-21), para $a > a_R$, temos $\theta_m > \theta$, conforme mostra a Fig. 3.2.

O comprimento de oscilação na matéria é dada por,

$$
l^{\rm osc} = \frac{\Delta m^2}{\sqrt{(\Delta m^2\cos 2\theta - 2aE)^2 + (\Delta m^2 \sin 2\theta)^2}} l_0^{\rm osc}, \tag{3-22}
$$

onde o comprimento de oscilação no vácuo, foi definido pela eq. (3-11). No

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321140/CA

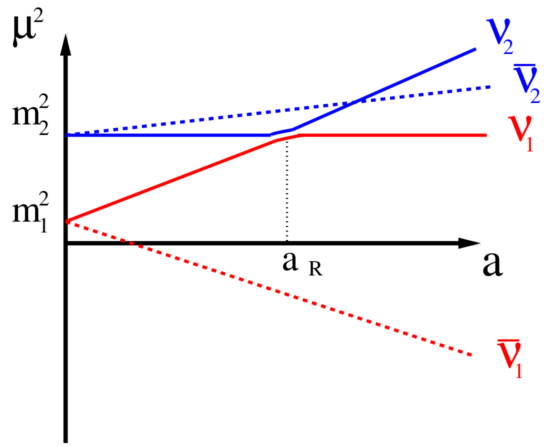


Figura 3.1: As massas efetivas adquiridas por um sistema com 2 neutrinos em função do potencial efetivo $a$ (conforme a Eq. 3-20). Adaptado da Ref. (69).

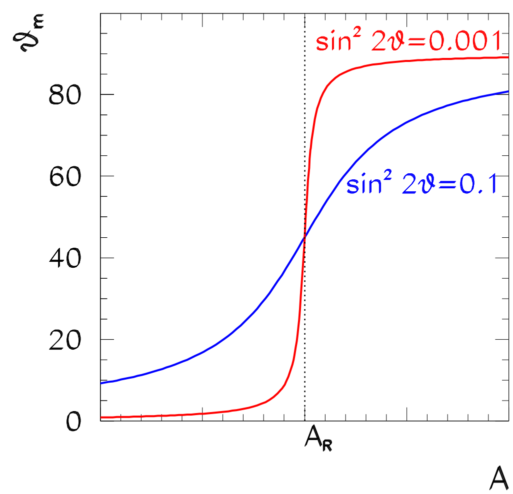


Figura 3.2: O ângulo de mistura na matéria para um sistema de dois neutrinos em função do potencial $A$ para 2 diferentes ângulos de misturas no vácuo [conforme a Eq. (3-21)], Ref. (69).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321140/CA

ponto de ressonância, quando $a = \Delta m^2 \cos 2\theta / 2E$, o comprimento de oscilação na matéria é dada por

$$l_R^{\rm osc} = \frac{l_0^{\rm osc}}{\sin 2\theta}. \tag{3-23}$$

A largura (na distância) da região de ressonância, $\delta r_R$, correspondendo a $\delta a_R = \Delta m^2 \sin^2 2\theta / E$, é dado por:

$$\delta r_R = \frac{\delta a_R}{|\frac{da}{dr}|_R} = 2\,\tan 2\theta \times h_R, \tag{3-24}$$

onde definimos a altura de ressonância como:

$$h_R \equiv \left|\frac{1}{a}\frac{da}{dr}\right|_R^{-1}. \tag{3-25}$$

**3.2**

### Oscilação em 3 Gerações

A descrição combinada das anomalias dos neutrinos solar e atmosférico exige que todos os 3 sabores de neutrinos tomem parte na oscilação. As misturas dos neutrinos (9) para 3 sabores são descritas numa matriz de $3 \times 3$. Tal matriz de mistura [4] pode ser parametrizada na forma padrão (59) como,

$$U_{\mathrm{MNS}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{-i\alpha_1/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_2/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_{13}c_{12}e^{-i\alpha_1/2} & s_{12}c_{13}e^{i\alpha_2/2} & s_{13}e^{-i\delta} \\ (-s_{12}c_{23} - s_{23}s_{13}c_{12}e^{i\delta})e^{i\alpha_1/2} & (c_{23}c_{12} - s_{23}s_{13}s_{12}e^{i\delta})e^{i\alpha_2/2} & s_{23}c_{13} \\ (s_{23}s_{12} - s_{13}c_{23}c_{12}e^{i\delta})e^{i\alpha_1/2} & (-s_{23}c_{12} - s_{13}s_{12}c_{23}e^{i\delta})e^{i\alpha_2/2} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (3\text{-}26)$$

onde $c_{ij} \equiv \cos\theta_{ij}$ e $s_{ij} \equiv \sin\theta_{ij}$, sendo $\theta_{ij} \in [0, \pi/2]$, o ângulo de mistura entre i-ésimo e j-ésimo geração, $\delta$ é conhecida como a fase de violação de CP de Dirac e as fases $\alpha_1$ e $\alpha_2$ são as fases de Majorana [5], que existe para o caso que $\nu = \bar{\nu}$.

O ângulo de mistura $\theta_{12}$ foi medido por neutrinos solares (22, 23, 24, 25, 27) e o experimento KamLAND (28) enquanto que $\theta_{23}$ foi medido por neutrinos atmosféricos (16, 17, 19) e aceleradores (20, 21). Por outro lado, para $\theta_{13}$, é conhecido um limite superior, obtido principalmente por dados de neutrinos vindos de reatores (29). Podemos observar na matriz $U_{\mathrm{MNS}}$ que o ângulo $\theta_{13}$ vem com a fase de violação de $CP$, e então se $\theta_{13}$ não for nulo e for relativamente grande, temos alguma possibilidade de observar o efeito de violação de $CP$.

Como veremos no próximo capítulo, os dados de neutrinos solares e atmosféricos exigem que a diferença de massa satisfaça:

$$\Delta m^2_{\odot} \ll |\Delta m^2_{\mathrm{atm}}|, \quad (3\text{-}27)$$

onde $\Delta m^2_{\odot} \equiv \Delta m^2_{21} \equiv m^2_2 - m^2_1$ é relevante para oscilação de neutrinos solares enquanto que, $\Delta m^2_{\mathrm{atm}} \equiv \Delta m^2_{32} \equiv m^2_3 - m^2_2 \simeq \Delta m^2_{31} \equiv m^2_3 - m^2_1$ é relevante

[4] Às vezes, esta matriz é chamada matriz de Maki-Nakagawa-Sakata (MNS) ou Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) ou Maki-Nakagawa-Sakata-Pontecorvo (MNSP).

[5] A probabilidade de oscilação não depende das fases de Majorana.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321140/CA

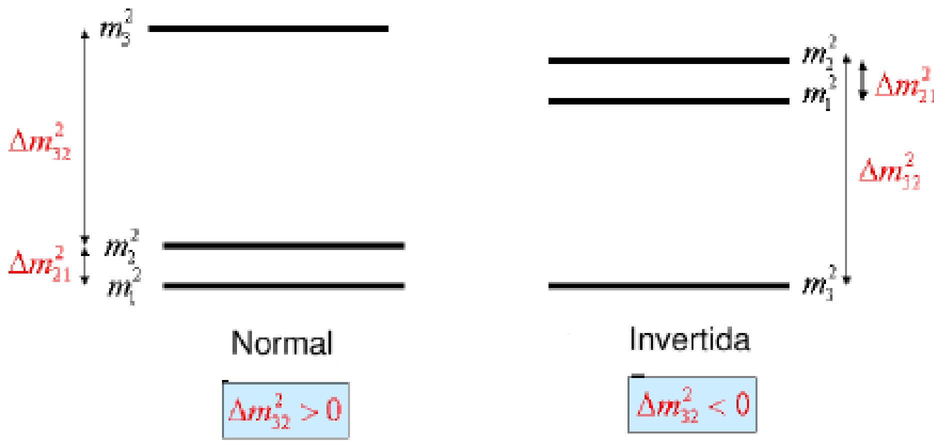


Figura 3.3: Os ordenamentos de massas dos neutrinos, sendo que na figura da esquerda temos a hierarquia normal enquanto a da direita, a hierarquia invertida.

para oscilação de neutrinos atmosféricos. Existem 2 possíveis ordenamento de massas na qual podemos escolher como:

$$\Delta m_{21}^2 = \Delta m_\odot^2 \ll \Delta m_{32}^2 \simeq \Delta m_{31}^2 = \Delta m_{\text{atm}}^2 > 0; \quad (3\text{-}28)$$

$$\Delta m_{21}^2 = \Delta m_\odot^2 \ll -\Delta m_{31}^2 \simeq -\Delta m_{32}^2 = |\Delta m_{\text{atm}}^2| > 0, \quad (3\text{-}29)$$

e pode ser esquematizado na Fig. 3.3, onde as figuras esquerda (hieraquia normal) e direita (hieraquia invertida) correspondem, respectivamente, às eqs. (3-28) e (3-29). A hieraquia normal é naturalmente relacionada com o ordenamento que temos para léptons carregados e quarks, $m_1 < m_2 < m_3$. Por outro lado, a hierarquia invertida implica que $m_3 < m_1 < m_2$ como mostrado na Fig. 3.3. A hieraquia correta ainda é desconhecida e descobrí-la é considerado como uma das tarefas mais importantes.

A determinação da probabilidade de oscilação para neutrinos solares e atmosféricos vem da resolução da equação de movimento do sistema de neutrinos na matéria (sol ou Terra). Em três gerações de sabores, esta equação corresponde a:

$$i\frac{d\vec{\nu}}{dt} = H\,\vec{\nu}, \qquad H = U \cdot H_0^d \cdot U^\dagger + V\,, \quad (3\text{-}30)$$

onde $U_{MNS}$ é a matriz de mistura leptônica, e $\vec{\nu} \equiv (\nu_e, \nu_\mu\ \nu_\tau)^T$, são os auto-estados de sabores, e $H_0^d$ é a Hamiltoniana do vácuo que é dada por:

$$H_0^d = \frac{1}{2}\text{diag}\left(0, \Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2\right)\,, \quad (3\text{-}31)$$

e $V$ é o potencial efetivo que descreve a interação de corrente carregada na matéria:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321140/CA

$$V = \mathrm{diag}\left(\pm\sqrt{2}G_F N_e, 0, 0\right) \equiv \frac{1}{2E}\mathrm{diag}\,(a, 0, 0)\,. \tag{3-32}$$

Os sinais + e − se referem a neutrinos e antineutrinos, respectivamente, e $N_e$ é a densidade número de elétrons do Sol ou Terra.

No que segue, focalizamos na hierarquia normal da Eq. (3-28), na qual temos 5 parâmetros relevantes que são relacionados com experimentos na seguinte forma:

$$\Delta m^2_\odot = \Delta m^2_{21}, \quad \Delta m^2_{\mathrm{atm}} = \Delta m^2_{32}, \tag{3-33}$$

$$\theta_\odot = \theta_{12}, \quad \theta_{\mathrm{atm}} = \theta_{23}, \quad \theta_{\mathrm{reactor}} = \theta_{13}\ . \tag{3-34}$$

Para transições no vácuo e na matéria, os resultados também se aplicam à hierarquia invertida, fazendo a seguinte transformação: $\Delta m^2_{32} \to -\Delta m^2_{32}$.

A fórmula geral para a probabilidade de oscilação para a transição $\ell \to \ell'$ após percorrer uma distância $L$ no vácuo é dada por

$$\begin{aligned} P(\nu_\ell \to \nu_{\ell'}) &= \left|\sum_i U_{\ell i}U^*_{\ell' i}e^{-i(m_i^2/2E)L}\right|^2 \qquad (3\text{-}35)\\ &= \delta_{\ell\ell'} - 4\Re\sum_i\sum_{j\neq i} U_{\ell i}U^*_{\ell' i}U_{\ell j}U^*_{\ell' j}\sin^2\left(\frac{\Delta m^2_{ij}L}{4E}\right)\\ &+2\Im\sum_i\sum_{j\neq i} U_{\ell i}U^*_{\ell' i}U_{\ell j}U^*_{\ell' j}\sin\left(\frac{\Delta m^2_{ij}L}{2E}\right). \end{aligned}$$

Podemos ver claramente que a probabilidade de oscilação (3-35) não depende das fases de Majorana. As oscilações descritas pela Eq.(3-35) violam o número individual de léptons de sabor, mas conserva o número de léptons total.

No vácuo e em 3 gerações, a fórmula geral pode ser simplificada em diversos casos de importância prática. Usando o fato empírico de que $\Delta m^2_\odot < \Delta m^2_{\mathrm{atm}}$, e considerando $\Delta_{atm} = \Delta m^2_{atm}L/4E_\nu$ e $\Delta_\odot = \Delta m^2_\odot L/4E_\nu$, temos as expressões aproximadas para as probabilidades de oscilações (70):

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \to \nu_\tau) \simeq\ & \cos^4\theta_{13}\ \sin^2 2\theta_{23}\ \sin^2\Delta_{atm} \qquad (3\text{-}36)\\ & -\Delta_\odot\ \cos^2\theta_{13}\ \sin^2 2\theta_{23}\ (\cos^2\theta_{12} - \sin^2\theta_{13}\sin^2\theta_{12})\ \sin 2\Delta_{atm}\\ & -\Delta_\odot\ \cos\delta\ \cos\theta_{13}\ \sin 2\theta_{12}\ \sin 2\theta_{13}\ \sin 2\theta_{23}\ \cos 2\theta_{23}\ \sin(2\Delta_{atm})/2\\ & +\Delta_\odot\ \sin\delta\ \cos\theta_{13}\ \sin 2\theta_{12}\ \sin 2\theta_{13}\ \sin 2\theta_{23}\ \sin^2\Delta_{atm}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \to \nu_e) \simeq\ & \sin^2 2\theta_{13}\ \sin^2 2\theta_{23}\ \sin^2\Delta_{atm} \qquad (3\text{-}37)\\ & -\Delta_\odot\ \sin^2\theta_{23}\ \sin^2\theta_{12}\ \sin^2 2\theta_{13}\ \sin 2\Delta_{atm} \end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321140/CA

$$-\Delta_\odot \ \cos\delta \ \cos\theta_{13} \ \sin 2\theta_{13} \ \sin 2\theta_{23} \ \sin 2\theta_{12} \ \sin(2\Delta_{atm})/2$$
$$-\Delta_\odot \ \sin\delta \ \cos\theta_{13} \ \sin 2\theta_{12} \ \sin 2\theta_{13} \ \sin 2\theta_{23} \ \sin^2\Delta_{atm},$$

onde consideramos correções de primeira e segunda ordens para $\Delta_\odot$ e $\Delta_{atm}$, respectivamente. É claro que, pela unitariedade da probabilidade, a probabilidade de sobrevivência $P(\nu_\mu \to \nu_\mu)$ será dada por:

$$P(\nu_\mu \to \nu_\mu) = 1 - P(\nu_\mu \to \nu_e) - P(\nu_\mu \to \nu_\tau) \tag{3-38}$$

A presença da fase $\delta$ na matriz de mistura Eq. (3-26) implica na possibilidade de violação CP em oscilação de neutrinos no vácuo,

$$P(\nu_\ell \to \nu_{\ell'}) \neq P(\bar{\nu}_\ell \to \bar{\nu}_{\ell'}). \tag{3-39}$$

Ou seja, em princípio, a probabilidade de $\nu_\mu$ oscilar para $\nu_e$ (chamado de canal de aparecimento) é diferente da probabilidade de $\bar{\nu}_\mu$ oscilar para $\bar{\nu}_e$. A grandeza de violação de CP e é caracterizada por:

$$\begin{aligned} P(\bar{\nu}_\mu \to \bar{\nu}_e) - P(\nu_\mu \to \nu_e) \ &= \ -[P(\bar{\nu}_\mu \to \bar{\nu}_\tau) - P(\nu_\mu \to \nu_\tau)] \\ &= P(\nu_e \to \nu_\tau) - P(\bar{\nu}_e \to \bar{\nu}_\tau) \\ &= -4J[\sin 2\Delta_{12} + \sin 2\Delta_{23} + \sin 2\Delta_{31}] \\ &= 16J \sin 2\Delta_{12} \ \sin 2\Delta_{23} \ \sin 2\Delta_{31} \end{aligned} \tag{3-40}$$

onde

$$J \equiv \cos^2\theta_{13} \ \sin\theta_{13} \ \cos\theta_{23} \ \sin\theta_{23} \ \cos\theta_{21} \ \sin\theta_{21} \sin\delta \tag{3-41}$$

é chamado de fator de Jarlskog (71).

Assim, o tamanho do efeito é o mesmo em todos os três canais, e a fase de violação de $CP$ é observável apenas se as três massa forem diferentes, isto é, não degeneradas e todos os três ângulos não são nulos. A possibilidade de violação de $CP$ no setor de léptons foi pela primeira vez discutida por Cabibbo (72) e Barger (73). Enquanto que a invariancia de simetria de $CPT$ implica que a violação de $CP$ e a violação de T são equivalentes[6].

No vácuo, a conservação de $CP$ implica que $P(\nu_\ell \to \nu_{\ell'}) = P(\bar{\nu}_\ell \to \bar{\nu}_{\ell'})$. Esforços substanciais são reservados para testes de $CP$. O efeito de matéria pode induzir a inegualdade entre $P(\nu_\ell \to \nu_{\ell'})$ e $P(\bar{\nu}_\ell \to \bar{\nu}_{\ell'})$ mesmo que $\delta$ seja nula (ou $\pi$) e, assim, uma análise deve ser feita cuidadosamente para eles.

A expressão aproximada da probabilidade de oscilação com o efeito de matéria foi obtida por Cervera *et al.* (74), que, por exemplo, para $P(\nu_\mu \to \nu_e)$

[6]A violação de $T$ ou reversão temporal, significa que a oscilação depende da direção do tempo, isto é, $P(\nu_\mu \to \nu_e) \ \neq \ P(\nu_e \to \nu_\mu)$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321140/CA

é dada por:

$$
\begin{aligned}
& P(\nu_\mu \to \nu_e) \\
= \quad & 4{c^2}_{13}\ s_{13}\ c_{23}\ s_{12} s_{23}^2\ \sin^2\Delta_{31} \\
& +8\ {c^2}_{13}\ s_{13}\ s_{23}\ c_{23}\ s_{12}\ c_{12}\ \sin^2\Delta_{31}[\cos\Delta_{32}\ \cos\delta\ \sin\Delta_{32}\ \sin\delta]\ \sin\Delta_{21} \\
& -8\ c_{13}^2\ s_{13}^2\ s_{23}^2\ s_{12}^2\ \cos\Delta_{32}\ \sin\Delta_{31}\ \sin\Delta_{21} \\
& +4\ c_{13}^2\ s_{12}^2\ [c_{12}^2\ c_{23}^2 +\ s_{12}^2\ s_{23}^2\ s_{13}^2 - 2\ c_{12}\ c_{23}\ s_{12}\ s_{23}\ s_{13}\ \cos\delta]\ \sin^2\Delta_{21} \\
& -8\ c_{13}^2\ s_{13}^2\ s_{23}^2\ (1-2\ s_{13}^2)\ \frac{aL}{4E}\ \sin\Delta_{31}\ \left[\cos\Delta_{32} - \frac{\sin\Delta_{31}}{\Delta_{31}}\right] \qquad (3\text{-}42)
\end{aligned}
$$

onde usamos as seguintes notações: $s_{ij} = \sin\theta_{ij},\ c_{ij} = \cos\theta_{ij},\ \Delta_{ij} = \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E_\nu}$ e o efeito de matéria é caracterizado por $a$, que já foi definido na Eq. 3-18.

A probabilidade de oscilação para $P(\bar{\nu}_\mu \to \bar{\nu}_e)$ é obtida fazendo as seguintes substiuições $\delta \to -\delta$ e $a \to -a$.

O primeiro termo da Eq. (3-42) nos fornece uma forte efeito, enquanto os termos da terceira e quarta linhas desta expressão correspondem a pequenas correções de conservação de $CP$, proporcionais a $\sin\Delta_{21}$ e $\sin^2\Delta_{21}$. O termos com $\sin\delta$ na segunda linha viola a simetria $CP$, enquanto que o termo $\cos\delta$ a preserva. Finalmente o termos com $aL/4E_\nu$, na última linha, representa o efeito de matéria.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321140/CA