

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Definição dos Problemas de Localização

Revelle et al. (1970) fazem uma revisão dos problemas de localização conhecidos na década de 60. Os autores citam que o problema de localizar uma instalação ou posto de serviço consiste em escolher uma posição geográfica para sua operação, de modo que uma medida de utilidade seja minimizada, satisfazendo diversas restrições, em particular as restrições de demanda. De uma maneira geral, no setor privado, o objetivo é normalmente a minimização dos custos ou a maximização dos lucros. Já no setor público, procura-se maximizar o benefício oferecido à sociedade, ou minimizar os custos de serviço oferecidos. Este setor oferece ou gerencia a oferta de serviços diversos à sociedade e são divididos em: serviços ordinários (escolas, correios, serviços de água, gás, esgoto, etc.); e serviços extraordinários (bombeiros, polícia, ambulâncias, hospitais, etc.). No caso dos serviços ordinários, a preocupação maior dá-se com a distância média usuário-instalação. O ideal então é minimizar a média das distâncias, pois as mesmas devem ser percorridas seguidamente. No caso dos serviços extraordinários, a preocupação básica relaciona-se à maior distância eventualmente percorrida, pois o fator tempo pode ser crucial para a qualidade do atendimento.

Expressando a classificação desses autores em linguagem de programação, diz-se que os problemas de serviços ordinários correspondem a problemas de minisoma, ou seja, os problemas são modelados como um problema de minimizar um somatório de distâncias. Os problemas extraordinários correspondem a um problema de minimax, ou seja, minimizar a maior distância.

Os problemas de localização podem ser divididos em duas vertentes fundamentais: localização em um plano e localização em uma rede. Para os problemas de localização em um plano, supõe-se a inexistência de restrições de percurso, de modo que se possa usar a distância mais curta. Assim, deve-se adotar uma métrica que represente modos alternativos do mapeamento da esfera terrestre em um plano. As métricas mais adotadas são a euclidiana e a metropolitana.

Sejam então os pontos i e j com coordenadas (x_i, y_i) e (y_i, y_j) :

Métrica Euclidiana: $D_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$

Métrica Metropolitana: $D_{ij} = |x_i - x_j| + |y_i - y_j|$

A métrica euclidiana deriva-se da geometria básica desenvolvida por Euclides e está associada ao conhecido teorema de Pitágoras, o qual demonstra que a distância mais curta entre dois pontos é uma linha reta. A métrica metropolitana é freqüentemente mais simples de ser medida e está coerente com a representação de pontos no plano segundo o método cartesiano. Assim, a distância entre dois pontos i e j exigiria a soma das diferenças de ordenadas.

Pizzolato (2002) cita que, em 1909, Weber estudou a localização em um plano de uma fábrica entre dois recursos e um único mercado. Nesse estudo, observou-se que certos processos, como a fabricação de aço, são perdedores de peso, isto é, a soma dos pesos das matérias-primas é maior que o peso dos produtos acabados. O peso é perdido no processo de produção, devido a subprodutos e rejeitos não utilizáveis. Conseqüentemente, para evitar o transporte de produtos inúteis, tais processos são realizados próximos às fontes de matérias-primas.

Por outro lado, existem processos ganhadores de peso. Isso ocorre quando matérias-primas disponíveis por toda a parte, como o ar ou a água, são incorporadas ao processo. Portanto, para reduzir custos de transporte, o melhor seria localizar tais processos o mais próximo possível dos mercados. Exemplo característico é o engarrafamento de refrigerantes. Os xaropes são embarcados para as plantas de envasamento e misturados com água. Essas plantas devem estar localizadas próximas aos mercados consumidores.

Caracteriza-se como problema de Weber aquele em que, dados vários pontos ponderados, deseja-se localizar um ponto central P , de acordo com a equação a seguir. O problema consiste em localizar o ponto central P que minimize a soma das distâncias ponderadas do conjunto de pontos $i \in N$ ao ponto P . Para isso, tem-se:

$$\text{Min}Z = \sum_{i \in I} W_i D_{ip} = \sum_{i \in I} W_i \sqrt{(X_i - X_p)^2 + (Y_i - Y_p)^2} \quad (1)$$

W_i = Peso correspondente do ponto i (bens demandados, recursos enviados, população, etc.);

(X_i, Y_i) = Coordenadas do ponto i ;

(X_p, Y_p) = Coordenadas desconhecidas do ponto central P , a determinar;

D_{ip} = Distância euclidiana do ponto i ao ponto central P ;

N = Número de pontos servidos.

Pizzolato (2002) examina métodos de solução para o problema de localização em rede, restringindo os elementos candidatos aos vértices e aos arcos. São citados como exemplos de redes, os sistemas de transporte que operam ao longo de vias ou rotas específicas e que, interligadas, formam uma rede. Assim, o transporte rodoviário pressupõe a existência de uma rede rodoviária; o transporte urbano pressupõe uma rede de artérias urbanas; as linhas de trem exigem uma rede ferroviária e assim por diante.

O autor também lembra que em todo problema de localização há informações não incorporadas aos modelos, tais como, preferências, subjetividade e vários outros itens intangíveis. Assim, os métodos heurísticos passam a ser mais apreciados devido à simplicidade em se obter, ou em se impor, soluções alternativas, o que não é viável nos métodos exatos, que só oferecem uma única solução.

Por outro lado, os problemas de localização podem ainda ser classificados em problemas capacitados e problemas não capacitados. Os capacitados correspondem aos casos em que as instalações a serem definidas possuem uma capacidade máxima de atendimento, enquanto que os não capacitados são aqueles capazes de atender a toda a demanda existente. Naturalmente, os modelos não capacitados são os de mais simples resolução, pois se trata de uma restrição a menos na estrutura do problema.

Para esse autor, os estudos de Hakimi (1964) tiveram um grande efeito no estudo da localização em redes, ao demonstrar dois teoremas. O primeiro teorema estabelece que, ao se escolher um ponto central em uma rede, os candidatos a ponto central são os vértices da rede. O segundo teorema examina o caso de se escolher p pontos centrais, conhecido como o problema da p -mediana, sendo demonstrado que a seleção pode ficar restrita aos N vértices.

Assim, no caso da p -mediana, o número de possíveis alternativas é $\binom{N}{p}$,

tornando o problema de natureza combinatorial.

De acordo com o primeiro teorema, considera-se a existência de um ponto em uma rede que minimize a soma ponderada das distâncias mais curtas de todos os vértices a este ponto, e que vem a ser um dos vértices da rede. Sejam então:

W_i = Peso associado ao vértice i ;

D_{ij} = Distância mais curta entre os vértices i e j ;

N = Conjunto de vértices da rede;

r = um ponto qualquer da rede (podendo incluir vértices e arcos).

O teorema demonstra que se $h \in N$ é um vértice da rede, então:

$$\sum_{i \in N} W_i d_{ih} \leq \sum_{i \in N} W_i d_{ir} \quad (2)$$

O segundo teorema demonstra que existe um conjunto p de pontos, exclusivamente vértices da rede, que minimiza a soma das distâncias ponderadas de todos os vértices aos mais próximos desses p pontos da rede (é possível que exista um outro conjunto p de pontos, nem todos vértices, que dêem o mesmo número).

Pizzolato et al. (2004), ao estudar a localização de escolas públicas, utiliza o modelo da p -mediana para determinar a localização ótima dessas facilidades. Esse modelo é apropriado para áreas urbanas e densamente povoadas; ele pressupõe que o aluno prefere a escola mais próxima de sua residência. De acordo com esse modelo, a localização ideal das escolas corresponde a centros de gravidade que minimizem a distância residência-escola, a qual é percorrida duas vezes por dia. Assim, a região estudada é dividida em vários setores censitários e cada um desse setor é substituído por um vértice, geograficamente próximo ao seu geocentro, ou centróide. Esse vértice representa o ponto que concentra toda a população do setor censitário. Afastamentos entre geocentros devem ser medidos mediante distâncias euclidianas ou mediante distâncias ao longo dos percursos possíveis entre os pares de vértices.

Assim, cria-se um grafo $G = (N, A)$, com $N = \{1, \dots, n\}$ vértices, representando os geocentros dos setores censitários da área em estudo. Para cada vértice $i \in N$ está associado um peso q_i , o qual representa a sua população escolarizável ou demanda escolar centrada naquele vértice e a cada

par de vértices (i, j) está associada uma distância d_{ij} . A matriz $D = [d_{ij}]$ reúne as distâncias entre todos os pares de vértices.

O modelo da *p-mediana* supõe que tanto alunos como escolas estejam localizados nos vértices, e que os alunos preferem a escola mais próxima de suas residências. Dessa forma, se um vértice contém uma escola, ela atende todo aluno que mora naquele setor censitário, o qual, de acordo com a simplificação adotada, percorrerá uma distância nula. Caso o vértice não contenha uma escola, o morador vai preferir o vértice mais próximo com uma escola e todos os alunos percorrerão a distância separando esses dois vértices.

O uso do modelo da *p-mediana* pode ser visto como o problema de tomar os N vértices e agrupá-los em p conjuntos, em torno de um vértice mediano, onde existe ou deveria existir uma escola. Esse processo produz p micro regiões, C_1, C_2, \dots, C_p , cujas respectivas medianas são as localizações e cada um dos demais vértices do grafo pertence a uma das regiões cuja mediana seja a mais próxima. Assim, o modelo da *p-mediana* corresponde ao seguinte modelo de programação linear binária:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i d_{ij} x_{ij} \quad (3)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1; \quad j \in N \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{jj} = p \quad (5)$$

$$x_{ij} \leq x_{jj}; \quad i, j \in N \quad (6)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}; \quad i, j \in N \quad (7)$$

Onde:

N é o conjunto de vértices da rede, $N = \{1, \dots, n\}$;

$D = [d_{ij}]_{n \times n}$ é a matriz simétrica de distâncias, com $d_{ii} = 0$, $i \in N$;

p é o número de medianas a serem localizadas;

q_i representa a população escolar do vértice i ;

x_{ij} são as variáveis de decisão, com $x_{ij} = 1$ se o vértice i está alocado ao vértice j , e $x_{ij} = 0$, no caso contrário; e $x_{jj} = 1$ se o vértice j é uma mediana e $x_{jj} = 0$, no caso contrário, para $i, j \in N$;

A Função objetivo consiste em minimizar as distâncias ponderadas de cada vértice à mediana mais próxima; as restrições (4) e (5) impõem que cada vértice i seja alocado a um único vértice j , o qual deve ser uma mediana. A restrição (5) determina o exato número p de medianas a serem localizadas e (7) indica as condições de integralidade.

Brandeau e Chiu (1989) levantaram uma tipologia dos problemas de localização prevalentes nos anos 80. Os autores definem o problema de localização como a melhor maneira de se alocar recursos em um determinado espaço. Isto significa que uma ou mais facilidades ficam responsáveis por servir um conjunto de pontos de demanda. Eles apresentam um estudo considerando os principais problemas de localização, tendo como foco a identificação dos problemas e a discussão teórica dos resultados, descrevendo modelos anteriormente propostos e indicando a relação existente entre eles.

Nesse levantamento é feita uma abordagem de mais de 50 problemas diferentes na área de localização. Dentro desse cenário, são definidas como decisões típicas de otimização: a minimização do tempo médio de viagem ou da distância entre pontos de suprimento e de demanda; a minimização do tempo médio de viagem, levando em conta atrasos ocasionados por razões diversas; a minimização de uma função custo de viagem ou de tempo; a minimização do máximo tempo de viagem ou a maximização do mínimo tempo de viagem.

Owen e Daskin (1998) tratam o problema de localização de facilidades como um ponto crítico integrante de um planejamento estratégico em empresas públicas e privadas. O desenvolvimento e a aquisição de um novo posto de serviço requer tempo e inclui custos consideráveis. Antes de se investir na compra ou na construção de um posto de serviço (facilidade), localizações em potencial devem ser identificadas, especificações de capacidade devem ser feitas e uma grande quantidade de capital deve ser empregado. Os altos custos associados a todo esse processo fazem com que os projetos de localização sejam considerados investimentos de longo prazo.

Esses autores dividem o problema de localização em três tipos diferentes: problemas estáticos e determinísticos, problemas dinâmicos e

problemas estocásticos. Os problemas de localização estáticos e determinísticos consideram como dados de entrada somente quantidades constantes e conhecidas e se sub-dividem em três partes: problema das medianas, em que a soma das distâncias entre pontos de demanda e facilidades deve ser minimizada; problemas de cobertura, em que o tempo ou a distância máxima aceitável deve ser determinado; e problemas de centro, em que é requerida cobertura a todos os pontos de demanda e se busca localizar um certo número de facilidades que venham a minimizar a distância de cobertura. Esse problema é conhecido também como problema de minimax, no qual se busca a minimização da máxima distância entre um ponto de demanda e a facilidade mais próxima; Já os problemas dinâmicos são tratados de forma mais real, levando em conta futuras incertezas no processo de tomada de decisão e são divididos em localização única e localização múltipla. Os problemas estocásticos possuem dois tipos de enfoque: o probabilístico, que considera a distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias envolvidas no modelo, e o enfoque no planejamento do cenário, que considera um conjunto possível de futuros valores de variáveis gerados.

Revelle e Eiselt (2005) consideram quatro componentes na caracterização de um problema de localização: clientes, que devem ser alocados em pontos ou em rotas; facilidades, que devem ser localizadas; espaço, no qual clientes e facilidades estão dispostos; e uma métrica que indica distâncias ou tempos entre clientes e facilidades.

Esses autores dividem o problema em duas partes: localização em rede e espaço real e d-dimensional. Neste último caso, são utilizadas as métricas de manhatan, euclidiana e de chebyshev². Para a localização em redes, o problema é sub-divido em contínuos e discretos. Nos problemas contínuos, os pontos podem ser dispostos em qualquer local do plano ou da rede. Nos problemas discretos, além dos pontos a serem posicionados, as facilidades a serem localizadas estão sujeitas a um certo número de pontos elegíveis no plano ou na rede. Tipicamente, os problemas contínuos tendem a ser de natureza não-linear, enquanto os problemas discretos envolvem variáveis do tipo 0-1 e que resultam em uma otimização utilizando programação inteira.

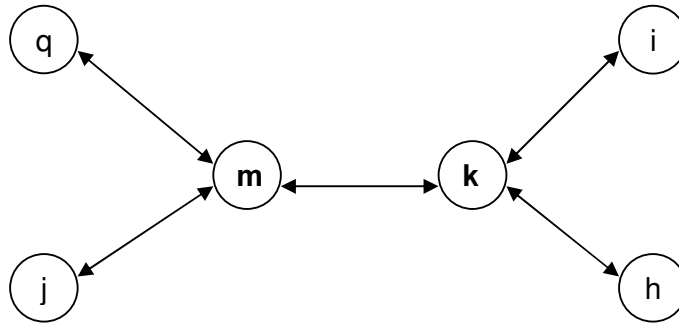
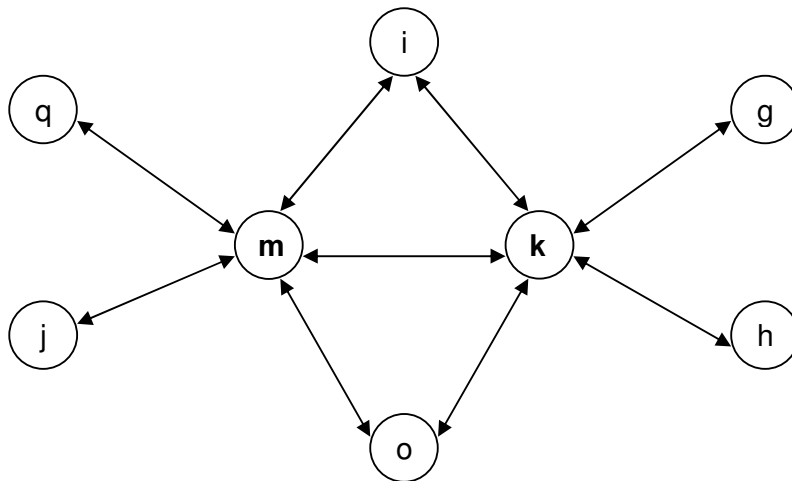
² $d_{ij}^{\infty} = \max\{|a_i - a_j|; |b_i - b_j|\}$ Revelle e Eiselt (2005).

2.2 Conceituação dos *Hubs*

O'Kelly (1986) caracteriza os *hubs* como sendo pontos centrais em uma rede com vários pontos e que possuem função consolidadora nesse cenário. O autor atenta para as diferenças existentes entre as iterações em um certo espaço e a teoria da localização. Os pesquisadores da área de iterações espaciais consideram o comportamento dos sistemas de transporte e vêm usando esses modelos em uma grande variedade de aplicações. Porém, esses modelos tendem a não levar em conta o problema de localização de facilidades. Consideram apenas a demanda de transporte gerada, não levando em conta o suprimento dessas facilidades. Na teoria da localização, os autores tratam de forma bem simplificada o comportamento dos usuários do transporte em questão, e têm como foco a localização das facilidades. Porém, surgiu a necessidade de se considerar, de forma simultânea, a determinação da localização e dos modelos de transporte.

Este autor propõe um estudo em que essas questões são tratadas de forma conjunta. Dois casos são considerados: a utilização de um *hub* na organização de uma rede e a utilização de dois *hubs* em uma rede de transporte de passageiros entre cidades norte-americanas. Os *hubs* devem ser localizados de forma a proporcionar uma grande quantidade de conexões com o mínimo de inconveniência gerada aos usuários.

O'Kelly (1987) constata que o problema de localização de *hubs* pode ser ilustrado por exemplos pequenos, tais como uma rede com um número n de nós e que interagem entre si. Cada nó deve estar conectado a um dos p *hubs* abertos (alocação única). Todos os *hubs* são interconectados. Assim, se o nó i está alocado ao *hub* k e o nó j alocado ao *hub* m , o fluxo movimentado entre o nó i e o nó j deve ser feito via *hubs* k e m , como mostra a Figura 1.

Figura 1: Modelo de Alocação Única**Figura 2: Modelo de Alocação Múltipla**

Aykin (1995) lembra que a economia de escala proporcionada pelo aumento no fluxo movimentado entre os *hubs* faz com que o custo unitário transportado entre um ponto de demanda e um *hub*, ou entre dois pontos de demanda, diminua.

O'Kelly et al. (1996) apresentam um estudo computacional sobre a modelagem da rede de *hubs* com alocação única e múltipla. Eles evidenciam o fato de que, no modelo de alocação múltipla, existe uma maior flexibilidade nas

rotas com uma conseqüente diminuição nos custos de operação, como mostra a Figura 2. Devido às exigências computacionais que esses modelos demandam, os esforços iniciais foram focados no desenvolvimento de heurísticas, mais até do que em soluções exatas, pois as heurísticas proporcionavam uma contribuição maior no valor ótimo da função objetivo. Atualmente, já é possível obter soluções exatas para alguns problemas. Porém, as heurísticas não devem ser descartadas, pela complexidade dos modelos de *p hubs*.

Em relação aos resultados obtidos para esses dois tipos de alocação, única e múltipla, para um dado número de *hubs*, o custo total da rede para o modelo de alocação múltipla é sempre menor do que o custo total para o modelo de alocação única, com exceção para valores muito pequenos do fator de desconto entre os *hubs* e quando as soluções ótimas para ambos os modelos são as mesmas. Nós *spokes*, que estão próximos de serem equidistantes entre *hubs*, são os primeiros a serem alocados de forma múltipla. Com o aumento do valor do fator de desconto entre os *hubs*, o número de alocações múltiplas também aumenta, fazendo com que os *hubs* assumam uma nova posição, tornando-os mais próximos entre si. Se o fator de desconto entre os *hubs* for pequeno, o custo de viagem diminuirá na medida em que o número de ligações na rede aumente, sem que haja a adição de algum outro *hub*.

Ernst e Krishnamoorthy (1996) apresentam um estudo sobre o problema da *p-hub mediana não capacitado* e de alocação única. Outros problemas envolvem restrições de capacidade nos *hubs* e consideram a alocação múltipla. Esses são conhecidos como problemas de *p-hub*. Os autores caracterizam o problema em três partes: recolhimento, transferência e distribuição do produto, tendo uma relação muito peculiar com o sistema postal de entrega.

O'Kelly (1998) qualifica os *hubs* como sendo nós especiais integrantes de uma rede e que estão dispostos de tal forma a facilitar a ligação entre pontos pertencentes a essa rede. O autor define os *hubs* como pontos geográficos localizados de forma estratégica e que suprem regiões específicas, agregando benefícios às mesmas.

O autor divide os modelos utilizando os *hubs* como: sistemas de entrega, em que o gestor define a localização das facilidades e suas regras de alocação; e em sistemas de atração do usuário, em que as decisões são descentralizadas e as características do público que utiliza o serviço deve ser considerada. Dentro desse conceito, o transporte aéreo de cargas se enquadra nos sistemas de

entrega, pois os gestores definem o local dos centros de distribuição e ainda possuem um completo controle sobre o fluxo de cargas existente entre eles. Para o transporte aéreo de passageiros, o comportamento do consumidor e a inconveniência ocasionada por paradas intermediárias em pontos consolidadores não podem ser ignorados.

Para o autor, em vários problemas clássicos envolvendo sistemas logísticos, a melhor forma para se obter soluções envolvendo pontos de origem e destino são as chamadas rotas de caminho mínimo. Em sistemas do tipo *hub-and-spoke*, a determinação de uma rota considerada ótima é uma questão um pouco mais complexa e envolve itens como a possibilidade ou não de conexão entre nós *spokes* e *hubs*. Algumas indagações sugerem que este tipo de modelagem não se encaixe única e exclusivamente no conceito de caminho mínimo.

O autor sugere que a rede deve ser organizada de forma a minimizar o número de conexões *spoke-to-hub*. Sendo assim, um ponto de origem não pode simplesmente selecionar um determinado *hub*. Existem também algumas restrições de capacidade em rotas de caminho mínimo, forçando algumas iterações a serem refeitas. Percebe-se, no entanto, que o elemento principal nesse tipo de configuração é a presença da conexão entre os *hubs*. Esse fato faz com que as redes obtenham ganhos consideráveis em economias de escala, com a conseqüente diminuição do custo de transporte entre pontos onde a densidade de tráfego é grande.

O que diferencia os modelos de localização do tipo *hub-and-spoke* dos modelos tradicionais de localização e alocação é o fato de, na teoria básica de localização, uma unidade de demanda é representada por um ponto, linha ou uma área. No sistema *hub-and-spoke*, essa unidade é representada por um par de localidades.

O'Kelly e Bryan (1998) lembram que a maioria dos modelos de localização de *hubs*, nas áreas de geografia, pesquisa operacional e transportes, não tratam de forma adequada as economias de escala ocasionadas pela concentração nas vazões de cargas e pessoas. Esses modelos tratam os custos de transporte de maneira muito simplificada, assumindo que estes custos independem do fluxo transportado. Esse fato pode gerar resultados não muito próximos do real e pode também, de alguma forma, determinar de maneira

errônea a localização dos *hubs* e a forma como outros nós estão a eles alocados.

O modelo proposto por esses autores gera algumas melhorias nos modelos que vêm sendo utilizados, pela adição de uma função custo baseada no fluxo transportado, tratando de uma maneira mais real as economias de escala geradas nas ligações entre *hubs*.

Sohn e Park (1998) descrevem as diferenças entre o problema de localização de *hubs* em geral e os problemas de localização denominados de *p-hub*. No primeiro caso, o número de *hubs* a serem abertos não é conhecido e os custos fixos para abertura deles são considerados. No segundo caso, o número de *hubs* a serem abertos é conhecido e a quantidade movimentada entre os pares de nós também. Esse fluxo é transportado sempre através de um *hub*. O problema então consiste na localização do número *p* de *hubs* e a forma como os nós restantes estão alocados a esses pontos, de forma que o custo total de transporte da rede seja minimizado.

Ernst e Krishnamoorthy (1998) apresentam soluções exatas e heurísticas para o problema da *p-hub* mediana não-capacitado e de alocação múltipla. Os autores lembram que, ao se projetar uma rede desse tipo, deve-se fixar um número *p* de nós a serem designados como *hubs* e a forma como os nós restantes estarão a eles alocados, de forma que os custos de operação da rede sejam minimizados. Assume-se então que os fluxos são não-negativos e considerados dados do problema, e a eles são associados pares de origem e destino. Os custos de operação da rede dependem da distância entre os nós, da quantidade de pessoas ou cargas movimentadas ao longo dessas distâncias e o tipo de ligação entre os nós (se o fluxo ocorre entre *hubs*, ou tendo como origem ou destino um nó *spoke*.). Nesse modelo, não há restrição de capacidade nos *hubs*, muito menos nas ligações entre eles.

O'Kelly e Bryan (1999) atentam para as diferenças existentes entre redes com pontos completamente interconectados e redes do tipo *hub-and-spoke*. Porém, para o primeiro tipo de configuração, algumas ligações ficam sub-utilizadas. A redução no número total de ligações diminui os custos e possibilita a localização de equipamentos e pessoas em locais centrais e específicos. Uma das características do segundo tipo de configuração é o acúmulo do volume movimentado de cargas e pessoas entre *hubs*, resultando em uma diminuição do custo total, ocasionado pelo uso de aeronaves maiores e a diminuição dos

valores das passagens aéreas nesses trechos. Porém, este fato leva a um aumento no tempo de viagem entre pontos de origem e destino.

Esses autores dividem a rede *hub-and-spoke* em duas partes, diferenciando-as pela forma como os nós *spokes* estão alocados aos *hubs*. A primeira, chamada de alocação única, cada nó *spoke* pode estar conectado somente a um *hub* (figura 1). Na segunda, chamada de alocação múltipla, são permitidos aos nós *spokes* estarem conectados a mais de um *hub*, aumentando o número de possíveis ligações e diminuindo o tempo médio de viagem (figura 2). Em ambos os casos, os *hubs* são completamente interconectados.

Assim sendo, com a concentração dos fluxos entre os *hubs*, uma das principais vantagens que o sistema passa a ter é o ganho em economias de escala com o uso dos *hubs* e, entre eles, aplica-se um fator de desconto, que é determinado de forma exógena ao modelo.

Para esses autores, o modelo de alocação única é bastante parecido com o problema das *p-medianas*, em que a localização das facilidades é determinada, e os nós restantes são simplesmente alocados a uma facilidade mais próxima, minimizando o custo total da rede. Os custos de viagem consistem então em um componente único, que representa o custo entre a origem e a facilidade em que ela está alocada. Porém, os autores atentam que, no modelo de localização de *hubs*, a alocação de um ponto qualquer a uma facilidade mais próxima não garante de fato uma otimização.

Já os modelos de alocação múltipla permitem aos nós *spokes* interagirem com mais de um *hub*. Dada a localização dos *hubs*, a iteração entre os pares de nós busca o caminho que minimize o seu próprio custo total de viagem.

De forma a tratar o problema de uma forma mais realista, alguns modelos fixam a localização dos *hubs* antes mesmo das extensões dos problemas serem introduzidos, permitindo a ligação entre nós *spokes* e em alguns outros casos, não permitindo a ligação entre *hubs*. Porém, deve-se deixar claro que as alocações ótimas dependem da localização dos *hubs*, e essas dependem das decisões de alocação, ou seja, um depende do outro. A permissão de ligação entre nós *spokes* e a utilização de modelos fixando a localização dos *hubs* vêm sendo estendidos aos casos de localização endógena.

Assim, os modelos que vêm sendo desenvolvidos utilizando esse conceito levam em conta os custos fixos para o estabelecimento dos *hubs*, as restrições de capacidade para reduzir o congestionamento dos *hubs*, as

restrições mínimas de fluxo entre ligações, evitando assim uma sub-utilização da rota, e a melhoria na função custo devido à conexão entre *hubs*.

No modelo de localização básica de *hubs*, o número p de *hubs* a serem abertos é determinado de forma exógena ao problema. Porém, quando se leva em consideração os custos fixos envolvidos na abertura de um *hub*, esse número p pode ser determinado de maneira endógena ao problema. O modelo, então, determina a quantidade de *hubs* a serem abertos, sendo esse número diretamente dependente dos custos fixos de abertura dos mesmos, de maneira que um aumento no custo fixo de abertura de uma facilidade gera uma conseqüente diminuição no número de *hubs* na rede.

Um outro fator a ser considerado é a vazão de pessoas e cargas adentradas aos *hubs*. Algumas ligações vêm sendo superutilizadas, gerando problemas de congestionamento. No intuito de se evitar isso, restrições que proíbem a entrada de um certo fluxo que venha a exceder um nível pré-estabelecido vêm sendo introduzidas aos modelos. As restrições de capacidade nos modelos endógenos são não-lineares. A determinação do fator de desconto é feita de forma exógena ao modelo. Em relação às mudanças nos valores desse fator de desconto, percebe-se que, para o modelo de alocação múltipla, o aumento no número de alocações ocorre quando o fator de desconto diminui. O mesmo não pode ser dito para o modelo de alocação única, que só pode responder por mudanças no fator de desconto pela mudança na localização dos *hubs* ou na alocação dos nós *spokes*. Como resultado, a diferença no custo total entre os dois modelos aumenta na medida em que o fator de desconto também aumenta.

Serra et al. (1999) atentam que as pesquisas referentes à localização de *hubs* vêm se tornando bastante importantes nos modelos de localização em geral, e apresentam um estudo válido, tanto para o transporte de passageiros, quanto para o transporte de cargas. Os autores, em sua pesquisa, consideraram as seguintes situações: uma companhia aérea define alguns aeroportos a operarem como *hubs* em uma determinada época. Porém, o fluxo de passageiros e cargas vem se alterando desde que essas escolhas foram feitas. Os gestores da companhia pretendem, então, estudar a possibilidade de realocação de alguns *hubs*, dada a existência de outros pontos competidores. Esse modelo pode então considerar os *hubs* existentes para uma dada companhia aérea e ainda, considera a presença de outros *hubs*, gerando assim um ambiente competitivo. Novas localizações podem então ser encontradas,

melhorando assim os custos de operação da rede. Uma outra situação leva em conta o desejo de pequenas companhias aéreas em angariar passageiros ou cargas oriundos de companhias maiores. Assim, considera-se que um certo percentual dos usuários do sistema não utiliza o serviço de uma melhor maneira, sendo o tempo utilizado por eles para determinada viagem maior do que o aceitável, fazendo com que o serviço ótimo oferecido a eles seja diferente do oferecido à maioria dos usuários.

Sasaki et al. (1999) lembram que o sistema *hub-and-spoke* gera benefícios não só para as companhias aéreas, mas também para os seus usuários. Os autores atentam que o modelo utilizando duas paradas é o mais comum e o mais usado em redes desse tipo. Porém, o modelo que os autores consideram em sua pesquisa é o de uma parada somente, bastante apropriado para situações específicas. Por exemplo, países com extensões não muito grandes, e de certa forma, distantes geograficamente de outros centros, configuram suas redes utilizando somente um único *hub*, pois as distâncias entre pares de origem-destino não são tão grandes, e não justificam a utilização de dois *hubs*.

Kara e Tansel (2000) alertam que os problemas de localização de *hubs* aparecem quando é necessária a consolidação e a disseminação de fluxos em locais específicos e centralizados e que recebem o nome de *hubs*. O foco de sua pesquisa leva em conta o critério de minimax, que é de fato pouco estudado na literatura existente. Esse critério é tradicionalmente aplicado a estudos de localização que minimizem os efeitos adversos ocorridos nas piores hipóteses, tais como, o oferecimento de um serviço de emergência. Na localização de *hubs*, o critério de minimax é importante quando se leva em conta a minimização do máximo descontentamento dos usuários do sistema e, em um pior cenário, do tempo de entrega de mercadorias em um sistema de transporte de cargas, sendo esse último caso bastante relevante na entrega de produtos perecíveis ou restritos a um tempo específico.

Huston e Butler (2001) sugerem que a decisão de localização de *hubs* é um fator importantíssimo no contexto de operação de uma indústria qualquer, dado a atividade econômica associada à operação de um *hub*. Os autores também lembram que a criação de pontos de consolidação alternativos pode ser um ótimo recurso competitivo para rotas de baixa densidade de tráfego e que a existência de um mercado competitivo pode ocasionar a redução de taxas de serviço.

Os mesmos autores atentam que a decisão de se localizar um *hub* em uma determinada cidade é baseada em suas características demográficas, climáticas e geográficas. Para ser um lugar rentável, o ponto deve oferecer uma vasta rede de conexões e um grande número de rotas. A posição geográfica de uma cidade em relação a outras cidades é um ponto determinante na decisão de localização. O tamanho do mercado também deve ser considerado como fator de lucratividade na operação ou na decisão de alocação de pontos a um *hub*.

Segundo os autores, as características da economia local proporcionam um impacto relevante no volume movimentado por um *hub*. Cidades que demandam, por exemplo, um maior número de turistas, terão uma demanda maior em seu tráfego aéreo. Ao mesmo tempo, centros empresariais também geram uma demanda grande por vôos.

Martín e Román (2003) estudaram a viabilidade de utilização de uma rede do tipo *hub-and-spoke* no mercado aéreo entre a Europa e a América do Sul. Eles lembram que a adoção dessa configuração tornou-se possível após a desregulamentação do transporte aéreo norte-americano, em 1978. Alguns autores associam o termo *hub* a um aeroporto. Porém, esse termo possui um conceito mais amplo e está relacionado não só a aeroportos, mas também a linhas aéreas e a outros mercados específicos. Os *hubs* são considerados aeroportos localizados de forma estratégica e que possuem uma grande movimentação de cargas e passageiros. Esse tipo de configuração possui vários agentes econômicos envolvidos, tais como as linhas aéreas, passageiros e aeroportos. Nesse tipo de rede, a densidade de tráfego aumenta e as companhias podem utilizar aeronaves maiores, reduzindo assim o custo de transporte unitário.

Em relação aos passageiros, alguns efeitos se relacionam ao aumento do tempo de viagem. Esses incluem o tempo de conexão no *hub*, operações extras de decolagens e aterrissagens, e distâncias extras percorridas e causadas por paradas intermediárias em ligações *spoke-to-spoke*. De certa forma, isso é compensado pela redução nos atrasos dos vôos e pelo aumento na frequência dos mesmos, oferecendo ao passageiro um número de opções maior para a escolha de um vôo. Além do tempo, outros impecilhos afetam a demanda de passageiros, tais como as paradas extras, ocasionadas pela entrada ou pela saída dessas pessoas na aeronave, a perda de uma conexão, entre outras. Esses fatores não são facilmente medidos, mas não é difícil perceber que os

usuários levam isto em consideração ao escolher o serviço de uma companhia aérea.

Esse tipo de configuração também aumenta o nível de acessibilidade de várias cidades e regiões. Rotas que não possuem demanda suficiente para serem incluídas em uma rede completamente interconectada podem ser facilmente acrescentadas a uma rede do tipo *hub-and-spoke* sem que haja aumento nos custos entre as linhas aéreas. Esse fato representa um efeito positivo na demanda de passageiros, pois a acessibilidade do mercado aumenta.

Autoridades governamentais também vêm demonstrando um crescente interesse no desenvolvimento de *hubs*, pois os mesmos representam um impacto positivo na estrutura e no desenvolvimento da economia nessas regiões. Os *hubs* exercem papel importante na atração de turismo, conferências, parques temáticos e outras atividades industriais e comerciais importantes, gerando, inclusive, mais oportunidades de emprego.

Nesse estudo, foi considerado o mercado aéreo existente entre a Europa e América do Sul. Esse mercado é fortemente regulado e os direitos para operação das rotas são baseados em acordos bilaterais assinados pelos países envolvidos. Como exemplo de liberalização e desregulamentação, os autores citam o caso do mercado aéreo entre a Europa e os Estados Unidos. Após a liberação, no final dos anos 80, os preços das tarifas tiveram uma redução entre 35% e 45% e o embarque nos aeroportos norte-americanos teve um aumento de 55%.

Segundo esses autores, os mercados europeus e latino-americanos possuem uma previsão de crescimento maior do que a média mundial. Vários fatores devem ser considerados por uma companhia, ao se determinar o número de *hubs* e suas localizações. Entre os principais, pode-se citar: a demanda em potencial por vôos, localização geográfica central em relação a outros mercados com o objetivo de se minimizar os custos de transporte, boa infra-estrutura aeroportuária, boas condições climáticas que permitam uma operação satisfatória da rede e localização estratégica em relação a outros centros competidores.

2.3 Modelagem de Hubs

2.3.1 Modelos de Programação Quadrática

O'Kelly (1986) propõe um sistema operando com um único *hub* e considera como dados os fluxos movimentados entre os pares de cidades e que são designados por W_{ij} . A localização do *hub* é dada por $Q = (X, Y)$. As localizações das n origens e destinos são dadas por $p_i = (x_i, y_i)$, para todo $i = 1, \dots, n$, assume-se que toda origem é também um destino e a matriz de distância entre os nós é quadrada. A distância entre x e y é representada por $C(x, y)$ e a função objetivo busca minimizar os custos envolvidos nesta rede de transportes, como mostra a função a seguir:

$$\text{Min}(Q) = \sum_i \sum_j [W_{ij}C(p_i, Q) + C(Q, p_j)] \quad (8)$$

O autor lembra que, para o modelo utilizando mais de um *hub*, uma constante α passa a ser levada em consideração nas ligações entre *hubs* e que vem a traduzir as economias de escala geradas nesse tipo de configuração. Esse valor estará compreendido sempre entre 0 e 1 ($0 \leq \alpha \leq 1$) e na medida em que ele se aproxime de zero, o valor da função objetivo diminui.

O'Kelly (1987) propõe um modelo de alocação quadrática que minimiza os custos de localização e transporte nesta rede:

$$(QP)\text{Min}(X)Z = \sum_i \sum_j W_{ij} \left(\sum_k x_{ik} C_{ik} + \sum_m x_{jm} C_{jm} + \alpha \sum_k \sum_m x_{ik} x_{jm} C_{km} \right) \quad (9)$$

s.a.:

$$(n - p + 1)x_{jj} - \sum_i x_{ij} \geq 0 \quad \text{para todo } j, \quad (10)$$

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \text{para todo } i, \quad (11)$$

$$\sum_j x_{jj} = p, \quad (12)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (13)$$

Sendo que:

$$x_{ik} \begin{cases} 1, \text{ se o nó } i \text{ estiver alocado ao } hub \text{ em } k, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

$$x_{ii} \begin{cases} 1, \text{ se o nó } i \text{ for um } hub, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

W_{ij} representa o número de unidades movimentadas entre i e j , e é determinado de forma exógena ao problema. C_{ij} é o custo unitário de transporte entre os nós i e j . O número p de *hubs* a serem abertos também é determinado de forma exógena ao modelo. O fator α , representa as economias de escala decorrentes da movimentação entre os nós *hubs*. A idéia é que o fluxo movimentado entre esses nós ofereça uma espécie de “taxa de desconto de transporte”, proporcionado pela concentração de volume nessas ligações. Esse modelo de otimização possui uma estrutura diferente dos tradicionais problemas das *p*-medianas e dos problemas de *multi-facilidades* de Weber. Nesses modelos não existe qualquer tipo de fluxo movimentado entre as facilidades ou uma quantidade qualquer fixa movimentada entre eles. No presente modelo, o fluxo entre os *hubs* depende de suas localizações. Assim, os custos relativos ao transporte entre as facilidades é uma função endógena ao problema e isso é uma característica dos problemas de difícil resolução, pertencentes aos modelos de localização.

2.3.2 Modelos de Programação Linear

O’Kelly e Bryan (2002) modelam a rede de *hubs*, utilizando variáveis de alocação que denotam o fluxo entre as origens e destinos através dos *hubs*. Os pontos de origem e destino são designados pelas letras i e j respectivamente, enquanto os *hubs* são designados pelas letras k e m . A função objetivo é a mesma para os modelos de alocação única e múltipla. A diferença ocorre na restrição que proíbe um nó *spoke* estar alocado a mais de um *hub*, para o caso da alocação única. Segue a modelagem proposta para o problema de alocação única:

$$\text{Min}Z(S, \alpha) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m W_{ij} (C_{ik} + \alpha C_{km} + C_{mj}) X_{ijkm} \quad (14)$$

s.a.:

$$\sum_k Z_{kk} = p \quad (15)$$

$$\sum_k Z_{ik} = 1 \quad (16)$$

$$Z_{ik} \leq Z_{kk} \quad (17)$$

$$\sum_m X_{ijkm} - Z_{ik} = 0 \quad \forall \quad i, j, k \quad (18)$$

$$\sum_k X_{ijkm} - Z_{jm} = 0 \quad \forall \quad i, j, m \quad (19)$$

Onde:

$Z_{ik} = 1$, se o nó i estiver alocado ao *hub* k ; 0, caso contrário;

$X_{ijkm} = 1$, se o fluxo de i para j é feito via *hubs* k e m ;

n = Número de nós da rede;

p = Número de *hubs* na rede;

α = Fator de desconto entre *hubs* ($0 \leq \alpha \leq 1$);

W_{ij} = Fluxo movimentado entre i e j ;

C_{ik} = Custo unitário de movimentação entre i e j ;

A seguir, a modelagem para o problema de alocação múltipla:

$$\text{Min}Z(S, \alpha) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m W_{ij} (C_{ik} + \alpha C_{km} + C_{mj}) X_{ijkm} \quad (20)$$

s.a.:

$$\sum_k Z_{kk} = p \quad (15)$$

$$\sum_k Z_{ik} = 1 \quad (16)$$

$$Z_{ik} \leq Z_{kk} \quad (17)$$

$$\sum_m X_{ijkm} - Z_{ik} = 0 \quad \forall \quad i, j, k \quad (18)$$

$$\sum_k X_{ijkm} - Z_{jm} = 0 \quad \forall \quad i, j, m \quad (19)$$

$$\sum_k \sum_m X_{ijkm} = 1 \quad \forall \quad i \text{ e } j \quad (21)$$

$$\sum_m X_{ijkm} - Z_k \leq 0 \quad \forall \quad i, j, k \quad (22)$$

$$\sum_k X_{ijkm} - Z_m \leq 0 \quad \forall \quad i, j, m \quad (23)$$

A restrição (21) exige que o fluxo entre i e j seja feito através de algum caminho utilizando os *hubs* k ou m . As restrições (22) e (23) proíbem que o fluxo seja movimentado através de um nó que não seja um *hub*.

Martín e Román (2003) estudam o transporte aéreo de passageiros entre a Europa e a América do Sul. Usando dados reais de todos os pares de origem e destino, eles propõem dois tipos de modelos: o primeiro considera um único *hub* atuando de forma ativa em somente um continente; o segundo considera dois *hubs*, um em cada continente. É proposta uma função que minimize os custos de transporte, tendo como origem um ponto em um continente e, como destino, um outro ponto em outro continente. Para o primeiro caso, segue abaixo a função objetivo proposta:

$$\text{Min}_{H_x \in E \cup S} \sum_{\substack{E_i \in E \\ S_j \in S}} (d_{E_i H_x} + d_{H_x S_j}) T_{E_i S_j} / T^* \quad (24)$$

Onde $d_{E_i H_x}$ é a distância do aeroporto europeu ao *hub*, $d_{H_x S_j}$ é a distância do *hub* ao aeroporto sul-americano, $T_{E_i S_j}$ é o número de passageiros transportados entre a Europa e a América do Sul e T^* é o número total de passageiros movimentados no mercado. Porém, é necessário levar em conta os tempos de conexão ocasionados por paradas intermediárias. Considera-se então que uma parada extra equivale a 1,5 hora. Uma hora para a conexão e 30 minutos para as operações extras de decolagem e aterrissagem. Assim, esse tempo é transformado em distância, de acordo com a velocidade média desenvolvida pela aeronave, que é padronizada em 684 km/h. Assim, o modelo fica:

$$\text{Min}_{H_x \in E \cup S} \sum_{\substack{E_i \in E \\ S_j \in S}} (d_{E_i H_x} + d_{H_x S_j} + D\delta_{E_i S_j H_x}) \Gamma_{E_i S_j} / T^* \quad (25)$$

Onde D é a distância equivalente ao tempo de penalidade ocasionado por uma parada extra. E $\delta_{E_i S_j H_x}$ é uma variável binária nas seguintes condições:

$$\delta_{E_i S_j H_x} = 0, \text{ se } H_x = E_i \text{ ou } H_x = S_j;$$

$$\delta_{E_i S_j H_x} = 1, \text{ se } H_x \neq E_i \text{ ou } H_x \neq S_j.$$

Operando dois *hubs*, um em cada continente, maiores distâncias são percorridas com um aumento na frequência de serviço nos pares de nós da rede. O desenvolvimento de alianças estratégicas entre as companhias, se torna um ponto crucial na modelagem dessas redes. A nova função objetivo, para o sistema com dois *hubs* fica dessa maneira:

$$\text{Min}_{(E_x, S_y) \in E \times S} \sum_{\substack{E_i \in E \\ S_j \in S}} (d_{E_i E_x} + d_{E_x S_y} + d_{S_y S_j}) \Gamma_{E_i S_j} / T^* \quad (26)$$

Onde $d_{E_i E_x}$ é a distância do aeroporto europeu ao *hub* localizado neste continente, $d_{S_y S_j}$ é a distância do aeroporto sul-americano ao *hub* localizado neste continente e $d_{E_x S_y}$ é a distância entre os *hubs*. Com o acréscimo da penalidade, a função objetivo fica dessa maneira:

$$\text{Min}_{(E_x, S_y) \in E \times S} \sum_{\substack{E_i \in E \\ S_j \in S}} (d_{E_i E_x} + d_{E_x S_y} + d_{S_y S_j} + D\delta_{E_i E_x} + D\delta_{S_y S_j}) \Gamma_{E_i S_j} / T^* \quad (27)$$

Onde:

$$\delta_{E_i E_x} = 0, \text{ se } E_x = E_i;$$

$$\delta_{E_i E_x} = 1, \text{ se } E_x \neq E_i.$$

e:

$$\delta_{S_y S_j} = 0, \text{ se } S_y = S_j;$$

$$\delta_{S_y S_j} = 1, \text{ se } S_y \neq S_j.$$

Além da localização, outras questões importantes influenciam nesse processo de modelagem, tais como: ganhos de frequência, tempo de penalidade e incrementos de capacidade na infra-estrutura de aeroportos *hubs*.

2.3.3 Modelos de Programação Inteira

Campbell (1994) apresenta quatro formulações de programação inteira para problemas de localização discreta de *hubs*: o problema da *p-hub mediana*, o problema de localização de *hubs* não capacitado, problemas de *centro p-hub* e problemas de cobertura envolvendo *hubs*. Nesse estudo, cinco itens são considerados:

- (1) n localizações de demanda (origem/destino);
- (2) r localizações em potencial de *hubs*;
- (3) O fluxo para os n^2 pares de localização de demanda (o-d);
- (4) O custo unitário de transporte entre esses pares;
- (5) O fator de desconto α entre os *hubs*.

O autor cita que os problemas de localização de *hubs* podem ser vistos de forma a estarem encravados em uma rede não-direcionada $N = (V, A)$, onde o conjunto de nós ou vértices da rede $V = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ correspondem às origens e destinos e aos potenciais *hubs*. Assim, os *hubs* se restringem a serem locados em um sub-conjunto de vértices. Associado a essa ligação $(a, b) \in A$, a qual conecta os vértices v_a e v_b , está associado um peso não-negativo $d(a, b) \equiv d(b, a)$ representando o seu comprimento. Esse fator pode corresponder à distância percorrida, tempo, custo ou algum outro atributo. C_{ab} é definido como sendo o comprimento do menor caminho entre os nós a e b . O custo de movimentação no caminho entre a origem i e o destino j através dos *hubs* localizados nos nós k e m é dado por $C_{ik} + \alpha C_{km} + C_{mj}$, onde α é o fator de desconto entre *hubs*. Se $k = m$, não existe movimentação entre *hubs*. Associado a cada par origem-destino (i, j) está um peso não-negativo representando um fluxo entre i e j .

2.3.3.1 Problema da *P-Hub Mediana*

O problema da *p-hub mediana* possui diversas aplicações em redes de transporte e de telecomunicações na qual o objetivo é minimizar o custo total de movimentação. Algumas variáveis são definidas nesse tipo de modelagem:

X_{ijkm} = Fração de fluxo movimentado da localidade i (origem) até a localidade j (destino) através dos *hubs* localizados nos nós k e m ;

$Y_k = 1$, se a localidade k for um *hub*; 0, caso contrário;

$Z_{ik} = 1$, se a localidade i estiver alocada ao *hub* k ; 0, caso contrário;

W_{ij} = Fluxo originado na localidade i e destinado à localidade j ;

C_{ij} = Custo unitário padronizado de i a j .

As variáveis de decisão X_{ijkm} e Z_{ik} determinam a alocação. A variável de decisão Y_k indica a localização dos *hubs*.

$$\text{Min} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m W_{ij} X_{ijkm} C_{ijkm} \quad (28)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_k Y_k = p \quad (29)$$

$$0 \leq Y_k \leq 1 \text{ e inteiro para todo } k \quad (30)$$

$$0 \leq X_{ijkm} \leq 1 \text{ para todo } i, j, k, m \quad (31)$$

$$\sum_k \sum_m X_{ijkm} = 1 \text{ para todo } i, j \quad (32)$$

$$X_{ijkm} \leq Y_k \text{ para todo } i, j, k, m \quad (33)$$

$$X_{ijkm} \leq Y_m \text{ para todo } i, j, k, m \quad (34)$$

A função objetivo busca minimizar os custos de transporte entre todos os pares origem-destino. A restrição (29) estabelece exatamente um número p de *hubs*. A restrição (30) obriga Y_k a assumir os valores 0 ou 1. A restrição (31) limita o alcance de X_{ijkm} . A restrição (32) assegura que o fluxo movimentado para qualquer par origem-destino é feito através de algum par de *hubs*. As

restrições (33) e (34) asseguram que os fluxos sejam movimentados através de localidades que são *hubs*.

Segundo o autor, o problema da *p-hub mediana* é similar ao problema da *p-mediana* se os pares de origem-destino no problema de localização de *hubs* forem vistos de forma análoga aos pontos de demanda no problema das *p-medianas*. No problema da *p-mediana*, cada ponto de demanda deve ser alocado a uma facilidade de tal forma que o custo de transporte seja minimizado. No problema da *p-hub mediana*, cada par origem-destino deve ser alocado, ou roteado, a um par de *hubs* que minimize o custo total de transporte.

No problema da *p-mediana* e no problema de *localização-alocação*, cada ponto de demanda é alocado a uma única facilidade, a qual é também a mais próxima. Contudo, no caso da alocação única os custos de transporte não são minimizados no problema da *p-hub mediana*. Esse problema difere de maneira bastante nítida dos problemas da *p-mediana* e de *localização-alocação*, pois existem fluxos específicos entre origens e destinos e a taxa de transporte entre *hubs* é geralmente descontada. Minimizando as distâncias percorridas não necessariamente se minimiza o custo de transporte, em razão das diferentes taxas do mesmo.

2.3.3.2 Problema de Localização de *Hubs* Não Capacitado

O problema de localização de *hubs não-capacitado* difere do problema da *p-hub mediana* pelo fato do número de *hubs* não ser especificado e de um custo fixo não-negativo estar associado a cada localização em potencial de um *hub*. Esse problema é análogo ao problema de localização de *facilidades não capacitado*.

$$\text{Min} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m W_{ij} X_{ijkm} C_{ijkm} + \sum_k F_k Y_k \quad (35)$$

$$\text{s.a.:} \quad 0 \leq Y_k \leq 1 \text{ e inteiro para todo } k \quad (30)$$

$$0 \leq X_{ijkm} \leq 1 \text{ para todo } i, j, k, m \quad (31)$$

$$\sum_k \sum_m X_{ijkm} = 1 \text{ para todo } i, j \quad (32)$$

$$X_{ijkm} \leq Y_k \text{ para todo } i, j, k, m \quad (33)$$

$$X_{ijkm} \leq Y_m \text{ para todo } i, j, k, m \quad (34)$$

Onde F_k representa o custo fixo no estabelecimento de uma facilidade na localidade k . As restrições são idênticas às do problema da p -hub mediana, com exceção ao número de *hubs* que não é dado.

2.3.3.3 Problema de Centro P -Hub

Problemas de centro *Minimax* são fundamentalmente diferentes dos problemas da *mediana minisoma* e de *localização de facilidades não-capacitado*. Problemas de centro são importantes tanto por suas aplicações, tal como localização de facilidades e de veículos em serviços de emergência e por sua inserção em problemas que levam em conta os piores cenários. O problema de centro p -hub é análogo ao problema p -centro. Se um par origem-destino em um problema de localização de *hubs* é visto de forma análoga a um ponto de demanda em um problema p -centro, assim a definição natural de um centro *hub* é aquele em que um conjunto de *hubs* está disposto de maneira que o custo máximo em qualquer par origem-destino é minimizado. Esse tipo de problema é importante para um sistema de *hubs* envolvendo fatores como perecibilidade e itens que são sensíveis ao tempo, na qual o custo se refere ao tempo, α é um fator de desconto de tempo associado às velocidades máximas nas ligações entre *hubs* e o tempo máximo de uma origem a um destino desejado.

Outras interpretações surgem quando cada ligação em um caminho origem-destino é tratada separadamente. Um caminho origem-destino possui, em sua grande maioria, três ligações: origem ao *hub*, *hub* ao *hub* e *hub* ao destino final. Um outro tipo de problema considerado é aquele em que um determinado número de *hubs* minimiza o custo máximo de movimentação para qualquer ligação. Esse tipo de problema é bastante utilizado em sistemas de transporte nos quais o custo se refere ao tempo e o tempo máximo para qualquer ligação é importante. Um exemplo é o transporte de itens que necessitam de algum processo de preservação ou de rejuvenescimento.

$$\text{Min } \text{Max}_{i,j,k,m} \{X_{ijkm} C_{ijkm}\} \quad (36)$$

$$\text{s.a.: } \sum_k Y_k = p \quad (29)$$

$$0 \leq Y_k \leq 1 \text{ e inteiro para todo } k \quad (30)$$

$$\sum_k \sum_m X_{ijkm} = 1 \text{ para todo } i, j \quad (32)$$

$$X_{ijkm} \leq Y_k \text{ para todo } i, j, k, m \quad (33)$$

$$X_{ijkm} \leq Y_m \text{ para todo } i, j, k, m \quad (34)$$

$$0 \leq X_{ijkm} \leq 1 \text{ e inteiro para todo } i, j, k, m \quad (37)$$

As restrições são em sua maioria idênticas às do problema da *p-hub mediana*. A única diferença é que a restrição (37) substitui a restrição (31), desde que X_{ijkm} seja inteiro.

2.3.3.4 Problemas de Cobertura Envolvendo *Hubs*

Problemas de cobertura possuem uma relação inversa com problemas de centro. Pontos de demanda são cobertos se as facilidades estiverem próximas o suficiente para servir a demanda dentro dos parâmetros especificados. Problemas de cobertura envolvendo *hubs* são análogos aos problemas de cobertura de facilidades, mas a idéia de cobertura de *hubs* pode ter várias interpretações.

No problema de cobertura envolvendo *hubs* é válido raciocinar em termos dos pares origem-destino ao invés dos pontos individuais de demanda. Contudo, esse tipo de problema difere do problema tradicional de cobertura em razão da interação entre os *hubs*.

$$\text{Min } \sum_k F_k Y_k \quad (38)$$

$$\text{s.a.: } 0 \leq Y_k \leq 1 \text{ e inteiro para todo } k \quad (30)$$

$$X_{ijkm} \leq Y_k \text{ para todo } i, j, k, m \quad (33)$$

$$X_{ijkm} \leq Y_m \text{ para todo } i, j, k, m \quad (34)$$

$$\sum_k \sum_m V_{ijkm} X_{ijkm} \geq 1 \text{ para todo } i, j \quad (39)$$

Onde F_k é o custo fixo no estabelecimento de um *hub* na localidade k . Se todos os valores de F_k forem idênticos, o objetivo passa a ser equivalente à minimização do número de *hubs*. Para valores não-negativos de F_k , todo X_{ijkm} assume os valores 0 ou 1.

2.3.3.5 Problema de Sasaki

Sasaki et al. (1999) formulam um modelo de programação inteira de uma única parada com alocação múltipla e que também se enquadra no problema da *p-hub mediana*. No entanto, adota-se uma estratégia diferente de resolução. São consideradas as seguintes variáveis:

$A = \{A_1, \dots, A_n\}$: Conjunto de todos os aeroportos;

W_{ij} = Número de passageiros movimentados de A_i a A_j ;

d_{ij} = Distância (Euclidiana ou qualquer outra métrica) entre A_i a A_j ;

y_j = Variável binária que assume o valor unitário quando A_j for *hub* e zero, caso contrário.

Considera-se que o conjunto A é também um conjunto de locais candidatos a *hubs*. Para efeitos de simplificação, assume-se que W_{ij} e d_{ij} são simétricos, $W_{ij} = W_{ji}$ e $d_{ij} = d_{ji}$, para todo i e j . Assim, o custo total de viagem de A_i a A_j via *hub* A_l é dado pela seguinte equação:

$$E_{ijl} = (d_{il} + d_{lj})W_{ij}, \text{ para todo } i, j, l \quad (40)$$

A seguir é apresentada a tabela de *origem-destino-hub* (OD-*hub*). Cada linha na tabela corresponde a um par origem-destino. Por simetria, o número de linhas é igual a $M = n(n-1)/2$. Cada coluna representa um candidato a *hub*. Assim, o número de colunas é igual a n . Os elementos da tabela são representados pelos valores de E_{ijl} , definido na equação anterior. A soma dos elementos na coluna l é dado por:

$$s_l = \sum_{i,j} E_{ijl}, \quad l = 1, \dots, n \quad (41)$$

As colunas são então organizadas em função do valor de s_j , de forma crescente. As colunas na tabela representam os candidatos a *hubs* (l_1, l_2, \dots, l_n) respectivamente. Selecionar p *hubs* significa selecionar p colunas na tabela. A distância entre cada par origem-destino é o elemento mínimo na linha correspondente às p colunas selecionadas.

O modelo descrito pode também ser formulado como o problema da p -*mediana*. Para isso, o par de índices (i, j) é substituído por um outro índice π , que representa um par origem-destino. A cardinalidade do conjunto de índices π é igual a M , o número de linhas na tabela OD. De acordo com a formulação anterior, introduz-se então uma variável binária:

$$x_{\pi j} = 1, \text{ se o par OD for roteado via } \textit{hub } j,$$

$$x_{\pi j} = 0, \text{ caso contrário.}$$

Assim, formula-se o modelo de maneira semelhante ao problema da p -*mediana*:

$$\text{Min } \sum_{\pi \in \Pi} \sum_{j \in A} C_{\pi j} x_{\pi j} \quad (42)$$

$$\text{s.a.: } \sum_{j \in A} x_{\pi j} = 1, \quad \forall \pi \in \Pi \quad (43)$$

$$-x_{\pi j} + y_j \geq 0, \quad \forall \pi \in \Pi, \quad \forall j \in A \quad (44)$$

$$\sum_{j \in A} y_j = p \quad (45)$$

$$x_{\pi j} \in \{0,1\}, \quad \forall \pi \in \Pi, \quad \forall j \in A \quad (46)$$

$$y_j \in \{0,1\}, \quad \forall j \in A \quad (47)$$

Onde Π representa o conjunto de todos os pares de origem-destino. $C_{\pi j}$ é o produto do custo de viagem entre o par origem-destino π via *hub* j e a demanda entre o par origem-destino π . A restrição (43) assegura que cada par origem-destino utiliza somente um único *hub*. A restrição (44) proíbe a conexão entre nós não *hubs*. A restrição (45) garante que serão selecionados exatamente p *hubs* e as restrições (46) e (47) restringem os valores de $x_{\pi j}$ e y_j a ser igual a zero ou um.