

6 Escoamentos Incompressíveis

Fluidos em movimento estão presentes em toda a natureza: o sangue no corpo humano, as correntes marítimas, os ventos, os fluxos de água, o fluxo ao redor de aerofólios, a propagação de fumaça em incêndios, etc. As características do movimento ou escoamento dos fluidos têm sido objeto de estudos há muitos séculos, pois são os fluidos que mais diretamente nos afetam. A *dinâmica dos fluidos* é a área que estuda o efeito de forças no movimento de fluidos.

As equações que determinam o movimento dos fluidos, ou escoamento dos fluidos, são chamadas de *equações de Navier-Stokes* (80, 98). O movimento das substâncias fluidas foram descritas como resultado das mudanças na pressão e forças viscosas dissipativas (similar a fricção), que atuam dentro de um fluido.¹

A intenção deste capítulo é destacar os pontos importantes da derivação das equações de Navier-Stokes, assim como a aplicação dessas equações a um caso particular, os fluidos newtonianos em escoamentos incompressíveis. Textos mais completos podem ser encontrados no trabalho de Chorin e Marsden (17).

6.1 Equações de Navier-Stokes

Antes de entrar nos detalhes da equação de Navier-Stokes, é necessário fazer algumas suposições acerca dos fluidos. A primeira é que um fluido, modelado por essas equações, é um meio contínuo. Isso significa que ele não contém vazios, como, por exemplo, bolhas dissolvidas no gás, ou que ele não consiste de partículas como da neblina. Outra hipótese necessária é que todas as variáveis de interesse, tais como pressão, velocidade e densidade são diferenciáveis.

As equações de Navier-Stokes são derivadas dos princípios básicos de conservação de massa, momento, e energia. No que diz respeito à derivação das equações, às vezes é necessário considerar um volume arbitrário finito, chamado

¹O primeiro a formular uma descrição matemática para o escoamento de fluidos foi Leonard Euler (27). As *equações de Euler*, porém, não levam em conta as forças viscosas no fluido, tornando-as assim um caso particular das equações de Navier-Stokes.

de volume de controle, sobre o qual esses princípios podem ser aplicados. Esse volume finito é denotado por \mathcal{V} , e sua superfície é denotada por $S = \partial\mathcal{V}$.

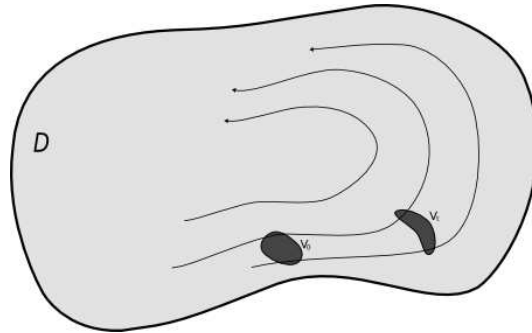


Figura 6.1: Volume de controle.

Um volume de controle pode permanecer fixo no espaço ou variar a sua posição em função do escoamento do fluido. Essas duas diferentes abordagens resultam em duas diferentes descrições para as equações de Navier-Stokes: a descrição Euleriana e a descrição Lagrangeana. Enquanto a *descrição Euleriana* é uma descrição espacial, onde o volume de controle é fixado no espaço, a *descrição Lagrangeana* é uma descrição material, onde o volume de controle se move junto com o fluido.

Na abordagem Lagrangeana a posição do volume de controle é determinada em função do escoamento do fluido, porém, as mesmas partículas de fluido permanecem sempre dentro do volume de controle. Dado $\mathbf{x} \in \Omega$, onde Ω é a região de escoamento do fluido, descrevemos por $\varphi(\mathbf{x}, t)$ a trajetória seguida por uma partícula de fluido que, no instante de tempo $t = 0$, estava na posição \mathbf{x} . Se \mathcal{V} é uma subregião de Ω , então $\varphi(\mathcal{V}, t)$ descreve o movimento do volume \mathcal{V} com o fluido. Portanto, se f_x denota a partícula de fluido na posição \mathbf{x} no instante de tempo $t = 0$, então

$$f_x \in \mathcal{V} \longleftrightarrow f_x \in \varphi(\mathcal{V}, t), \quad \forall t.$$

Portanto, mesmo havendo expansão, compressão e deformação do volume de controle devido ao escoamento, a massa de fluido contido no volume de controle Lagrangiano permanece constante (Figura 6.1).

6.1.1 Derivada Material

A taxa de variação de uma propriedade do fluido em um escoamento pode ser medida de duas maneiras diferentes. A primeira delas, obtém a taxa de variação em um ponto fixo do espaço, isto é, a variação da propriedade é obtida em função das propriedades das partículas do fluido que passam por esse

ponto fixo no espaço. A outra maneira, obtém a taxa de variação seguindo uma partícula do fluido ao longo do escoamento. A derivada de uma variável com relação a um ponto fixo no espaço é chamada de *derivada espacial*, enquanto a derivada seguindo uma partícula é chamada de *derivada material*.

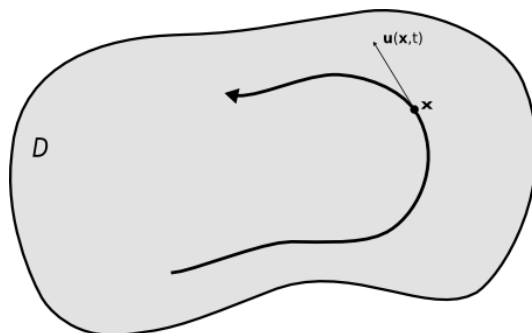


Figura 6.2: Trajetória de uma partícula de fluido.

O seguinte exemplo esclarece a diferença entre as derivadas espacial e material. A medida de mudanças em velocidade do vento na atmosfera pode ser obtida com a ajuda de um anemômetro. Podemos colocá-lo em uma estação de tempo ou em um balão. No primeiro caso, o anemômetro mede a velocidade de todas as partículas que atravessam um ponto fixo do espaço (a estação), ao passo que no segundo caso, o instrumento mede mudanças na velocidade do vento quando este se move com o fluido, como se o balão que contém o anemômetro fosse uma partícula do fluido.

Em mecânica dos fluidos, a derivada material (também chamada de derivada convectiva ou derivada substancial) é um conceito muito importante. Em escoamentos transientes, as propriedades macroscópicas do fluido dependem das coordenadas espaciais e temporal do fluido, como por exemplo a densidade $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$; $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. A derivada material leva em conta que as posições de uma partícula do fluido estão variando com o tempo devido ao escoamento do mesmo. Portanto, a variação temporal dada pela derivada material é diferente da variação temporal dada pelas variações da propriedade inerentes a uma posição fixa do espaço, levando em conta também que a propriedade do fluido pode ser diferente em cada ponto do escoamento.

Para determinar a variação de uma propriedade f do fluido, em função das coordenadas espaciais e temporal, seja $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ o caminho seguido por uma partícula de fluido em um escoamento bidimensional, como ilustrado na Figura 6.2. A propriedade do fluido nessa partícula durante o escoamento é dada por $f(\mathbf{x}(t), t)$ e, portanto, a variação temporal $\frac{df}{dt}(t)$ é

dada pela regra da cadeia

$$\frac{df}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t) \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t) \dot{y}(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(t).$$

Sendo a velocidade da partícula dada por

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t},$$

podemos reescrever a variação temporal como

$$\frac{df}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t) + \mathbf{v}(t) \cdot \nabla f(t).$$

Note-se que a taxa de variação seguindo o movimento da partícula é diferente da taxa de variação fixo em um ponto no espaço. Essa variação, seguindo o movimento da partícula, é chamada de *derivada material* e denotada por

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla). \quad (6-1)$$

Vale enfatizar que fisicamente a derivada material é a taxa de variação seguindo o movimento da partícula de fluido. O primeiro termo $\frac{\partial}{\partial t}$ é a *derivada local*, e o segundo termo representa as mudanças devido ao movimento da partícula, chamada de *derivada convectiva*. Portanto, $\frac{D}{Dt}$ e $\frac{\partial}{\partial t}$ são fisicamente e numericamente diferentes.

6.1.2 Leis de Conservação

As equações de Navier-Stokes são obtidas de três princípios físicos muito familiares:

1. conservação de massa;
2. conservação de momento (segunda lei de Newton) e;
3. conservação de energia (primeira lei da termodinâmica).

O Teorema do Transporte de Reynolds é o teorema fundamental utilizado na formulação das leis básicas da dinâmica dos fluidos, que são a equação da conservação de massa (ou equação da continuidade), as equações de conservação de quantidade de movimento e a equação de conservação de energia.

O Teorema do Transporte de Reynolds estabelece uma relação integral, determinando as mudanças de qualquer propriedade P , definida sobre um volume de controle \mathcal{V} , como a soma entre o fluxo dessa propriedade sobre sua

superfície S (entrada e saída de propriedade no volume), e o que é criado ou consumido dentro do volume de controle. Isso é expresso pela seguinte equação integral:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} P \, d\mathcal{V} = - \int_S P \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{\mathcal{V}} Q \, d\mathcal{V}, \quad (6-2)$$

onde \mathbf{v} é a velocidade do escoamento e Q representa a quantidade criada ou consumida da propriedade P no volume de controle.

O teorema da divergência pode ser aplicado à integral de superfície, resultando em uma integral de volume

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} P \, d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (P\mathbf{v}) \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} Q \, d\mathcal{V}. \quad (6-3)$$

Por último, aplicando a regra de Leibniz na integral do lado esquerdo da equação 6-3, e combinando todos os termos, obtém-se

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (P\mathbf{v}) - Q \right) d\mathcal{V} = 0. \quad (6-4)$$

A integral 6-4 deve ser nula para qualquer volume de controle Ω , conseqüentemente

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (P\mathbf{v}) + Q = 0; \quad (6-5)$$

ou, usando a derivada material

$$\frac{DP}{Dt} + P\nabla \cdot \mathbf{v} + Q = 0. \quad (6-6)$$

Nas equações 6-5 e 6-6, o sinal negativo presente na equação 6-4 é incorporado à função Q . Essas equações serão utilizadas para obter as equações que governam os escoamentos de fluidos.

Conservação de Massa

O princípio da conservação de massa é de extrema importância para a física. Na ausência de fontes ou sorvedouros de massa (locais pelos quais a massa possa desaparecer), toda a massa que entra em um volume de controle deve sair e/ou se acumular no mesmo. A equação resultante da aplicação desse princípio é chamada de *equação da continuidade*.

A equação da continuidade é obtida fazendo $Q = 0$ (nenhuma massa é criada ou destruída), e P igual à massa específica ρ (massa por unidade de volume) na equação 6-5

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (6-7)$$

ou na equação 6-6

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (6-8)$$

O sistema de equações, formado pela equação da conservação de massa, pelas equações de conservação de quantidade de momento e pela equação de conservação de energia, é geralmente chamado de equações de Navier-Stokes. As equações de Navier-Stokes, porém, são apenas as equações de conservação de quantidade de momento, que serão derivadas a seguir.

Conservação de Momento

A forma mais elementar das equações de Navier-Stokes é obtida quando a equação de conservação 6-5 é aplicada ao momento. Escrevendo o momento como $\rho \mathbf{v}$, as equações de conservação de quantidade de momento (equações de Navier-Stokes) são

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) = b_i, \quad (6-9)$$

onde o índice i indica que a equação foi aplicada a cada componente da velocidade $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Note-se também que um campo de forças \mathbf{b} representa a quantidade de momento criado ou destruído.

Expandindo os termos, reorganizando e denotando $\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) = I$, temos

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) + \left(\nabla (\rho v_i) \cdot \mathbf{v} + \rho v_i \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) + \left(\nabla (\rho) v_i \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla (v_i) \cdot \mathbf{v} + \rho v_i \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \\ &= \left(v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) + \rho \nabla (v_i) \cdot \mathbf{v} + v_i \left(\nabla (\rho) \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \\ &= \left(v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) + \rho \nabla (v_i) \cdot \mathbf{v} + v_i \left(\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) \\ &= v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) + \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \nabla (v_i) \cdot \mathbf{v} \right) \end{aligned}$$

A equação de conservação de quantidade de momento 6-9 pode então ser reescrita como

$$v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) + \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \nabla (v_i) \cdot \mathbf{v} \right) = b_i. \quad (6-10)$$

A expressão no primeiro parêntese é, pela equação de conservação de massa (6-7), igual a zero. Donde, podemos reescrever a equação do momento na forma vetorial por

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{b}. \quad (6-11)$$

As equações de conservação de momento estabelecem que, as variações

de momento, em um volume de fluido, são simplesmente resultados das forças viscosas dissipativas, variações na pressão e outras forças externas agindo no fluido.

Em geral, o campo de forças \mathbf{b} na equação de conservação de momento é dividido em três termos: gradiente da pressão p , divergente vetorial do tensor \mathbb{T} e um campo de forças externas \mathbf{f} . Podemos agora reescrever a equação do momento da maneira mais usual

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbb{T} + \mathbf{f}, \quad (6-12)$$

onde p é a pressão no fluido, $\nabla \cdot \mathbb{T}$ é o divergente vetorial do tensor de tensões

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

e \mathbf{f} é qualquer campo de forças externas, como, por exemplo, a gravidade.

As equações de conservação de momento ainda estão incompletas. Para completá-las, deve-se apresentar hipóteses na forma do tensor $\nabla \cdot \mathbb{T}$, isto é, precisamos de uma lei constitutiva para as tensões τ_{ij} , em função das propriedades dos fluidos. Essa lei constitutiva é obtida para diferentes famílias de fluidos.

Fluidos Newtonianos

Na maioria dos fluidos as tensões viscosas são consideradas como linearmente proporcionais à taxa de deformação do volume de fluido. Para essa classe, denominada *fluidos newtonianos*, as tensões são dadas por

$$\mathbb{T}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (6-13)$$

onde δ_{ij} é a função delta de Kronecker, e μ é a viscosidade dinâmica que quantifica a propriedade dos fluidos correspondente ao transporte microscópico de quantidade de movimento por difusão molecular, ou seja, quanto maior a viscosidade, menor a velocidade em que o fluido se movimenta. O coeficiente λ está relacionado à variação de volume devido ao efeito viscoso, chamado de viscosidade volumétrica. O valor do parâmetro λ é muito difícil de determinar. Em escoamentos incompressíveis, o termo relacionado é nulo. Em escoamentos compressíveis, porém, pela hipótese de Stokes,

$$\lambda = \frac{2}{3}\mu.$$

Muitos fluidos, como a água ou a maioria dos gases, satisfazem os critérios

de Newton, e por isso são conhecidos como fluidos newtonianos. Os fluidos não-newtonianos têm um comportamento mais complexo e não-linear (84, 90).

Conservação de Energia

O princípio da conservação de energia diz que, em um sistema isolado, a energia interna permanece constante, ou ainda, a energia não pode ser criada e nem destruída, apenas transformada de uma forma para outra. Esse princípio, aplicado a um volume de controle, diz que a variação temporal da energia no volume é igual ao fluxo resultante de calor na superfície, mais o trabalho realizado pelas forças de campo e superfície, sobre o volume.

A conservação da energia interna e em um volume de controle, pode ser descrita pela equação

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (k \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \Phi, \quad (6-14)$$

onde q é o calor produzido no volume de fluido, k é o coeficiente de condutividade térmica do fluido, T é a temperatura, e Φ é a função de dissipação de energia devido aos efeitos viscosos. O primeiro e o segundo termos do lado direito da igualdade, respectivamente, representam:

- a taxa de calor por unidade de massa produzido por agentes externos ou internos; e
- a transferência de calor por condução através da superfície do volume de controle, devido a gradientes de temperatura.

A função de dissipação, no espaço cartesiano tridimensional, é dada por

$$\begin{aligned} \Phi = & 2\mu \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + \\ & + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \end{aligned}$$

onde $\mathbf{v} = (u, v, w)$.

Dependendo da aplicação, a equação da energia pode ser descrita de diferentes formas. Deduções detalhadas podem ser encontradas, por exemplo, nos textos de Anderson (4) e Fortuna (33) ou em livros de mecânica dos fluidos.

6.2

Fluidos Incompressíveis

Um fluido incompressível pode ser visto como um fluido onde variações da densidade no movimento de uma partícula de fluido são desprezíveis. Nenhum

fluido é realmente incompressível; até mesmo líquidos podem ter a densidade aumentada aplicando-se uma pressão suficiente.

Em geral, a incompressibilidade é vista como uma propriedade do escoamento. Um escoamento é incompressível quando o divergente da velocidade é nulo

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (6-15)$$

Na teoria, escoamentos com divergente da velocidade nulo são chamados de escoamentos isocóricos. Portanto, sobre certas circunstâncias, um fluido compressível pode ter um escoamento incompressível.

As equações de Navier-Stokes, para escoamentos incompressíveis, podem ser simplificadas. Primeiro, como o divergente da velocidade é nulo, temos

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \implies \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

isto é, a derivada material da densidade é nula. A densidade, porém, não é necessariamente constante. Fluidos com esta propriedade são chamados de homogêneos. Para tais fluidos, onde $\rho = \text{constante}$, temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

e

$$\nabla \rho = 0.$$

Donde, da equação da continuidade, segue que

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0 \implies \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Assim, fluidos homogêneos sempre escoam incompressivelmente, mas o inverso não é verdade.

É comum achar referências onde o autor menciona um escoamento incompressível, supondo a densidade constante. Mesmo sendo tecnicamente incorreto, essa suposição é na prática aceitável. Um das vantagens em usar a incompressibilidade material, ao supor o escoamento incompressível, está nas equações de conservação de momento, onde a viscosidade cinemática, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, é constante. Além disso, o termo associado à viscosidade volumétrica λ é igual a zero (incompressibilidade). Portanto, o tensor é dado simplesmente por

$$\mathbb{T}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Portanto, a conservação da quantidade de movimento, para um fluido newtoniano em um escoamento incompressível, é dada pelas equações

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i + \frac{1}{\rho} f_i, \quad (6-16)$$

onde, o índice representa a coordenada, a viscosidade ν é a viscosidade cinemática $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ do fluido, e o operador Δ é definido por

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Pode-se representar as equações 6-16 da seguinte forma vetorial

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta^n \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \quad (6-17)$$

onde $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $v_i = v_i(x_1, \dots, x_n)$, e o laplaciano vetorial é definido por

$$\Delta^n(\mathbf{v}) = \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_n^2}, \dots, \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_n^2} \right).$$

Uma observação importante é que em fluidos newtonianos incompressíveis a força viscosa é representada por um vetor laplaciano. Por isso, em escoamentos desse tipo, o termo

$$\nu \Delta^n \mathbf{v}$$

é chamado de difusão ou dissipação de momento.

O processo de solução das equações de Navier-Stokes requer que cada variável tenha uma equação evolutiva para ser avançada no tempo. Observando o nosso sistema de equações, é fácil identificar que as variáveis \mathbf{v} e e podem ser avançadas pela equação do momento e pela equação da energia, respectivamente. Uma equação evolutiva para a pressão, não é dada pelas equações de Navier-Stokes. Para obter o campo de pressão em um escoamento deve-se primeiro classificá-lo como compressível ou incompressível. Para cada um desses escoamentos existe uma formulação adequada para determinar a pressão.

Um escoamento é dito compressível quando a velocidade do fluido é maior que 10% da velocidade do som no fluido, ou quando existem gradientes de pressão e temperatura que causem variações na densidade do mesmo (32).

Em escoamentos compressíveis, a termodinâmica nos fornece, pela relação das variáveis termodinâmicas p , e e ρ , uma *equação do estado* para o cálculo da pressão

$$p = p(\rho, e).$$

Em um escoamento incompressível, porém, a pressão não pode ser vista como função das propriedades termodinâmicas do sistema (33).

As equações de conservação de massa, momento e energia, juntamente com uma equação para obter a pressão, como, por exemplo a equação do estado em escoamentos compressíveis, formam um sistema fechado de equações que governam os escoamentos de fluidos. Existem também os coeficientes de viscosidade e condutividade térmica que, embora não sejam incógnitas, devem ser determinados em função das condições termodinâmicas do escoamento.

Conforme Fletcher (32), muitas outras simplificações, nas equações de Navier-Stokes, são possíveis, como, por exemplo, quando a viscosidade $\mu = 0$, o escoamento é dito invíscido. Escoamentos invíscidos são regidos pelas equações de Euler, que na forma vetorial são

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{f} \\ \rho \frac{De}{Dt} &= \rho \frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (k \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

O enfoque desta tese se dá sobre os fluidos newtonianos em escoamentos incompressíveis. Embora o escoamento não precise ser isotérmico, variações de temperatura são consideradas desprezíveis. Portanto, o coeficiente de viscosidade é considerado constante e uniforme. Por último, nesse tipo de escoamento, não há a necessidade da equação da energia ser resolvida. As equações de Navier-Stokes são, então, escritas como

– equação da continuidade $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ (6-18)

– equação do momento

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta^n \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f} \quad (6-19)$$

Observando as equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis 6-18 e 6-19, notamos que existe um número igual de equações e variáveis no sistema. A equação da conservação da massa 6-18, porém, não serve de equação evolutiva para nenhuma variável, e passa a ser, apenas, uma restrição que deve ser obedecida pelo campo de velocidade. Mais ainda, nenhuma relação termodinâmica pode ser utilizada para obter a pressão em escoamentos incompressíveis. Em outras palavras, a pressão não é uma grandeza termodinâmica em escoamentos incompressíveis. O objetivo da próxima seção é descrever como é obtida a pressão em um escoamento incompressível.

6.3

A Pressão em Escoamentos Incompressíveis

Escoamentos incompressíveis podem ser resolvidos empregando-se *metodologias segregadas*, onde as equações de Navier-Stokes 6-18 e 6-19 são resolvidas separadamente.

Em metodologias segregadas, deve-se dispor de uma equação evolutiva para a pressão que produza um campo de pressão, que, quando inserido nas equações de quantidade de movimento, origine velocidades que satisfaçam também a equação de conservação da massa.

Portanto, a equação da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

pode ser vista como uma restrição do campo de velocidades do escoamento, garantindo a incompressibilidade do mesmo. Por isso, muitos autores referem-se a essa equação como a *condição de incompressibilidade do fluido*. Esta seção descreve, com um pouco mais de detalhes, como a pressão é obtida nessa família de escoamentos. Mais ainda: como, a partir da pressão obtida, as equações da continuidade e do momento são satisfeitas.

Nesse intuito, usaremos o teorema de decomposição de Helmholtz-Hodge.

Teorema 1 (*Decomposição de Helmholtz-Hodge*) *Qualquer campo vetorial \mathbf{v} definido em uma região limitada Ω com contorno suave $S = \partial\Omega$, pode ser unicamente decomposto na forma*

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \nabla\phi,$$

onde \mathbf{u} é um campo de divergência nula e é paralelo a S , isto é, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ em S , onde \mathbf{n} é o vetor normal a superfície S .

A prova da decomposição de Helmholtz-Hodge pode ser encontrada em Chorin e Marsden (17). Chorin e Marsden também introduzem o operador de projeção ortogonal \mathbb{P} , o qual mapeia um vetor \mathbf{v} em sua parte de divergência livre \mathbf{u} . Pelo teorema anterior, o operador de projeção \mathbb{P} é bem definido.

O método proposto para forçar a incompressibilidade no escoamento separa o cálculo da pressão do da velocidade. Sendo, por isso, muitas vezes chamado de *método de desacoplamento pressão-velocidade*. O método de desacoplamento pressão-velocidade teve sua origem em 1968 nos trabalhos de Chorin (16). Diferentes nomes foram dados às diversas variações do método, como método de passo fracionado (60, 51) ou método da projeção (10, 106, 21).

Tipicamente, um campo intermediário de velocidades \mathbf{v}^* é obtido pela equação do momento 6-19, negligenciando o termo da pressão

$$\frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}}{\Delta t} \approx \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nu \Delta^n \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}.$$

Pela decomposição de Helmholtz-Hodge, o campo \mathbf{v}^* pode ser reescrito como

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{u} + \nabla \phi,$$

onde a parte irrotacional $\nabla \phi$ é obtida resolvendo a seguinte equação de Poisson

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^* = \nabla \cdot (\mathbf{u} + \nabla \phi) = \Delta \phi. \tag{6-20}$$

Portanto, a projeção do campo \mathbf{v}^* sobre o espaço de campos vetoriais incompressíveis, dá origem aos novos campos de pressão e de velocidade

$$p = \phi$$

$$\mathbf{v} = \mathbb{P}(\mathbf{v}^*) = \mathbf{v}^* - \nabla \phi. \tag{6-21}$$

No trabalho de Weina (106) pode-se encontrar um estudo sobre várias versões numéricas do método de desacoplamento pressão-velocidade. O seguinte diagrama ilustra os passos no método.

