

2

A física do transporte da luz

Queremos simular a física do processo de formação de uma imagem por uma câmera, ou seja, o que ocorre quando a luz é emitida por uma ou mais fontes, interage com os materiais que constituem as superfícies da cena fotografada e, finalmente, atinge os sensores óticos da câmera para formar uma imagem. O objetivo deste capítulo é formular matematicamente esse problema.

Para isso, como a luz faz parte do espectro eletromagnético, um ponto de partida natural é o estudo da radiometria, parte da física que estuda a medição da radiação eletromagnética. Começaremos definindo informalmente algumas grandezas radiométricas fundamentais, como potência radiante e radiância, apresentaremos a BRDF, função que modela a interação da luz com um material e, em seguida, iremos derivar a equação que descreve o transporte da luz. Concluiremos mostrando que a formação de imagens pode ser modelada como um conjunto de medições da radiação ótica na cena.

2.1

Radiometria

Nesta seção iremos introduzir as grandezas radiométricas necessárias para formular e descrever os algoritmos que resolvem o problema da iluminação global, isto é, calcular a distribuição da radiação ótica em uma cena.

Uma boa introdução à radiometria pode ser encontrada em (Nicodemus 76), (Nicodemus 78) e (Glassner 95). (Arvo 95) e (Veach 98) apresentam um tratamento mais preciso descrevendo as grandezas radiométricas com base na teoria da medida.

2.1.1

Potência radiante (fluxo radiante)

A potência radiante Φ é a energia total Q emitida, que atravessa ou que incide em uma superfície por unidade de tempo:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt},$$

medida em Watts (Joules/segundo).

Embora, evidentemente, Q e Φ sejam funções do tempo, na equação acima estamos omitindo o parâmetro t para enfatizar que estamos considerando sistemas em equilíbrio, ou seja, estamos desconsiderando o estado transiente que ocorre imediatamente após, por exemplo, uma fonte de luz ser ligada, o que pode ser considerado instantâneo para nossos propósitos.

2.1.2 Irradiância

Grandeza que indica a potência radiante incidente em uma superfície por unidade de área:

$$E(\mathbf{x}) = \frac{d\Phi}{dA},$$

medida em W/m^2 . A irradiância está definida nos pontos de qualquer superfície, real (as superfícies que constituem a cena) ou imaginária.

2.1.3 Radiosidade

Análoga à irradiância, com a potência radiante sendo *emitida* por unidade de área ao invés de recebida. Refere-se à energia deixando a superfície tanto por emissão quanto por espalhamento.

2.1.4 Radiância

É a grandeza mais importante do ponto de vista de cálculos envolvendo o transporte da luz. A radiância é definida como o fluxo radiante por unidade de área projetada por unidade de ângulo sólido:

$$L(\mathbf{x}, \omega) = \frac{d^2\Phi}{dA^\perp d\omega},$$

medida em $\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{sr}$.

Ou seja, dado um ponto no espaço e uma direção ω , a radiância fornece uma medida do número de fótons atravessando uma área dA^\perp de uma superfície imaginária perpendicular a ω e passando por um ângulo sólido $d\omega$ ao redor da direção ω .

Quando o ponto \mathbf{x} está sobre uma superfície com normal $N_{\mathbf{x}}$ no ponto \mathbf{x} é mais natural escrever a radiância em termos da área da superfície (Figura 2.1):

$$L(\mathbf{x}, \omega) = \frac{d^2\Phi}{(N_{\mathbf{x}} \cdot \omega) dA d\omega} = \frac{d^2\Phi}{\cos \theta dA d\omega}.$$

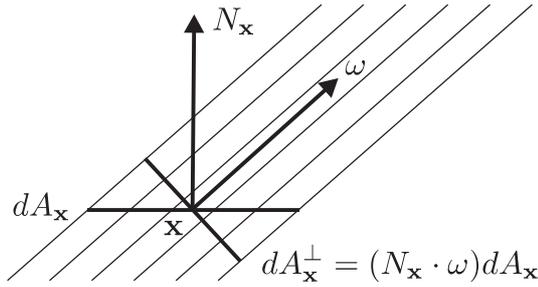


Figura 2.1: Relação entre o elemento de área da superfície e a área projetada

Note que, na verdade, temos duas funções para a radiância: a radiância emitida em uma dada direção (notação: $L(\mathbf{x} \rightarrow \omega)$) e a radiância recebida (notação: $L(\mathbf{x} \leftarrow \omega)$). Embora no espaço livre as duas funções relacionem-se simplesmente por $L(\mathbf{x} \rightarrow \omega) = L(\mathbf{x} \leftarrow -\omega)$, quando o ponto \mathbf{x} localiza-se sobre uma superfície, a relação é bem mais complicada, já que deve levar em consideração o espalhamento de fótons pelo material que constitui a superfície e, portanto, será apresentada mais tarde.

Quanto à parametrização da função L , é conveniente em algumas situações utilizar a notação $L(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y})$ e $L(\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{y})$ para denotar a radiância emitida e recebida pelo ponto \mathbf{x} na direção $\overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}}$, respectivamente. Especialmente na implementação, também será conveniente parametrizar a função por coordenadas esféricas $L(\mathbf{x}; \theta, \phi)$, onde θ é o ângulo polar (medido em relação à normal da superfície) e ϕ , o azimute.

2.1.5

Relação entre a radiância e as demais grandezas radiométricas

Após a definição de radiância, passamos a ter uma medida da distribuição da radiação óptica em relação a cada posição e direção. Com isso, podemos agora definir todas as demais grandezas em função da radiância.

Por exemplo, dada uma distribuição de radiância, para calcularmos a irradiância sobre um ponto de uma superfície basta integrar a radiância sobre o hemisfério \mathcal{H}^2 localizado acima da superfície:

$$E(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{H}^2} L(\mathbf{x} \leftarrow \omega)(N_{\mathbf{x}} \cdot \omega) d\omega.$$

De maneira análoga, a radiosidade é encontrada pela integração da radiância emitida:

$$B(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{H}^2} L(\mathbf{x} \rightarrow \omega)(N_{\mathbf{x}} \cdot \omega) d\omega.$$

E, caso seja conhecida a distribuição da radiância ao longo de toda a

sua área \mathcal{A} e em todas as direções, a potência radiante incidente sobre uma superfície é determinada por:

$$\Phi = \int_{\mathcal{A}} \int_{\mathcal{H}^2} L(\mathbf{x} \leftarrow \omega) (N_{\mathbf{x}} \cdot \omega) d\omega dA.$$

2.1.6

Invariância da radiância ao longo de um raio

Considere a situação ilustrada pela figura 2.2:

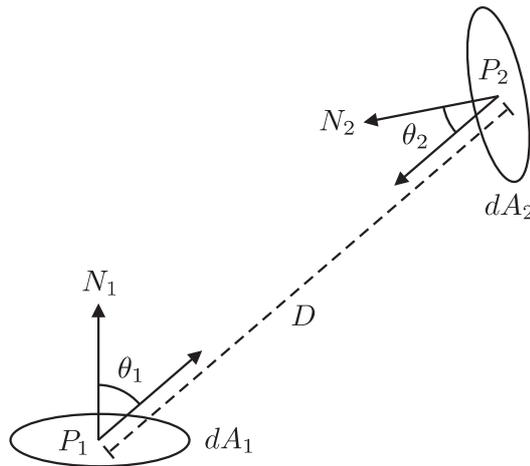


Figura 2.2: Elementos de área

O elemento de fluxo radiante deixando P_1 na direção de P_2 , pela definição de radiância, é dado por

$$d\Phi_1 = L(P_1 \rightarrow P_2) \cos \theta_1 dA_1 d\omega_1,$$

onde $d\omega_1$ é o ângulo sólido determinado por dA_2 quando visto de P_1 . Reescrevendo $d\omega_1$ como

$$d\omega_1 = \frac{\cos \theta_2 dA_2}{D^2},$$

temos que

$$d\Phi_1 = L(P_1 \rightarrow P_2) \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{D^2} dA_1 dA_2.$$

Por outro lado, pelo mesmo raciocínio o elemento de fluxo recebido por dA_2 é dado por:

$$d\Phi_2 = L(P_2 \leftarrow P_1) \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{D^2} dA_1 dA_2.$$

Assumindo que não há perda ou ganho de energia no meio que ocupa o espaço

entre P_1 e P_2 , temos que $d\Phi_1 = d\Phi_2$ e, portanto,

$$L(P_1 \rightarrow P_2) = L(P_2 \leftarrow P_1).$$

Com isso concluímos que se conhecermos a radiância em um ponto \mathbf{x} sobre uma superfície em uma dada direção ω , então poderemos determinar a radiância ao longo do raio $\mathbf{x} + t\omega$, $t > 0$, enquanto não houver ganho ou perda de energia.

2.1.7

Radiância espectral

Até agora não mencionamos a dependência do comprimento de onda das grandezas radiométricas, mas podemos tornar explícita essa dependência definindo as grandezas correspondentes. Por exemplo, a grandeza mais fundamental não é a radiância, mas sim a radiância espectral, definida por

$$L_\lambda = \frac{d^3\Phi}{dA^\perp d\omega d\lambda},$$

medida em $\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{sr} \cdot \text{nm}$.

A partir da radiância espectral podemos definir todas as demais grandezas. Por exemplo, a radiância é dada por

$$L = \int_0^\infty L_\lambda d\lambda.$$

E as demais grandezas saem das relações já apresentadas quando derivadas a partir da radiância. Para simplificar a apresentação iremos omitir a dependência do comprimento de onda quando mencionarmos as grandezas radiométricas, mas ficará sempre subentendido que essa dependência existe.

2.2

Espalhamento da luz

Ao atingir uma superfície, um fóton pode ser absorvido, ou interagir com o material e, logo em seguida, ser reemitido em outro ponto da superfície e em uma outra direção (Figura 2.3). De maneira mais geral, pode ser reemitido com uma frequência diferente (fluorescência) ou, mais ainda, com uma frequência diferente e significativamente mais tarde da absorção (fosforescência).

Aqui fazemos uma simplificação e assumimos que o fóton é reemitido no próprio ponto em que atinge a superfície, aproximação que, embora capaz de capturar a aparência de grande parte dos materiais, é insuficiente principalmente para a descrição de materiais translúcidos como, por exemplo, mármore

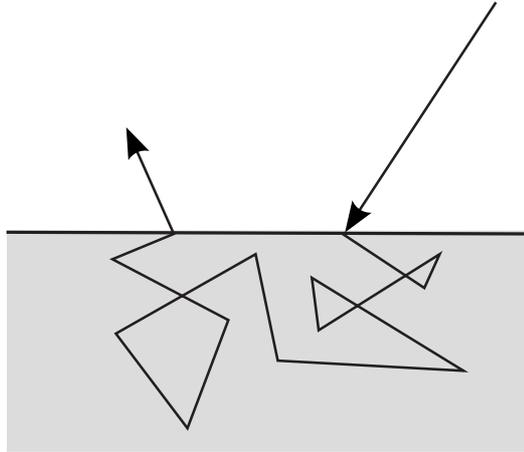


Figura 2.3: Espalhamento de um fóton em uma superfície

e pele humana (para modelos práticos que tratam esses tipos de materiais consulte (Hanrahan & Krueger 93), (Jensen et al. 01) e (Jensen & Buhler 02)). Também iremos assumir que a reemissão ocorre instantaneamente e com a mesma frequência, isto é, não consideraremos fluorescência nem fosforescência (consulte (Glassner 94) para um tratamento desses dois fenômenos).

Com essas simplificações, ao atingir um ponto de uma superfície, um fóton pode ser absorvido, refletido numa direção localizada no mesmo hemisfério da direção de incidência ou transmitido no hemisfério contrário à direção de incidência. Para facilitar a discussão, iremos assumir também que a reflexão ocorre no mesmo hemisfério da direção de incidência.

Nos materiais onde as hipóteses que fazemos são válidas, as propriedades de reflexão são capturadas pela função de distribuição da reflectância bidirecional, a BRDF, sigla em inglês para *Bidirectional Reflectance-Distribution Function* (Nicodemus 77).

2.2.1

BRDF - Bidirectional Reflectance-Distribution Function

A irradiância incidente em um ponto \mathbf{x} por um elemento de ângulo sólido $d\omega_i$ é dada por

$$dE(\mathbf{x} \leftarrow \omega_i) = L(\mathbf{x} \leftarrow \omega_i)(N_{\mathbf{x}} \cdot \omega_i)d\omega_i.$$

Em condições normais, verifica-se experimentalmente que a radiância $dL(\mathbf{x} \rightarrow \omega_o)$ refletida em uma direção ω_o pelo ponto \mathbf{x} é diretamente proporcional à $dE(\mathbf{x} \leftarrow \omega_i)$, ou seja,

$$dL(\mathbf{x} \rightarrow \omega_o) = f_r \cdot dE(\mathbf{x} \leftarrow \omega_i).$$

O fator de proporcionalidade f_r varia em função das direções de incidência e de emissão. Se considerarmos o fator em todos os pontos das superfícies \mathcal{M} da cena, temos uma função $f_r : \mathcal{M} \times \mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^2 \rightarrow [0, \infty]$, a chamada BRDF.

Logo, as características de refletância de uma superfície são descritas pela função f_r , definida por

$$f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) = \frac{dL(\mathbf{x} \rightarrow \omega_o)}{dE(\mathbf{x} \leftarrow \omega_i)} = \frac{dL(\mathbf{x} \rightarrow \omega_o)}{L(\mathbf{x} \leftarrow \omega_i)(N_{\mathbf{x}} \cdot \omega_i)d\omega_i}.$$

Uma notação que nos será útil para a radiância é $f_r(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z})$, usada para denotar $f_r(\mathbf{y}, \overrightarrow{\mathbf{y}\mathbf{x}} \rightarrow \overrightarrow{\mathbf{y}\mathbf{z}})$.

2.2.2

Reflexão local

Uma vez definido um modelo para a interação da luz com uma superfície, estamos em posição de relacionar a radiância incidente à radiância refletida.

Pela definição da BRDF, temos que

$$dL(\mathbf{x} \rightarrow \omega_o) = f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o)L(\mathbf{x} \leftarrow \omega_i)(N_{\mathbf{x}} \cdot \omega_i)d\omega_i.$$

Logo, integrando em todo o hemisfério das direções incidentes,

$$L(\mathbf{x} \rightarrow \omega_o) = \int_{\mathcal{H}^2} f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o)L(\mathbf{x} \leftarrow \omega_i)(N_{\mathbf{x}} \cdot \omega_i)d\omega_i, \quad (2-1)$$

chegamos à equação de reflexão.

Portanto, como a BRDF e $N_{\mathbf{x}}$ são propriedades dos materiais e da geometria da cena, respectivamente, uma vez conhecida a radiância incidente em \mathbf{x} podemos determinar a radiância refletida em qualquer direção.

Note também que a equação acima define um operador linear, o operador de reflexão \mathbf{R} , que transforma uma função de radiância incidente em uma função de radiância emitida:

$$\overrightarrow{L} = \mathbf{R} \overleftarrow{L}. \quad (2-2)$$

2.2.3

Materiais fisicamente plausíveis

Uma BRDF que representa um material real deve ser simétrica, isto é, se trocarmos a posição da fonte de luz com a do detector seu valor deve permanecer o mesmo:

$$f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) = f_r(\mathbf{x}, \omega_o \rightarrow \omega_i).$$

Em virtude dessa propriedade podemos usar a notação $f_r(\mathbf{x}, \omega_i \leftrightarrow \omega_o)$.

Na comunidade da computação gráfica, freqüentemente essa propriedade é erroneamente justificada pelo princípio da reciprocidade de Helmholtz, um teorema da ótica geométrica que diz que se um raio de luz, após um número qualquer de reflexões e refrações, dá origem a um raio com uma fração da intensidade do raio original, então, para um raio percorrendo o caminho no sentido inverso, a perda em intensidade é a mesma. A afirmação de Helmholtz referia-se apenas a reflexões e transmissões perfeitamente especulares, e isso não implica a simetria de uma BRDF arbitrária. Como descrito em (Chandrasekhar 60), uma observação de Lord Rayleigh é mais relevante como origem desse princípio. Segundo Rayleigh, se colocarmos um medidor de irradiância em um ponto próximo a uma pequena superfície (refletindo *de qualquer maneira*) onde fizemos incidir uma pequena fonte de luz, a leitura do detector será a mesma se trocarmos a sua posição com a da fonte. Dentro da computação gráfica, essa discussão foi levantada em (Veach 98), onde também são explicadas as condições que devem ser satisfeitas para que esses princípios de reciprocidade sejam válidos.

Pela conservação de energia, uma superfície também não pode refletir mais energia do que recebe, isto é, a potência emitida por reflexão em cada ponto de uma superfície não pode ser maior que a potência incidente:

$$\Phi_r(\mathbf{x}) \leq \Phi_i(\mathbf{x}). \quad (2-3)$$

A potência total incidente no hemisfério superior é dada por

$$\Phi_i(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{H}^2} L(\mathbf{x} \leftarrow \omega_i)(N_{\mathbf{x}} \cdot \omega_i) d\omega_i. \quad (2-4)$$

De modo semelhante, a potência total refletida é dada por

$$\Phi_r(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{H}^2} L(\mathbf{x} \rightarrow \omega_o)(N_{\mathbf{x}} \cdot \omega_o) d\omega_o,$$

que, pela equação (2-1), pode ser reescrita como

$$\Phi_r(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{H}^2} \int_{\mathcal{H}^2} f_r(\mathbf{x}, \omega_i \leftrightarrow \omega_o) L(\mathbf{x} \leftarrow \omega_i)(N_{\mathbf{x}} \cdot \omega_i)(N_{\mathbf{x}} \cdot \omega_o) d\omega_i d\omega_o. \quad (2-5)$$

Substituindo as relações (2-4) e (2-5) na desigualdade (2-3),

$$\frac{\Phi_r(\mathbf{x})}{\Phi_i(\mathbf{x})} = \frac{\int_{\mathcal{H}^2} \int_{\mathcal{H}^2} f_r(\mathbf{x}, \omega_i \leftrightarrow \omega_o) L(\mathbf{x} \leftarrow \omega_i)(N_{\mathbf{x}} \cdot \omega_i)(N_{\mathbf{x}} \cdot \omega_o) d\omega_i d\omega_o}{\int_{\mathcal{H}^2} L(\mathbf{x} \leftarrow \omega_i)(N_{\mathbf{x}} \cdot \omega_i) d\omega_i} \leq 1.$$

Como a relação deve valer para qualquer distribuição de radiância incidente, dada uma direção ω'_i , tomando $L(\mathbf{x} \leftarrow \omega_i) = \delta(\omega_i - \omega'_i)$, ou seja, concentrando a radiância em uma única direção ω'_i , chegamos a uma condição

necessária para a conservação de energia:

$$\int_{\mathcal{H}^2} f_r(\mathbf{x}, \omega_i \leftrightarrow \omega_o)(N_{\mathbf{x}} \cdot \omega_o) d\omega_o \leq 1 \quad \forall \omega_i \in \mathcal{H}^2.$$

2.2.4

Superfícies difusas

Em materiais perfeitamente difusos (lambertianos), a luz é espalhada igualmente em todas as direções, ou seja, a BRDF é uma constante:

$$f_r(\mathbf{x}, \omega_i \leftrightarrow \omega_o) = k.$$

Pela conservação de energia, sabemos que

$$\int_{\mathcal{H}^2} k (N_{\mathbf{x}} \cdot \omega_i) d\omega_o \leq 1,$$

ou seja,

$$k \int_{\mathcal{H}^2} (N_{\mathbf{x}} \cdot \omega_i) d\omega_o = k\pi \leq 1.$$

Logo, a BRDF de uma superfície lambertiana é da forma

$$f_r(\mathbf{x}, \omega_i \leftrightarrow \omega_o) = \frac{\rho}{\pi}, \quad (2-6)$$

onde $0 \leq \rho \leq 1$. A constante ρ é chamada de albedo da superfície e mede a fração da energia incidente que é refletida.

2.2.5

Modelos para BRDF

Foram propostos inúmeros modelos para BRDFs tentando aproximar a aparência de materiais reais. Embora esteja além do escopo desta dissertação fazer um levantamento completo dos modelos para BRDFs existentes, como ponto de partida para investigações mais detalhadas, podemos fazer um rápido levantamento de alguns tipos de modelos que vêm sendo usados na computação gráfica.

Alguns são puramente fenomenológicos, como o popular modelo de Phong (Phong 75), que combina linearmente uma componente representando uma reflexão perfeitamente difusa com outra representando uma reflexão especular “espalhada” em torno da direção de reflexão perfeitamente especular. Embora seja um modelo puramente fenomenológico, é capaz de capturar relativamente bem a aparência de materiais como plástico.

Seguindo com a idéia de Phong de combinar linearmente uma compo-

nente difusa com uma especular, (Blinn 77) trouxe de fora da computação gráfica (Torrance & Sparrow 67) um modelo mais fiel à física do que o modelo de Phong para a componente especular. Supondo que a superfície é formada por uma distribuição de microfacetas e incorporando termos correspondendo às equações de Fresnel, o modelo difere do de Phong principalmente em superfícies não-metálicas e quando a iluminação vem de direções quase tangenciais. Seguindo a mesma linha, um modelo aprimorando essas idéias foi apresentado em (Cook & Torrance 81). Todos esses modelos são baseados na ótica geométrica. Para um modelo de reflexão baseado na teoria eletromagnética da luz, consulte (He et al. 91).

Em (Oren & Nayar 94), usando idéias semelhantes a de microfacetas, foi proposto um modelo mais apropriado para reflexão difusa que o modelo lambertiano. Outros modelos capturam propriedades de reflexão anisotrópica (Kajiya 85), (Poulin & Fournier 90), (Ward 92), encontradas em superfícies como metais escovados. Recentemente, o uso de medições de BRDFs de materiais reais vem recebendo crescente atenção (Greenberg et al. 97), (Dana et al. 99), (Matusik 03).

2.3

Emissão de luz

Além do espalhamento de fótons provenientes de outras superfícies, uma superfície pode também gerar energia luminosa. Processos físicos que resultam em emissão de luz incluem incandescência (emissão de radiação por um corpo devido à sua alta temperatura), luminescência (como, por exemplo, quimiluminescência, a emissão de luz resultando de uma reação química, ou bioluminescência, um caso particular de quimiluminescência que ocorre quando a luz é gerada por um organismo vivo) e fluorescência (a absorção de fótons em um comprimento de onda e reemissão em um outro comprimento, geralmente com a absorção na faixa ultravioleta do espectro e emissão como luz visível, como ocorre, por exemplo, com as lâmpadas fluorescentes).

Nós não estamos interessados nos mecanismos responsáveis pela geração de luz, mas apenas na distribuição espacial e direcional da radiância emitida resultante. Independentemente da maneira como a energia luminosa é gerada, podemos definir uma função $L_e : \mathcal{M} \times \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que indica a radiância emitida por cada ponto das superfícies da cena em cada direção. Sobre superfícies não emissoras basta simplesmente fazer com que a função L_e assumo o valor zero.

2.4

A equação do transporte da luz

Agora sabemos que a radiância deixando um ponto qualquer sobre uma superfície da cena em uma dada direção é resultado de dois processos: emissão e reflexão. Como estamos assumindo que esses dois processos são independentes, isto é, estamos desconsiderando fenômenos como fosforescência, a radiância total deixando a superfície é simplesmente a soma da radiância resultante desses dois processos:

$$\vec{L} = L_e + \vec{L}_r.$$

Na seção anterior vimos que a emissão é simplesmente modelada por uma função L_e que indica a radiância emitida por cada ponto em cada direção e é, portanto, dada pela descrição da cena. Substituindo a relação entre a radiância refletida e incidente (equação 2-2) na equação acima, obtemos a equação

$$\vec{L} = L_e + \mathbf{R}\vec{L}.$$

Expandindo o operador de reflexão, chegamos a uma equação integral

$$L(\mathbf{x} \rightarrow \omega_o) = L_e(\mathbf{x} \rightarrow \omega_o) + \int_{\mathcal{H}^2} f_r(\mathbf{x}, \omega_i \leftrightarrow \omega_o) L(\mathbf{x} \leftarrow \omega_i) (N_{\mathbf{x}} \cdot \omega_i) d\omega_i,$$

a equação do transporte da luz. Na equação, note que a incógnita é a radiância L , e L_e , f_r e $N_{\mathbf{x}}$ são funções dadas pela descrição da cena.

No contexto da computação gráfica, essa equação foi apresentada pela primeira vez por (Kajiya 86), embora equações semelhantes já tenham aparecido antes em outras áreas como, por exemplo, a equação de Boltzmann para o transporte de nêutrons (Lewis & Miller 84).

Podemos explicitar a natureza recursiva da equação usando a propriedade de invariância da radiância ao longo de um raio. Ao invés de nos referirmos à radiância recebida $L(\mathbf{x} \leftarrow \omega_i)$ dentro do integrando, podemos escrever $L(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x})$, onde \mathbf{y} é a origem da radiância que atinge o ponto \mathbf{x} pela direção ω_i . Mais formalmente, em primeiro lugar definimos a função

$$t(\mathbf{x}, \omega) = \inf\{t > 0 \mid \mathbf{x} + t\omega \in \mathcal{M}\}.$$

Para simplificar a discussão, vamos assumir que envolvendo a cena existe uma esfera não emissora e com refletância zero. Em seguida, definimos o operador de lançamento de raios $r(\mathbf{x}, \omega)$, que associa a um ponto \mathbf{x} e uma direção ω o ponto mais próximo de \mathbf{x} na direção ω nas superfícies que constituem a cena,

ou seja,

$$r(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{x} + t(\mathbf{x}, \omega) \omega.$$

Definida essa função, podemos relacionar a radiância emitida e recebida por

$$L(\mathbf{x} \leftarrow \omega) = L(r(\mathbf{x}, \omega) \rightarrow -\omega).$$

Substituindo a relação na equação do transporte de luz,

$$L(\mathbf{x} \rightarrow \omega_o) = L_e(\mathbf{x} \rightarrow \omega_o) + \int_{\mathcal{H}^2} f_r(\mathbf{x}, \omega_i \leftrightarrow \omega_o) L(r(\mathbf{x}, \omega_i) \rightarrow -\omega_i) (N_{\mathbf{x}} \cdot \omega_i) d\omega_i.$$

Note que agora a mesma função L , a radiância deixando as superfícies, aparece em ambos os lados da equação. De modo semelhante poderíamos reescrever a equação colocando como incógnita a radiância incidente.

2.4.1

Formulação por área

Na equação do transporte da luz, podemos escrever

$$L(r(\mathbf{x}, \omega_i) \rightarrow -\omega_i) = L(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}),$$

onde $\mathbf{y} = r(\mathbf{x}, \omega_i)$.

Como já mencionado, o elemento de ângulo sólido determinado pelo elemento de área da superfície onde se encontra o ponto \mathbf{y} pode ser escrito como

$$d\omega_i = \frac{\cos(N_{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}\mathbf{x}}) dA_{\mathbf{y}}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}.$$

Assim, ao invés de integrar no hemisfério das direções incidentes podemos trocar o domínio de integração para o conjunto \mathcal{M} das superfícies da cena, reformulando a equação do transporte da luz como

$$L(\mathbf{x} \rightarrow \omega_o) = L_e(\mathbf{x} \rightarrow \omega_o) + \int_{\mathcal{M}} f_r(\mathbf{x}, \overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}} \leftrightarrow \omega_o) L(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA_{\mathbf{y}}, \quad (2-7)$$

onde

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\cos(N_{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}}) \cos(N_{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}\mathbf{x}})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} V(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

e $V(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é a função de visibilidade:

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \text{se } r(\mathbf{x}, \overrightarrow{\mathbf{x}\mathbf{y}}) = \mathbf{y} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases},$$

ou seja, função que assume o valor 1 se \mathbf{x} e \mathbf{y} são mutuamente visíveis, e 0 caso contrário.

Se o \mathbf{x} e um outro ponto qualquer \mathbf{x}' são mutuamente visíveis, então, pondo $\omega_o = \widehat{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}$, podemos reescrever a equação acima da forma

$$L(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') = L_e(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') + \int_{\mathcal{M}} f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}')L(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x})G(\mathbf{x}, \mathbf{y})dA_{\mathbf{y}}.$$

Para condensar a equação, vamos definir a função K como:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = f_r(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z})G(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

de modo que a equação fica

$$L(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') = L_e(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') + \int_{\mathcal{M}} L(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x})K(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{x}')dA_{\mathbf{y}}.$$

Renomeando as variáveis,

$$L(\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}) = L_e(\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}) + \int_{\mathcal{M}} L(\mathbf{x}'' \rightarrow \mathbf{x}')K(\mathbf{x}'', \mathbf{x}', \mathbf{x})dA_{\mathbf{x}''}, \quad (2-8)$$

onde

$$K(\mathbf{x}'', \mathbf{x}', \mathbf{x}) = f_r(\mathbf{x}'' \rightarrow \mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x})G(\mathbf{x}'', \mathbf{x}').$$

2.4.2

A equação do transporte da luz para superfícies difusas

Em uma cena onde todos os emissores e superfícies são difusos, a radiação ótica deixando as superfícies deixa de ter a dependência direcional. Para os emissores difusos temos que $L_e(\mathbf{x} \rightarrow \omega_o) = L_e(\mathbf{x})$, de modo que podemos expressar as características de emissão pela radiosidade $B_e(\mathbf{x}) = \pi L_e(\mathbf{x})$.

Multiplicando por π os dois lados da formulação por área da equação do transporte da luz (2-8) e substituindo a expressão para a BRDF de uma superfície lambertiana (2-6), chegamos à equação do transporte da luz para um ambiente perfeitamente difuso, a equação integral da radiosidade:

$$B(\mathbf{x}) = B_e(\mathbf{x}) + \frac{\rho(\mathbf{x})}{\pi} \int_{\mathcal{M}} B(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA_{\mathbf{y}},$$

onde $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tem o mesmo significado da equação (2-7).

Essa abordagem simplificada para o problema da iluminação global recebeu atenção a partir de (Goral et al. 84), onde foi proposta uma solução com base em métodos de elementos finitos trazidos da área de transferência de calor. Nós estamos interessados na formulação geral do problema e, portanto, não iremos discutir algoritmos específicos para a equação acima (consulte (Cohen & Wallace 93) ou (Sillion & Puech 94)).

2.4.3

Expansão em série de Neumann

Reexaminemos com mais detalhe a formulação da equação com o uso de operadores lineares:

$$L = L_e + \mathbf{R}L.$$

Formalmente, a equação pode ser resolvida invertendo-se a equação:

$$L = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}L_e,$$

onde \mathbf{I} é o operador identidade. Para que a solução acima faça sentido, é necessário que o operador $\mathbf{I} - \mathbf{R}$ seja invertível. Uma condição suficiente para a invertibilidade do operador é que $\|\mathbf{R}\| < 1$, onde $\|\mathbf{R}\|$ é a norma do operador

$$\|\mathbf{R}\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|\mathbf{R}f\|,$$

onde a norma na direita é uma norma no espaço das funções (norma L_p , por exemplo).

Quando $\|\mathbf{R}\| < 1$, $\mathbf{I} - \mathbf{R}$ é invertível e a inversa é dada pela série de Neumann:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{R}^i,$$

que pode ser vista como uma generalização da série geométrica para $1/(1-x)$, com $x < 1$.

A solução da equação pode ser escrita como:

$$L = L_e + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{R}^i L_e.$$

A solução acima tem uma interpretação interessante: indica que a radiância final é o resultado da soma da radiância emitida (refletida zero vezes) com a radiância refletida uma, duas, ... vezes.

Em (Arvo 95) foi provado que, assumindo que as BRDFs satisfazem as condições de simetria e conservação de energia e que nenhuma superfície é perfeitamente refletiva, $\|R\|_p < 1$. A convergência da série no caso geral, que inclui a possibilidade de transmissão além de reflexão, foi provada em (Veach 98).

2.5

A equação de medição

Como enunciado no início do capítulo, o nosso objetivo é simular o processo de formação de uma imagem. Até agora estivemos ocupados principalmente descrevendo como a radiação ótica se propaga em um ambiente. O passo final é descrever como podemos modelar a medição dessa radiação.

De maneira geral, queremos como resultado de nossa simulação o valor de n medições I_1, \dots, I_n da radiação ótica em uma cena, como, por exemplo, a resposta dos sensores CCD de uma câmera digital.

A resposta S de um instrumento é função da potência incidente em cada direção em cada ponto de sua superfície. Assumindo que essa resposta é linear, podemos definir a responsividade $W_e(\mathbf{x}, \omega)$ do instrumento em uma posição \mathbf{x} à potência incidente em uma direção ω como

$$W_e(\mathbf{x}, \omega) = \frac{dS(\mathbf{x}, \omega)}{d\Phi(\mathbf{x} \leftarrow \omega)}.$$

E, como a unidade de S varia de acordo com o instrumento, a unidade de W_e é a unidade de S por Watt.

Com a definição de W_e podemos relacionar a resposta total S de um sensor com a radiância incidente. Sabendo que

$$\begin{aligned} dS(\mathbf{x}, \omega) &= W_e(\mathbf{x}, \omega) d\Phi(\mathbf{x} \leftarrow \omega) \\ &= W_e(\mathbf{x}, \omega) L(\mathbf{x} \leftarrow \omega) (N_{\mathbf{x}} \cdot \omega) d\omega dA_{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

ao integrarmos sobre o hemisfério por toda a extensão A do instrumento, temos a resposta total do instrumento

$$S = \int_A \int_{\mathcal{H}^2} W_e(\mathbf{x}, \omega) L(\mathbf{x} \leftarrow \omega) (N_{\mathbf{x}} \cdot \omega) d\omega dA_{\mathbf{x}}, \quad (2-9)$$

chamada de *equação de medição* (Nicodemus 78). Note que, seguindo com a nossa convenção, estamos omitindo uma dependência do comprimento de onda observada na resposta da maioria dos instrumentos.

2.5.1

Medição e câmeras

Para encerrar o capítulo, vamos discutir em detalhe como a equação de medição se aplica à formação de imagens por uma câmera.

Abstraindo a geometria da câmera, temos um plano \mathcal{P} onde se encontram os fotossensores e a luz atinge \mathcal{P} somente a partir de uma abertura \mathcal{A} , ou seja, a região do plano da imagem onde estão os fotossensores está envolta por uma

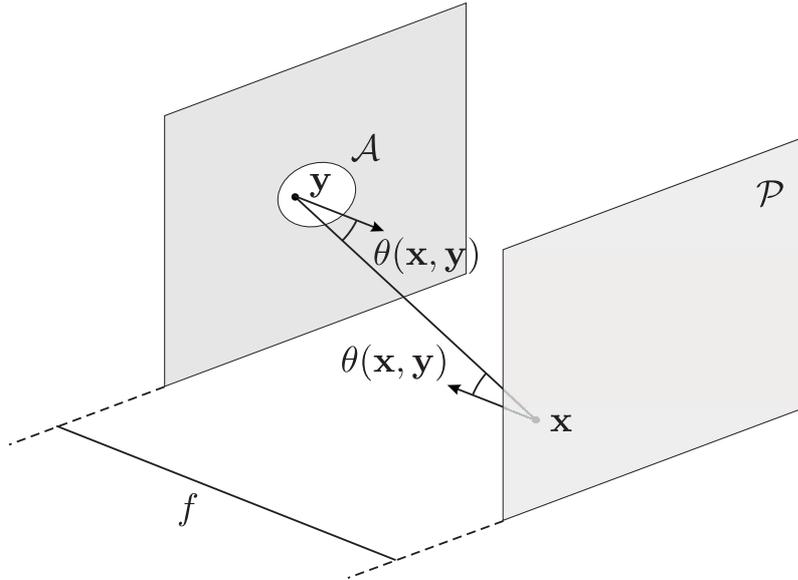


Figura 2.4: Geometria de uma câmera

superfície não emissora e com refletância zero, por onde há apenas um buraco correspondendo à abertura \mathcal{A} (é claro que essa geometria da câmera é artificial e não interage com a distribuição de radiância no resto do ambiente).

Vamos assumir que a responsividade de um sensor independe da direção, isto é, $W_e(\mathbf{x}, \omega) = h(\mathbf{x})$. Com isso, a equação de medição escreve-se como:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\mathcal{P}} h(\mathbf{x}) \int_{\mathcal{H}^2} L(\mathbf{x} \leftarrow \omega) (N_{\mathbf{x}} \cdot \omega) d\omega dA_{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\mathcal{P}} h(\mathbf{x}) E(\mathbf{x}) dA_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (2-10)$$

Esquecendo o filtro espacial h por um instante, vamos nos concentrar na irradiância $E(\mathbf{x})$:

$$E(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{H}^2} L(\mathbf{x} \leftarrow \omega) (N_{\mathbf{x}} \cdot \omega) d\omega.$$

Como a radiância é zero nas direções fora da projeção da abertura sobre o hemisfério acima do ponto \mathbf{x} , é mais natural trocarmos o domínio de integração para a superfície da abertura:

$$E(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{A}} L(\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{y}) \frac{\cos \theta_i \cos \theta_r}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} dA_{\mathbf{y}}$$

onde $\cos \theta_i = N_{\mathbf{x}} \cdot \widehat{\mathbf{y} - \mathbf{x}}$ e $\cos \theta_r = N_{\mathbf{y}} \cdot \widehat{\mathbf{x} - \mathbf{y}}$, como no termo $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ na formulação por área da equação do transporte da luz.

Vamos então assumir que a abertura está localizada sobre um plano paralelo ao plano de formação da imagem e a uma distância f (Figura 2.4). Com essa simplificação, $\theta_i = \theta_r = \theta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = f / \cos \theta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e, portanto,

$$E(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{A}} L(\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{y}) \frac{\cos^4 \theta(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{f^2} dA_{\mathbf{y}} \quad (2-11)$$

Fazendo a hipótese adicional de que a abertura determina um ângulo sólido pequeno quando vista de \mathbf{x} , podemos considerar a radiância e o ângulo $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ constantes no cone de direções em que estamos integrando. Fixando $L(\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{y}) = L(\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{y}_0)$ e $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)$, onde \mathbf{y}_0 é um ponto qualquer sobre a abertura, a irradiância no ponto \mathbf{x} escreve-se como

$$E(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{y}_0) \frac{\cos^4 \theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)}{f^2} \int_{\mathcal{A}} dA_{\mathbf{y}},$$

onde a integral é, evidentemente, a área da abertura. Supondo uma abertura circular de diâmetro d e escolhendo \mathbf{y}_0 como o ponto C no centro da abertura:

$$E(\mathbf{x}) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{f} \right)^2 \cos^4 \theta(\mathbf{x}, C) L(\mathbf{x} \leftarrow C). \quad (2-12)$$

Note que o fator $\cos^4 \theta$ corresponde a um escurecimento que cresce radialmente a partir da interseção do plano da imagem com o eixo ótico. Esse efeito indesejável pode ser facilmente cancelado introduzindo-se um fator $1/\cos^4 \theta$ no filtro espacial (é claro que o fator não precisa ser incluído explicitamente, basta não multiplicar a radiância por $\cos^4 \theta$). Em câmeras reais tenta-se eliminar esse efeito pela construção do sistema de lentes.

A última aproximação que fizemos nos fornece a conhecida câmera de furo¹. Embutindo no filtro espacial os fatores antes da radiância em (2-12), a equação de medição para uma câmera de furo fica:

$$S = \int_{\mathcal{P}} h(\mathbf{x}) L(\mathbf{x} \leftarrow C) dA_{\mathbf{x}}. \quad (2-13)$$

Evidentemente, em casos onde a aproximação para câmeras de furo não é válida podemos ainda usar a equação (2-11) para a irradiância na equação de medição.

Note que a expressão (2-13) é a mesma encontrada usualmente como a formulação do valor de um pixel. Normalmente, o problema da formação de imagens é formulado sob o ponto de vista de processamento de sinais, onde estamos querendo uma representação através de um conjunto finito de amostras que represente com o máximo de fidelidade a função $L(\mathbf{x} \leftarrow C)$ de radiância incidente sobre o plano da imagem. Se estivermos simulando uma câmera real onde o filtro espacial h é conhecido, o que raramente é verdade, podemos integrar diretamente a função supondo que h é dada. Caso contrário, temos a liberdade para escolher o filtro mais apropriado para amostrar S . De qualquer forma, uma vez fixado o filtro espacial, os dois problemas são o

¹Em inglês, *pinhole camera*.

mesmo.

Como observação final, note que, com o modelo que apresentamos, estamos supondo que o sinal de saída dos sensores está sendo lido diretamente em cada instante. Na realidade, a imagem que é gravada por uma câmera também depende do tempo de exposição. Há ainda uma integral ao longo do tempo em que o obturador permanece aberto, e a energia incidente em cada instante é função da geometria e do movimento do obturador. Mas, como só estamos considerando cenas estáticas, a irradiância incidente é constante e, supondo que o obturador se abre instantaneamente, permanece um certo tempo aberto e, em seguida, se fecha também instantaneamente, essa exposição é simplesmente o produto da irradiância pelo tempo de exposição. E, mais ainda, o valor final que vemos em uma uma imagem, como uma fotografia, é em geral um mapeamento não linear dessa exposição. Para podermos ver as imagens que estamos simulando, nós também temos que fazer esse tipo de mapeamento para adequar a faixa de valores de radiância que são simulados, que pode ser arbitrariamente grande, à faixa de valores que podem ser exibidos por um monitor, por exemplo. Está além do escopo desta dissertação discutir como fazer esse tipo de mapeamento de maneira que se tenha uma resposta perceptual adequada da imagem e, portanto, para simplificar a discussão, vamos supor que as imagens são gravadas em HDR. Para mais detalhes, consulte os artigos que deram início à pesquisa nessa área, (Tumblin & Rushmeier 93), (Chiu et al. 93) e (Ward 94), como ponto de partida.