Referências Bibliográficas

[Arvo & Kirk 90] ARVO, J.; KIRK, D.. **Particle transport and image synthesis**. In: SIGGRAPH '90: PROCEEDINGS OF THE 17TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 63–66, New York, NY, USA, 1990. ACM Press. 3.3

[Arvo 95] ARVO, J.. **Analytic Methods for Simulated Light Transport**. PhD thesis, Yale University, 1995. 2.1, 2.4.3

[Blinn & Newell 76] BLINN, J. F.; NEWELL, M. E.. **Texture and reflection in computer generated images**. Commun. ACM, 19(10):542–547, 1976. 1.4

[Blinn 77] BLINN, J. F.. **Models of light reflection for computer synthesized pictures**. In: SIGGRAPH '77: PROCEEDINGS OF THE 4TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 192–198, New York, NY, USA, 1977. ACM Press. 2.2.5

[Blinn 78] BLINN, J. F.. **Simulation of wrinkled surfaces**. In: SIGGRAPH '78: PROCEEDINGS OF THE 5TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 286–292, New York, NY, USA, 1978. ACM Press. 1.4

[Buffon 1777] COMTE DE BUFFON, G.-L. L.. **Essai d'arithmétique morale, Supplément à l'Historie Naturelle, Vol. 4**. 1777. A.2

[Catmull 74] CATMULL, E. E.. **A subdivision algorithm for computer display of curved surfaces**. PhD thesis, 1974. 1.4

[Chandrasekhar 60] CHANDRASEKHAR, S.. **Radiative Transfer**. Dover Publications, New York, NY, 1960. 2.2.3

[Chen et al. 91] CHEN, S. E.; RUSHMEIER, H. E.; MILLER, G. ; TURNER, D.. **A progressive multi-pass method for global illumination**. In: SIGGRAPH '91: PROCEEDINGS OF THE 18TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 165–174, New York, NY, USA, 1991. ACM Press. 1.4

[Chiu et al. 93] CHIU, K.; HERF, M.; SHIRLEY, P.; SWAMY, S.; WANG, C. ; ZIMMERMAN, K.. **Spatially Nonuniform Scaling Functions for High Contrast Images**. In: PROCEEDINGS OF GRAPHICS INTERFACE '93, p. 245–253, San Francisco, CA, 1993. Morgan Kaufmann. 2.5.1

[Cohen & Wallace 93] COHEN, M. F.; WALLACE, J. R.. **Radiosity and Realistic Image Synthesis**. Academic Press Professional, Boston, MA, 1993. 2.4.2

[Cook & Torrance 81] COOK, R. L.; TORRANCE, K. E.. **A reflectance model for computer graphics**. In: SIGGRAPH '81: PROCEEDINGS OF THE 8TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 307–316, New York, NY, USA, 1981. ACM Press. 2.2.5

[Cook et al. 84] COOK, R. L.; PORTER, T. ; CARPENTER, L.. **Distributed ray tracing**. In: SIGGRAPH '84: PROCEEDINGS OF THE 11TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 137–145, New York, NY, USA, 1984. ACM Press. 1.4

[Dana et al. 99] DANA, K. J.; VAN GINNEKEN, B.; NAYAR, S. K. ; KOENDERINK, J. J.. **Reflectance and texture of real-world surfaces**. ACM Trans. Graph., 18(1):1–34, 1999. 2.2.5

[Glassner 89] GLASSNER, A. S.. **Introduction to Ray Tracing**. Academic Press, New York, NY, 1989. 4.2

[Glassner 94] GLASSNER, A. S.. **A model for fluorescence and phosphorescence**. In: PROCEEDINGS FIFTH EUROGRAPHICS WORKSHOP ON RENDERING, p. 57–68. Springer-Verlag, June 1994. 2.2

[Glassner 95] GLASSNER, A. S.. **Principles of Digital Image Synthesis**. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 1995. 2.1

[Goral et al. 84] GORAL, C. M.; TORRANCE, K. E.; GREENBERG, D. P. ; BATTAILE, B.. **Modeling the interaction of light between diffuse surfaces**. In: SIGGRAPH '84: PROCEEDINGS OF THE 11TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 213–222, New York, NY, USA, 1984. ACM Press. 1.4, 2.4.2

[Gouraud 71] GOURAUD, H.. **Continuous shading of curved surfaces**. IEEE Transactions on Computers, 20(6):623–629, June 1971. 1.4

[Greenberg et al. 97] GREENBERG, D. P.; TORRANCE, K. E.; SHIRLEY, P.; ARVO, J.; LAFORTUNE, E.; FERWERDA, J. A.; WALTER, B.; TRUMBORE, B.; PATTANAIK, S. ; FOO, S.-C.. **A framework for realistic image synthesis**. In: SIGGRAPH '97: PROCEEDINGS OF THE 24TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 477–494, New York, NY, USA, 1997. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co. 2.2.5

[Hammersley & Handscomb 64] HAMMERSLEY, J. M.; HANDSCOMB, D. C.. **Monte Carlo Methods**. Methuen & Co, London, 1964. A.4

[Hanrahan & Krueger 93] HANRAHAN, P.; KRUEGER, W.. **Reflection from layered surfaces due to subsurface scattering**. In: SIGGRAPH '93: PROCEEDINGS OF THE 20TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 165–174, New York, NY, USA, 1993. ACM Press. 2.2

[He et al. 91] HE, X. D.; TORRANCE, K. E.; SILLION, F. X. ; GREENBERG, D. P.. **A comprehensive physical model for light reflection**. In: SIGGRAPH '91: PROCEEDINGS OF THE 18TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 175–186, New York, NY, USA, 1991. ACM Press. 2.2.5

[Jensen 01] JENSEN, H. W.. **Realistic image synthesis using photon mapping**. A. K. Peters, Ltd., Natick, MA, USA, 2001. 1.4

[Jensen et al. 01] JENSEN, H. W.; MARSCHNER, S. R.; LEVOY, M. ; HANRAHAN, P.. **A practical model for subsurface light transport**. In: SIGGRAPH '01: PROCEEDINGS OF THE 28TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 511–518, New York, NY, USA, 2001. ACM Press. 2.2

[Jensen & Buhler 02] JENSEN, H. W.; BUHLER, J.. **A rapid hierarchical rendering technique for translucent materials**. In: SIGGRAPH '02: PROCEEDINGS OF THE 29TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 576–581, New York, NY, USA, 2002. ACM Press. 2.2

[Kajiya 85] KAJIYA, J. T.. **Anisotropic reflection models**. In: SIGGRAPH '85: PROCEEDINGS OF THE 12TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 15–21, New York, NY, USA, 1985. ACM Press. 2.2.5

[Kajiya 86] KAJIYA, J. T.. **The rendering equation**. In: SIGGRAPH '86: PROCEEDINGS OF THE 13TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 143–150, New York, NY, USA, 1986. ACM Press. 1.4, 2.4, 3.2, 3.4

[Kalos & Whitlock 86] KALOS, M. H.; WHITLOCK, P. A.. **Monte Carlo methods. Vol. 1: basics**. Wiley-Interscience, New York, NY, USA, 1986. A.4

[Kirk & Arvo 88] KIRK, D.; ARVO, J.. **The ray tracing kernel**. In: PROC. OF AUSGRAPH '88, p. 75–82, Melbourne, Australia, 1988. 4.2

[Kolb et al. 95] KOLB, C.; MITCHELL, D. ; HANRAHAN, P.. **A realistic camera model for computer graphics**. In: SIGGRAPH '95: PROCEEDINGS OF THE 22ND ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 317–324, New York, NY, USA, 1995. ACM Press. 4.1

[Lafortune & Willems 93] LAFORTUNE, E. P.; WILLEMS, Y. D.. **Bi-directional Path Tracing**. In: Santo, H. P., editor, PROCEEDINGS OF THIRD INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL GRAPHICS AND VISUALIZATION TECHNIQUES (COMPUGRAPHICS '93), p. 145–153, Alvor, Portugal, 1993. 1.4, 3.4

[Lawrence et al. 04] LAWRENCE, J.; RUSINKIEWICZ, S. ; RAMAMOORTHI, R.. **Efficient brdf importance sampling using a factored representation**. ACM Trans. Graph., 23(3):496–505, 2004. 3.2

[Lewis & Miller 84] LEWIS, E. E.; MILLER, JR, W. F.. **Computational Methods of Neutron Transport**. John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 1984. 2.4

[Matusik 03] MATUSIK, W.; PFISTER, H.; BRAND, M. ; MCMILLAN, L.. **A data-driven reflectance model**. ACM Trans. Graph., 22(3):759–769, 2003. 2.2.5

[Nicodemus 76] NICODEMUS, F. E.. **Self-Study Manual on Optical Radiation Measurements: Part I – Concepts, Chapters 1 to 3**. Technical Note 910-1, National Bureau of Standards (US), March 1976. 2.1

[Nicodemus 77] NICODEMUS, F. E.; RICHMOND, J. C.; HSIA, J. J.; GINSBERG, I. W. ; LIMPERIS, T.. **Geometric Considerations and Nomenclature for Reflectance**. Monograph 161, National Bureau of Standards (US), October 1977. 2.2

[Nicodemus 78] NICODEMUS, F. E.. **Self-Study Manual on Optical Radiation Measurements: Part I – Concepts, Chapters 4 and 5**. Technical Note 910-2, National Bureau of Standards (US), February 1978. 2.1, 2.5

[Oren & Nayar 94] OREN, M.; NAYAR, S. K.. **Generalization of lambert's reflectance model**. In: SIGGRAPH '94: PROCEEDINGS OF THE 21ST ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 239–246, New York, NY, USA, 1994. ACM Press. 2.2.5

[Phong 75] PHONG, B. T.. **Illumination for computer generated pictures**. Commun. ACM, 18(6):311–317, 1975. 1.4, 2.2.5

[Poulin & Fournier 90] POULIN, P.; FOURNIER, A.. **A model for anisotropic reflection**. In: SIGGRAPH '90: PROCEEDINGS OF THE 17TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 273–282, New York, NY, USA, 1990. ACM Press. 2.2.5

[Press et al. 92] PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. ; FLANNERY, B. P.. **Numerical recipes in C (2nd ed.): the art of scientific computing**. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1992. A.1

[Renderman 99] APODACA, A. A.; GRITZ, L.. **Advanced RenderMan: Creating CGI for Motion Pictures**. Morgan Kaufmann, San Francisco, 1999. 4.2

[Rubinstein 81] RUBINSTEIN, R. Y.. **Simulation and the Monte Carlo Method**. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1981. A.4

[Shirley et al. 96] SHIRLEY, P.; WANG, C. ; ZIMMERMAN, K.. **Monte carlo techniques for direct lighting calculations**. ACM Trans. Graph., 15(1):1–36, 1996. 1.4

[Sillion & Puech 89] SILLION, F.; PUECH, C.. **A general two-pass method integrating specular and diffuse reflection**. In: SIGGRAPH '89: PROCEEDINGS OF THE 16TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 335–344, New York, NY, USA, 1989. ACM Press. 1.4

[Sillion & Puech 94] SILLION, F. X.; PUECH, C.. **Radiosity and Global Illumination**. Morgan Kaufmann, San Francisco, CA, 1994. 2.4.2

[Torrance & Sparrow 67] TORRANCE, K. E.; SPARROW, E. M.. **Theory for off-specular reflection from roughened surfaces**. Journal of the Optical Society of America, 57(9):1105–1114, September 1967. 2.2.5

[Traub & Werschulz] TRAUB, J. F.; WERSCHULZ, A. G.. **Complexity and Information**. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998. A.1

[Tumblin & Rushmeier 93] TUMBLIN, J.; RUSHMEIER, H.. **Tone reproduction for realistic images**. IEEE Comput. Graph. Appl., 13(6):42–48, 1993. 2.5.1

[Turing 50] TURING, A. M.. **Computing machinery and intelligence**. Mind, vol. LIX(no. 236):433–460, October 1950. 1

[Veach & Guibas 94] VEACH, E.; GUIBAS, L.. **Bidirectional estimators for light transport**. In: EUROGRAPHICS RENDERING WORKSHOP 1994 PROCEEDINGS, p. 147–162, June 1994. 1.4, 3.4

[Veach & Guibas 95] VEACH, E.; GUIBAS, L. J.. **Optimally combining sampling techniques for monte carlo rendering**. In: SIGGRAPH '95: PROCEEDINGS OF THE 22ND ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 419–428, New York, NY, USA, 1995. ACM Press. 1.4, 3.2

[Veach 98] VEACH, E.. **Robust monte carlo methods for light transport simulation**. PhD thesis, Stanford University, Department of Computer Science, 1997. Adviser-Leonidas J. Guibas. 2.1, 2.2.3, 2.4.3

[Wallace et al. 87] WALLACE, J. R.; COHEN, M. F. ; GREENBERG, D. P.. **A two-pass solution to the rendering equation: A synthesis of ray tracing and radiosity methods**. In: SIGGRAPH '87: PROCEEDINGS OF THE 14TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 311–320, New York, NY, USA, 1987. ACM Press. 1.4

[Ward 92] WARD, G. J.. **Measuring and modeling anisotropic reflection**. In: SIGGRAPH '92: PROCEEDINGS OF THE 19TH ANNUAL CONFERENCE ON COMPUTER GRAPHICS AND INTERACTIVE TECHNIQUES, p. 265–272, New York, NY, USA, 1992. ACM Press. 2.2.5

[Ward 94] WARD, G.. **A contrast-based scalefactor for luminance display**. p. 415–421, 1994. 2.5.1

[Whitted 80] WHITTED, T.. **An improved illumination model for shaded display**. Commun. ACM, 23(6):343–349, 1980. 1.4

A
Integração de Monte Carlo

A.1
Quadratura determinística

Quando queremos resolver numericamente uma integral

$$I = \int_a^b f(x)dx, \tag{A-1}$$

uma possibilidade é aproximá-la pela integral de uma outra função mais simples cuja integral seja conhecida analiticamente, como polinômios, onde podemos aplicar o teorema fundamental do cálculo. Essa é a idéia por trás dos métodos clássicos de quadratura, como o método dos trapézios e o método de Simpson (Press et al. 92), dois exemplos da família de métodos classificados como fórmulas de Newton-Cotes.

Mais geralmente, as regras de quadratura são somas da forma

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i), \tag{A-2}$$

que exigem a avaliação da função f em n pontos de seu domínio. Uma vez satisfeitas certas condições de suavidade, a taxa de convergência desses métodos é tipicamente de $O(n^{-r})$ para algum inteiro $r > 1$.

Para funções a várias variáveis, a situação se complica significativamente. Em primeiro lugar, enquanto o domínio de integração no caso unidimensional é simplesmente um intervalo, no caso multidimensional, ele pode assumir formas bem mais complicadas. Em segundo lugar, embora as regras de quadratura possam ser estendidas para funções a mais de uma variável, além de exigirem condições de suavidade que freqüentemente não são satisfeitas na prática, em um domínio d-dimensional, o número de amostras necessárias para que se obtenha o erro equivalente ao caso unidimensional com n amostras cresce com a d-ésima potência de n. Com isso, a eficiência passa a diminur exponencialmente com o crescimento de d, pois agora temos uma convergência de $O(n^{-r/d})$.

E, mais ainda, embora as extensões das regras de quadratura para o caso multidimensional evidentemente não esgotem os algoritmos para integração numérica multidimensional, foi provado que todas as regras determinísticas de quadratura também sofrem o mesmo problema de dependência da dimensão, ou seja, esse impasse não é simplesmente uma conseqüência da falta de algoritmos melhores, mas de uma característica intrínseca ao problema. Consulte (Traub & Werschulz) para uma discussão mais formal sobre a teoria da complexidade para problemas como o da integração numérica, onde a entrada dos algoritmos (um conjunto finito de amostras da função, no caso da integração) é uma informação parcial que não especifica unicamente uma instância do problema.

Esses resultados pessimistas servem como motivação para o uso de uma classe completamente distinta de algoritmos não determinísticos baseados em amostragem aleatória.

A.2 Um breve histórico

Métodos numéricos que fazem uso de amostragem aleatória são classificados como *métodos de Monte Carlo*, em referência ao célebre cassino do Principado de Mônaco. O exemplo mais antigo que se conhece do emprego de técnicas com essa natureza é o famoso experimento da agulha feito pelo Conde de Buffon (Buffon 1777): jogando várias vezes uma agulha de comprimento L sobre o chão, formado por tábuas de largura d, ele queria determinar a probabilidade P de a agulha atingir uma das linhas paralelas formadas na junção das tábuas. Analisando o problema, também mostrou que a probabilidade era

$$P = \frac{2L}{\pi d}.$$

Anos mais tarde, em uma sugestão de Laplace, esse resultado foi apontado como um experimento que poderia ser usado para calcular o valor de π.

Apesar dessa e de outras aparições isoladas de amostragem aleatória na solução de problemas numéricos, os chamados métodos de Monte Carlo só foram realmente desenvolvidos e popularizados logo após o fim da Segunda Guerra Mundial, quando cientistas como Stanislaw Ulam, John Von Neumann e Nicholas Metropolis se reuniram em Los Alamos para o projeto da bomba de hidrogênio. Motivados pela construção do primeiro computador eletrônico nos Estados Unidos, o ENIAC, eles usaram técnicas de amostragem aleatória para calcular a trajetória de nêutrons.

A.3 Integração de Monte Carlo

Embora métodos de Monte Carlo englobem uma família bem mais geral de algoritmos, nós estamos apenas interessados na classe mais restrita de métodos de Monte Carlo usados para fazer integração numérica. Então vejamos como podemos usar amostragem aleatória para resolver o nosso problema de integração unidimensional (equação A-1).

Uma alternativa às regras de quadratura é calcular o valor médio de f no intervalo $[a, b]$ e multiplicar o resultado pelo comprimento do intervalo, pois

$$\overline{I} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \frac{I}{b-a}.$$

Gerando n amostras independentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$, a média de f pode ser estimada pela média das amostras, o que nos leva ao seguinte estimador para a integral:

$$I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Na média, esse estimador nos dá o resultado correto, já que seu valor esperado é

$$\begin{aligned}
E[I_n] &= E\left[\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right] \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} E[f(x_i)] \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} E[f(x)] \\
&= \frac{b-a}{n} nE[f(x)] \\
&= (b-a)E[f(x)] \\
&= (b-a) \int_a^b f(x) \frac{1}{b-a} dx \\
&= I.
\end{aligned}$$

Mais formalmente, a convergência (em um sentido probabilístico) é garantida pela *lei dos grandes números*, que nos diz que

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = E[f(x)]\right) = 1$$

Note que, mesmo que a variância do estimador não exista, a convergência ainda é garantida, embora mais lentamente.

Assumindo que a variância existe, podemos usar a desigualdade de Chebychev para calcular o erro do estimador (novamente, em um sentido probabilístico). Usando o fato que $E[I_n] = I$,

$$P\left(|I_n - I| \geq \sqrt{\frac{V[I_n]}{\delta}}\right) \leq \delta,$$

onde δ é um número real positivo arbitrário. E como

$$\begin{aligned}
V[I_n] &= V\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right] \\
&= \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V[f(x_i)] \\
&= \frac{(b-a)^2}{n^2} nV[f(x)] \\
&= \frac{(b-a)^2}{n} V[f(x)] \\
&= \frac{(b-a)^2}{n}\left(\int_a^b f(x)^2 \frac{1}{b-a} dx - \frac{I^2}{(b-a)^2}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left((b-a)\int_a^b f(x)^2 dx - I^2\right), \qquad \text{(A-3)}
\end{aligned}$$

temos que

$$P\left(|I_n - I| \geq \frac{b-a}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{V[f(x)]}{\delta}}\right) \leq \delta.$$

Ou seja, uma vez fixado um valor para δ, o erro decresce com $\sqrt{n}$. Mais informalmente, escolhendo um valor bem pequeno para δ, à medida que tomamos um número maior de amostras estamos estreitando a faixa de valores que I_n provavelmente deve assumir.

Embora o estimador nos forneça o resultado correto quando as amostras são geradas com uma distribuição uniforme, a equação A-3 nos dá uma indicação de que podemos fazer melhor e diminuir a variância caso as amostras sejam geradas com uma distribuição mais apropriada. Isto é, gerando n amostras independentes $x_1, \ldots, x_n$ segundo uma função de densidade p e usando o estimador

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{p(x_i)}$$

para a integral, o valor esperado é ainda o valor correto

$$\begin{aligned} E[I_n] &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)}{p(x_i)}\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[\frac{f(x_i)}{p(x_i)}\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[\frac{f(x)}{p(x)}\right] \\ &= E\left[\frac{f(x)}{p(x)}\right] \\ &= \int \frac{f(x)}{p(x)}p(x)dx \\ &= \int f(x)dx \\ &= I. \end{aligned}$$

Nesse caso, a variância é

$$\begin{aligned} V[I_n] &= V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)}{p(x_i)}\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V\left[\frac{f(x)}{p(x)}\right] \\ &= \frac{1}{n}V\left[\frac{f(x)}{p(x)}\right] \\ &= \frac{1}{n}\left(E\left[\left(\frac{f(x)}{p(x)}\right)^2\right] - E\left[\frac{f(x)}{p(x)}\right]^2\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\int\left(\frac{f(x)}{p(x)}\right)^2 p(x)dx - I^2\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\int\frac{f(x)^2}{p(x)}dx - I^2\right), \end{aligned} \tag{A-4}$$

o que nos diz que uma escolha correta da função de densidade p pode reduzir significativamente o erro.

As vantagens principais da integração de Monte Carlo em relação aos métodos determinístico são, em primeiro lugar, que, sem fazer qualquer hipótese sobre a suavidade do integrando, a integração de Monte Carlo estende-se naturalmente a funções com mais de uma variável mantendo a mesma convergência de $O(n^{-1/2})$. Para isso, basta que se utilize uma função de densidade de probabilidade com a dimensão correspondente para a geração das amostras. Outra vantagem marcante é a simplicidade, pois, para usar o método, precisamos simplesmente saber gerar amostras aleatórias e avaliar a função f no ponto amostrado. Isso é altamente desejável do ponto de vista de uma implementação orientada a objetos, pois significa que temos uma interface bem definida para esses estimadores.

A.4 Técnicas de redução da variância

Na seção anterior, vimos que uma escolha apropriada da função de densidade p pode reduzir significativamente o erro do estimador. A distribuição ótima ocorre quando p é da forma $p(x) = \lambda f(x)$, onde

$$\lambda = \frac{1}{\int f(x)dx},$$

quando o estimador tem variância zero, já que

$$I_n = \frac{f(x)}{\lambda f(x)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Evidentemente, não podemos usar esse estimador, já que exige o conhecimento de I, que é justamente o que estamos querendo calcular e nos trouxe até aqui! Na prática, esse estimador ótimo indica que as amostras devem ser geradas com um estimador que tenha mais ou menos o mesmo “formato” do integrando, princípio conhecido como *amostragem por importância*. Em computação gráfica, esse princípio é especialmente útil, pois é comum termos no integrando BRDFs com direções de alta especularidade, ou um pequeno ângulo sólido onde a radiância incidente é bem mais forte devido à presença de uma fonte de luz. Segundo o princípio da amostragem por importância, devemos usar distribuições que priorizem a geração de amostras nessas direções.

Uma outra técnica para a redução da variância é a *estratificação*. Na estratificação, o domínio de integração é particionado em vários subdomínios e a integral é avaliada separadamente em cada subdomínio por integração de Monte Carlo, geralmente com, no máximo, uma amostra por domínio. Pode-se mostrar que a variância em uma amostragem estratificada nunca é pior que a do estimador não estratificado.

Existem várias outras técnicas de redução da variância, embora as duas mencionadas sejam de longe as mais aplicadas em computação gráfica. Para outras técnicas de redução de variância, assim como boas referências para métodos de Monte Carlo, consulte (Kalos & Whitlock 86), (Rubinstein 81) e (Hammersley & Handscomb 64).

B
Exemplos de Descrição de Cena

```
Display happy_buddha.exr exr
Resolution 512 512
PixelSampler JITTER 25
PixelFilter BOX 1 1

Pinhole 278 273 -800 278 273 -799 0 1 0 -0.0125 0.0125 -0.0125 0.0125 0.035
Background 0 0 0

BeginScene PATHTRACER

# Floor
    Lambert 0.75 0.75 0.75
    Triangle 552.8 0.0 0.0  0.0 0.0 0.0  552.8 0.0 559.2
    Triangle 0.0 0.0 0.0  0.0 0.0 559.2 552.8 0.0 559.2

# Ceiling
    Triangle 552.8 548.8 0.0  552.8 548.8 559.2 0.0 548.8 0.0
    Triangle 0.0 548.8 0.0  552.8 548.8 559.2  0.0 548.8 559.2

# Back wall
    Triangle 552.8 0.0 559.2  0.0 0.0 559.2  0.0 548.8 559.2
    Triangle 552.8 0.0 559.2  0.0 548.8 559.2  552.8 548.8 559.2

# Left wall (Red)
    Lambert 0.6 0.05 0.05
    Triangle 552.8 0.0 0.0  552.8 0.0 559.2 552.8 548.8 559.2
    Triangle 552.8 0.0 0.0  552.8 548.8 559.2  552.8 548.8 0.0

# Right wall (Green)
    Lambert 0.1 0.4 0.1
    Triangle 0.0 0.0 559.2  0.0 0.0 0.0 0.0 552.8 0.0
```

```
    Triangle 0.0 0.0 559.2  0.0 552.8 0.0  0.0 552.8 559.2

# Happy Buddha
    Lambert 0.75 0.75 0.75
    PushTransform
    Translate 200 0 300
    Scale 2000 2000 2000
    Rotate 180 0 1 0
    Translate 0 -0.049 0
    Mesh "happy_buddha.ply"
    PopTransform

# Light
    DiffuseEmitter 1 1 1
    Triangle 343.0 548.5 227.0  343.0 548.5 332.0  213.0 548.5 227.0
    Triangle 213.0 548.5 227.0  343.0 548.5 332.0  213.0 548.5 332.0

EndScene
```

```
Display bunny.exr exr
Resolution 512 512
PixelSampler NROOKS 10
PixelFilter TRIANGLE 2 2

Pinhole 278 273 -800 278 273 -799 0 1 0 -0.0125 0.0125 -0.0125 0.0125 0.035
Background 0 0 0

BeginScene PATHTRACER

# Floor
    Lambert 0.75 0.75 0.75
    Triangle 552.8 0.0 0.0  0.0 0.0 0.0  552.8 0.0 559.2
    Triangle 0.0 0.0 0.0  0.0 0.0 559.2 552.8 0.0 559.2

# Ceiling
    Triangle 552.8 548.8 0.0  552.8 548.8 559.2 0.0 548.8 0.0
    Triangle 0.0 548.8 0.0  552.8 548.8 559.2  0.0 548.8 559.2

# Back wall
    Triangle 552.8 0.0 559.2  0.0 0.0 559.2  0.0 548.8 559.2
    Triangle 552.8 0.0 559.2  0.0 548.8 559.2  552.8 548.8 559.2

# Left wall (Red)
    Lambert 0.6 0.05 0.05
    Triangle 552.8 0.0 0.0  552.8 0.0 559.2 552.8 548.8 559.2
    Triangle 552.8 0.0 0.0  552.8 548.8 559.2  552.8 548.8 0.0

# Right wall (Green)
    Lambert 0.1 0.4 0.1
    Triangle 0.0 0.0 559.2  0.0 0.0 0.0 0.0 552.8 0.0
    Triangle 0.0 0.0 559.2  0.0 552.8 0.0  0.0 552.8 559.2

# Stanford Bunny
    Phong 0.1 0.1 0.1 0.75 0.75 0.75 50
    PushTransform
    Translate 200 0 300
    Scale 2000 2000 2000
    Rotate 180 0 1 0
```

```
    Translate 0 -0.0329874 0
    Mesh "bunny.ply"
    PopTransform

# Light
    DiffuseEmitter 1 1 1
    Triangle 343.0 548.5 227.0  343.0 548.5 332.0  213.0 548.5 227.0
    Triangle 213.0 548.5 227.0  343.0 548.5 332.0  213.0 548.5 332.0

EndScene
```