

3 Aglomerado Granular

Neste capítulo trataremos do comportamento de equilíbrio de um modelo simples de gás granular composto por uma única partícula e um aglomerado unidimensional de grãos [8]. Consideraremos que todos os grãos do sistema possuem mesma massa. Além disso, cabe ressaltar que usaremos a letra m para nomear o expoente da velocidade relativa entre os grãos, e que a mesma não deve ser confundida com a massa dos grãos. Analisaremos este modelo para uma grande variedade de coeficientes de restituição, r , dependentes da velocidade relativa entre os grãos. Quando esta última tende a zero, o coeficiente de restituição, r , tende a 1. Por um lado, quando $r \rightarrow 1$ (caso elástico), esperamos que o sistema se comporte como gás. Por outro, quando $v \rightarrow 0$, esperamos que o sistema “congele” e comporte-se como um aglomerado. No sentido de resolver este dilema, obteremos equações que descrevem o comportamento de longo prazo da pressão do aglomerado, da velocidade quadrática média e do espaçamento entre os grãos.

Nosso objetivo não é estudar a formação da pilha de areia estática, mas sim a estabilidade de um aglomerado granular devido, única e exclusivamente, aos efeitos dinâmicos das colisões. Portanto, não levaremos em conta nem a rugosidade e atrito de superfície, nem a aceleração da gravidade, a qual suporemos nula em nosso modelo.

3.1 Aglomerados em Sistemas Granulares

Um aspecto notável dos sistemas granulares, em especial o gás granular, é a tendência inerente à formação de aglomerados. Essa aglomeração é devido a um aumento na taxa de colisões dentro do sistema e é seguida por um resfriamento granular (redução da energia cinética). Vários trabalhos que analisam tal comportamento [9, 25, 26, 27] consideram, inicialmente, os grãos distribuídos homogeneamente e com uma certa quantidade de energia cinética. Posteriormente, ao resfriar, durante a fase de aglomeração, apresentam um comportamento conhecido como *resfriamento homogêneo* (descrito pela Lei de Haff [4] para a temperatura granular) e, para tempos mais longos, comportam-

se de forma mais complexa com as colisões tendendo a correlacionar o movimento dos grãos, via o aparecimento de vórtices.

Sabemos que aproximações hidrodinâmicas prevêm instabilidades permanentes na densidade para sistemas granulares inelásticos na ausência de gravidade [28] (para coeficientes de restituição independentes da velocidade). Já em sistemas equivalentes que apresentam coeficientes de restituição dependentes da velocidade, tais como o do modelo visco-elástico [21, 22, 29], as instabilidades são apenas transientes [30, 31]. Com isso, essa dependência que o coeficiente de restituição apresenta em relação à velocidade pode ser a causa da dissolução do aglomerado. Isso é devido ao fato de $r \rightarrow 1$ à medida que a velocidade relativa tende a zero.

Analisar o comportamento instável dos aglomerados através de técnicas numéricas pode ter um alto custo computacional se nenhuma aproximação for usada. Na maioria das simulações que usam o modelo de Dinâmica Molecular Dirigida por Eventos [7], o coeficiente de restituição é igualado a 1 quando a velocidade torna-se menor que um limite elástico, de forma que as colisões abaixo desse limite passam a ser consideradas elásticas [30, 32]. Isto não deixa de ser uma pequena “trapaça”.

Para conseguir uma descrição mais realista, devemos alcançar tempos extremamente longos e velocidades pequenas. Um modelo qualitativo de um aglomerado em 1 dimensão, com soluções assintóticas para o comportamento do sistema em tempos muito longos (ainda não acessíveis às simulações computacionais) pode ser obtido [8]. A vantagem deste modelo é seu tratamento analítico, que torna possível encontrar as soluções em $t \rightarrow \infty$.

3.2

Premissas do Modelo

Estudaremos sistemas com coeficiente de restituição dado pela forma geral [33] (quando g é próximo de zero - ver figura 3.2):

$$r = 1 - A \left(\frac{g}{g_0} \right)^m, \quad (3.1)$$

onde $0 \leq A < 1$ [31], g é a velocidade relativa inicial, g_0 é uma constante referente à escala de dissipação e $m \geq 0$. Desta forma, conseguimos uma boa aproximação para o coeficiente de restituição apenas na região onde $g \sim 0$. Os casos $m = 0$ (r independente da velocidade) e $m = 1/5$ (visco-elástico) [21, 22, 29] são casos particulares bastante conhecidos da eq.(3.1).

O sistema começa sua evolução como um gás granular dentro de um recipiente unidimensional, cujas paredes laterais são uma elástica (a da direita, por convenção) e outra inelástica (a da esquerda). O aglomerado se forma

próximo à parede inelástica, enquanto o gás fica localizado na extremidade oposta, próximo à parede elástica, após um longo intervalo de tempo [11, 34], conforme a fig.(3.1). Finalmente, o gás terá apenas um único grão. Assumimos isso no desenvolvimento do nosso modelo, embora não seja realmente essencial (os resultados poderiam ser facilmente estendidos aos sistemas de gases com vários grãos, uma vez que a energia cinética vai assintoticamente a zero, e as equações obtidas não são essencialmente diferentes).

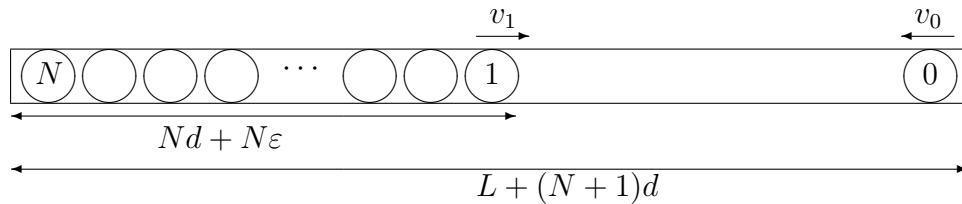


Figura 3.1: As N partículas do aglomerado e a partícula do gás. A distância média entre duas partículas consecutivas do aglomerado é ε (ausente na figura), o diâmetro de cada partícula é d e o comprimento total é $L + (N + 1)d$.

Obteremos equações de movimento para quantidades granulares dinâmicas e quase-termodinâmicas, a saber: velocidade do gás, temperatura granular do aglomerado (de fato, a média da energia cinética dos grãos) e pressão interna. Veremos que efeitos puramente dinâmicos, devidos à dissipação de energia, podem ser os responsáveis pela formação do aglomerado, mas não por sua permanência indefinidamente (exceto, novamente, pelo caso irrealista do coeficiente de restituição independente da velocidade).

Nossa aproximação, de natureza qualitativa, pode ser modelada por um sistema de esferas rígidas, lisas e idênticas, com um coeficiente de restituição r dado pela eq.(3.1). A parede elástica apresenta uma similaridade com uma parede “quente”, enquanto a parede inelástica seria uma parede “fria” [35], uma vez que a parede inelástica retira energia do sistema. Contudo, não estamos injetando nenhuma quantidade de energia no sistema e, portanto, nenhum estado estacionário se desenvolve. As colisões na parede esquerda (inelástica) são governadas pela mesma eq.(3.1), sendo essa parede considerada um “grão infinitamente massivo”.

As velocidades de dois grãos que colidem entre si são V'_1 e V'_2 após a colisão, e V_1 e V_2 antes da mesma. Dada a conservação do momento

$$V'_2 + V'_1 = V_2 + V_1,$$

e usando a definição do coeficiente de restituição

$$V'_2 - V'_1 = -r (V_2 - V_1),$$

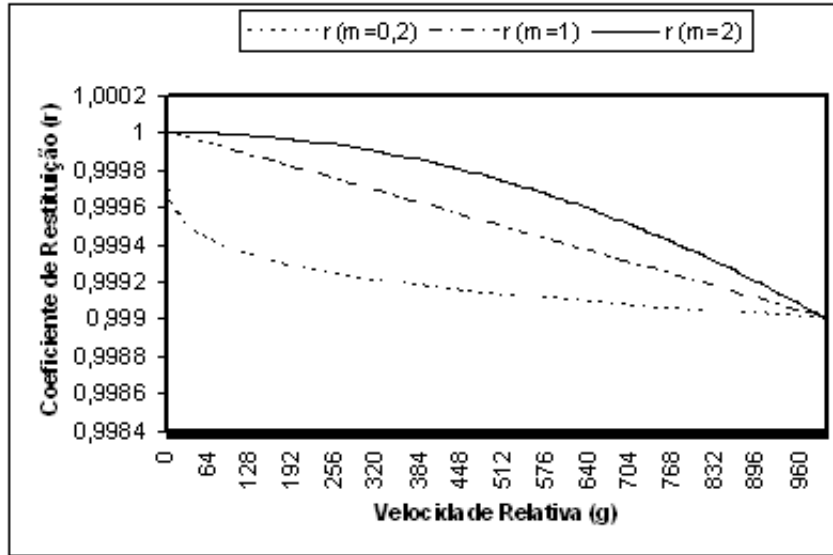


Figura 3.2: Forma geral do coeficiente de restituição para diferentes valores de m .

temos, conseqüentemente, uma relação entre as velocidades dos grãos antes e depois de uma colisão:

$$V'_1 = \left(\frac{1-r}{2}\right) V_1 + \left(\frac{1+r}{2}\right) V_2 \quad (3.2)$$

e

$$V'_2 = \left(\frac{1+r}{2}\right) V_1 + \left(\frac{1-r}{2}\right) V_2. \quad (3.3)$$

O sistema tem inicialmente uma dada quantidade de energia cinética que será dissipada devido às colisões inelásticas. Uma aglomeração parcial de grãos ocorre inicialmente na parede inelástica devido à pressão exercida pelo restante do gás [11]. A fase de aglomerado se forma enquanto as velocidades relativas ainda são relativamente grandes se comparadas a g_0 e, assim, o coeficiente de restituição é menor que 1. O gás perde partículas para o aglomerado até restar apenas uma única partícula [34].

Cabe, aqui, ressaltar a diferença entre um aglomerado e um colapso de partículas. Neste último, ocorre um número infinito de colisões entre as partículas em um espaço finito de tempo, enquanto aquele é apenas uma concentração muito densa de partículas com velocidades relativas pequenas. Em uma dimensão, a aglomeração pode preceder o colapso (para $r \approx 1$) [36].

Após um intervalo de tempo inicial, t_0 , as velocidades de todos os grãos, incluindo o aglomerado e o gás, serão muito menores que a velocidade que determina a escala de dissipação g_0 .

Em nosso modelo usamos a escala de tempo apresentada na figura 3.3. Em $t = 0$ todas as partículas do sistema encontram-se, aproximadamente, separadas de maneira uniforme umas das outras. A partir de $t = t_0^*$, o aglomerado começa a se formar até que, em $t = t_0$, ponto que as equações do modelo passam a valer, temos o aglomerado de um lado (próximo à parede inelástica) e o gás de uma única partícula do outro (próximo à parede elástica). Nas equações que seguem, omitimos a constante t_0 para simplificar a notação.

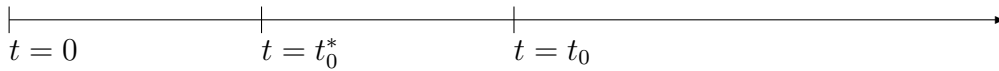


Figura 3.3: Escalas de tempo percorridas pelo sistema. Em $t = 0$, todas as partículas do sistema encontram-se igualmente espaçadas e com velocidades aproximadamente iguais. A partir de $t = t_0^*$, o aglomerado granular começa a se formar, próximo a parede inelástica. Finalmente, em $t = t_0$, a configuração inicial do nosso modelo está dada, com o aglomerado de um lado e o gás granular do outro.

Nomeamos a partícula do gás com 0 e as demais (do aglomerado) com $i = 1 \cdots N$. Assumimos que $g_0 \gg v_0 \gg v_{i=1, \dots, N}$. Embora a velocidade da partícula do gás seja muito maior que as velocidades das partículas que formam o aglomerado, o fator de escala g_0 será sempre bem maior que a velocidade da partícula do gás para tempos longos. Temos a seguinte hierarquia (somente para $m > 0$) no instante em que começamos a estudar o comportamento do sistema:

$$\left| \frac{v_i}{v_0} \right| \gg \left| \frac{v_0}{g_0} \right|^m \gg \left(\frac{v_i}{v_0} \right)^2 \gg \left(\frac{v_i}{v_0} \right) \left| \frac{v_0}{g_0} \right|^m. \quad (3.4)$$

Começamos a observar o sistema em um momento em que o gás tem uma energia bem maior que a do aglomerado. Com o passar do tempo, ambos v_0 e v_i decrescem, sendo que v_i decresce mais lentamente. Com isso, $\frac{v_i}{v_0}$ pode, eventualmente, aumentar. A hierarquia (3.4) nos diz que, para tempos suficientemente longos, $\frac{v_i}{g_0} \rightarrow 0$, e, uma vez que o gás continuará bombeando energia no aglomerado, a razão $\frac{v_i}{v_0}$ não se anulará. Esta última hipótese será verificada de maneira autoconsistente.

3.3

Equilíbrio Aglomerado-gás

Analisaremos agora, separadamente, as grandezas importantes do sistema. Detalharemos alguns passos que levam às equações principais no

apêndice A.

3.3.1 Pressão do Gás

Para calcularmos a pressão exercida pelo gás sobre o aglomerado, precisamos levar em conta a troca de momentos entre a partícula do gás e o aglomerado após cada colisão entre eles. Uma colisão aglomerado-gás é completada quando a partícula do gás deixa o aglomerado, com uma velocidade de saída que é próxima ao valor absoluto de sua velocidade antes da colisão, muito maior do que a velocidade típica das partículas do aglomerado. Isso está ilustrado na figura (3.4).

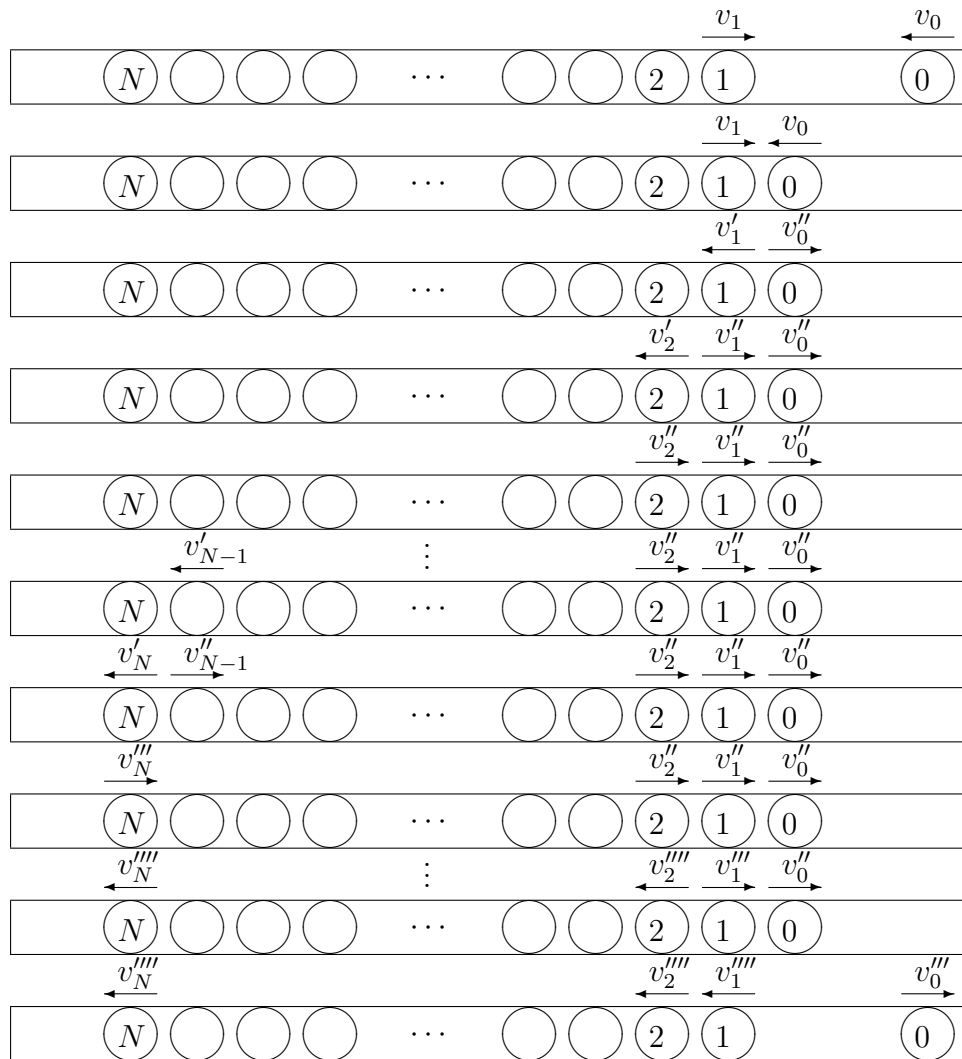


Figura 3.4: Seqüência de colisões.

Notamos que, à medida que o gás colide com o aglomerado, é como se a “partícula rápida” (gás) passasse através das partículas do aglomerado, colidisse com a parede inelástica e retornasse, inversamente pelo mesmo caminho, em direção à parede elástica. Esse processo se repete várias vezes e, com isso, obtemos o momento trocado entre o gás e o aglomerado. De acordo com o apêndice A, temos (V é a velocidade inicial da partícula do gás e é sempre positiva):

$$\dot{V} = -(2N + 1) \frac{A}{4L} \left| \frac{V}{g_0} \right|^m V^2, \quad (3.5)$$

que é a equação que governa o comportamento da velocidade do gás.

Da eq.(A.7), que dá o momento total absorvido pelo aglomerado devido à colisão com o gás, $\Delta\varphi_{aglomerado}$, obtemos a taxa de transferência de momento (pressão do gás)

$$p_{gas} = \frac{(1 + m)}{2} \dot{V} \frac{\dot{\varepsilon}}{V}, \quad (3.6)$$

onde p_{gas} é a pressão exercida pelo gás sobre o aglomerado.

Para o caso do coeficiente de restituição constante ($m = 0$), assumimos que $A < 1$ e $r = 1 - A$. Com isso, a pressão do gás fica relacionada à variação em sua velocidade, conforme a eq.(A.14):

$$p_{gas} = \frac{1 - (1 - A)^N}{1 + (1 - A)^N} \dot{V}. \quad (3.7)$$

A pressão do gás muda de regime ao passarmos do caso $m > 0$ para o caso $m = 0$. A pressão exercida pelo gás é mais fraca no primeiro caso, pois o fator \dot{V} está multiplicado por $\dot{\varepsilon}/V$ na eq.(3.6).

3.3.2

Variáveis do Aglomerado

Outras variáveis importantes do sistema devem ser analisadas. Definimos a variância da velocidade das partículas do aglomerado, σ^2 , como

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (v_i - v_{cm})^2}{N}, \quad (3.8)$$

onde a velocidade do centro de massa do aglomerado é dada por

$$v_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{N}, \quad (3.9)$$

ou seja, trata-se da média das velocidades das N partículas que constituem o aglomerado.

O espaçamento médio entre os grãos, ε , é definido (com $x_{N+1} = 0$) por

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^{N+1} |x_i - x_{i-1} - d|}{N}. \quad (3.10)$$

O tamanho total do aglomerado é, então, $N(d + \varepsilon)$. Uma aproximação razoável para a velocidade do centro de massa do aglomerado pode ser obtida assumindo-se que o mesmo expande e contrai seu tamanho uniformemente (pelo menos para ε pequeno):

$$\begin{aligned} v_{cm} &\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N i \dot{\varepsilon} \\ &\approx \frac{N(N+1)}{2N} \dot{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

No limite $N \rightarrow \infty$, a eq.(3.11) se reduz a

$$v_{cm} \approx \frac{N}{2} \dot{\varepsilon}.$$

A aceleração do centro de massa é dada, a partir da eq.(3.11), por

$$a_{cm} = \frac{N(N+1)}{2N} \ddot{\varepsilon}. \quad (3.12)$$

No limite $N \rightarrow \infty$, a eq.(3.12) se reduz a

$$a_{cm} = \frac{N}{2} \ddot{\varepsilon}.$$

A seguir chegaremos a uma equação para a evolução do espaçamento ε , onde a eq.(3.12) será desmembrada em dois termos de acordo com a Segunda Lei de Newton.

3.3.3

Pressão da Parede e Espaçamento Médio

O aglomerado sofre a pressão de duas fontes externas: o gás e a parede inelástica. Essa pressão pode ser calculada usando-se uma aproximação que assume que os momentos trocados com a partícula de índice N , em todas as colisões, são da ordem de 2σ , enquanto a taxa de colisões da mesma partícula com a parede é da ordem de σ/ε [6]. A pressão de campo médio é

$$p_{parede} = \frac{2\sigma^2}{\varepsilon} > 0. \quad (3.13)$$

A equação de evolução temporal para o espaçamento médio, ε , é obtida através da Segunda Lei de Newton, escrita para o aglomerado em uma dimensão (p_{parede} é a força positiva e p_{gas} a negativa),

$$a_{cm} = p_{parede} + p_{gas}.$$

Para o caso dependente da velocidade ($m > 0$), usando as equações

(3.6), (3.12) e (3.13), obtemos a seguinte equação de campo médio (em forma adimensional):

$$\frac{N}{2} \ddot{\varepsilon} = \frac{2\sigma^2}{\varepsilon} + \frac{(1+m)}{2} \dot{V} \frac{\dot{\varepsilon}}{V}. \quad (3.14)$$

Já para o caso independente da velocidade ($m = 0$), a equação equivalente é obtida trocando-se apenas a eq.(3.6) pela eq.(3.7),

$$\frac{N}{2} \ddot{\varepsilon} = \frac{2\sigma^2}{\varepsilon} + \frac{1 - (1-A)^N}{1 + (1-A)^N} \dot{V}. \quad (3.15)$$

Como foi visto na subseção 3.3.1, a pressão do gás é mais fraca no caso $m > 0$ devido ao fator $\dot{\varepsilon}/V$. Isto se reflete aqui (no lado direito das duas equações anteriores) e será fundamental no resultado da evolução do aglomerado nos casos estudados.

3.3.4

Dissipação de Energia Dentro do Aglomerado

Cálculos similares ao da redução da velocidade do aglomerado são desenvolvidos no apêndice B para sua energia, devido ao efeito da colisão aglomerado-gás. Até a ordem de aproximação que estabelecemos, $|V/g_0|^m$, as correções serão da ordem de $\sigma^2|V/g_0|^{2m}$ (muito menor que σ^2). A comparação entre as energias cinéticas do aglomerado, antes e após a colisão com a partícula do gás, leva a

$$\sum_i^N (v_i''')^2 \approx \sum_i^N v_i^2. \quad (3.16)$$

Ou seja, a energia cinética do aglomerado não é afetada pela colisão aglomerado-gás, na ordem de aproximação adotada. Isso nos diz que apenas as colisões internas serão importantes para o resfriamento do aglomerado neste regime.

Na aproximação de campo médio, a energia dissipada por partícula corresponde ao produto da energia perdida em cada colisão pela taxa de colisão por partícula. Para um gás unidimensional de N partículas confinado num volume livre, ℓ_{1D} , com a variância das N velocidades dada por σ^2 , a perda de energia por colisão corresponde (em termos adimensionais), conforme a eq.(A.6) a

$$\Delta v \propto -|v|^{1+m}.$$

A taxa de colisão é dada por Nv/ℓ_{1D} [6]. Logo, para calcular a taxa de dissipação de energia dentro do aglomerado, com o espaçamento entre as partículas tornando-se bem pequeno à medida que $t \rightarrow \infty$ (mas não nulo), precisamos estimar a taxa de colisões internas e multiplicá-la pela

perda de energia para cada colisão. A taxa de colisões para um aglomerado unidimensional difere da de um gás apenas pelo fato do espaçamento entre as partículas, ε , ser pequeno comparado à distância média entre as partículas de um gás. Levando isso em conta, a taxa de colisões do aglomerado será da ordem

$$q = N \frac{\sigma}{2\varepsilon}.$$

A variação da velocidade interna típica do aglomerado deve-se às colisões entre os grãos, como mostrado no apêndice B. Assumimos que as velocidades relativas dos grãos nas colisões são da ordem de σ e que as colisões quase-elásticas irão reduzir essas velocidades por uma quantidade da ordem de

$$\Delta\sigma = -A \left(\frac{\sigma}{g_0} \right)^m \sigma.$$

A mudança em σ , por unidade de tempo, é dada pelo produto $q \Delta\sigma$. Assim, obtemos a equação heurística

$$\dot{\sigma} = - \frac{NA\sigma^2}{2\varepsilon} \left(\frac{\sigma}{g_0} \right)^m. \quad (3.17)$$

A equação equivalente para $m = 0$ é

$$\dot{\sigma} \approx - \frac{\sigma^2}{\varepsilon}, \quad (3.18)$$

conforme o apêndice B.

3.4 Análise Adimensional

Em nosso estudo, analisamos o comportamento qualitativo das equações obtidas, com o objetivo de obter o comportamento assintótico no tempo das mesmas. Portanto, vamos reescrever as equações (3.5), (3.14), (3.15) e (3.17) numa forma totalmente adimensional (note que $V, \sigma, \varepsilon > 0 \forall t$).

Primeiramente, as equações para V e σ têm a mesma forma, tanto para $m > 0$ como para $m = 0$. Logo

$$\dot{V} = -V^{2+m}, \quad (3.19)$$

$$\dot{\sigma} = - \frac{\sigma^{2+m}}{\varepsilon}. \quad (3.20)$$

A equação para $\dot{\varepsilon}$, para $m = 0$, fica

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon} + \dot{V}, \quad (3.21)$$

enquanto que para $m > 0$, temos

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon} + \frac{\dot{V}}{V}\dot{\varepsilon}. \quad (3.22)$$

Para recuperarmos as unidades dimensionais, lembramos que σ e V são dados em termos de g_0 , e ε é medido em termos de L/N . Poucas constantes têm que ser usadas nas equações (3.19), (3.20), (3.21) e (3.22) para que fiquem dimensionalmente coerentes.

A eq.(3.19) pode ser resolvida exatamente, dado que esta é desacoplada das outras, e o resultado é

$$V = \frac{V_0}{[1 + (1 + m)V_0^{1+m}t]^{1/(1+m)}}. \quad (3.23)$$

Esta é a extensão da Lei de Haff [4, 21, 37, 38] para os casos descritos pela eq.(3.1). Observamos que

$$t \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad V \sim t^{-1/(1+m)} \quad \Rightarrow \quad T_g = V^2 \sim t^{-2/(1+m)}.$$

Para o caso do coeficiente de restituição independente do tempo, $m = 0$, $T_g \sim t^{-2}$. Para o coeficiente de restituição viscoelástico [22, 29, 21], $m = 1/5$, $T_g \sim t^{-5/3}$ como esperado [21, 37, 38]. As equações (3.19), (3.20), (3.21) e (3.22) constituem o sistema a ser resolvido a seguir.

3.5 Comportamento de Longo Prazo

Devemos lembrar que existe uma escala implícita de velocidade, associada às propriedades do coeficiente de restituição, g_0 , que divide as velocidades sempre que uma potência $m \neq 0$ aparece (uma consequência da forma do coeficiente de restituição). Para o caso do coeficiente constante ($m = 0$), obtemos, a partir das equações (3.20) e (3.21),

$$\dot{\varepsilon} - V + \sigma = c_0, \quad (3.24)$$

onde a constante c_0 está relacionada às condições iniciais para V , σ e $\dot{\varepsilon}$ por

$$c_0 = \dot{\varepsilon}_0 - V_0 + \sigma_0. \quad (3.25)$$

As equações que descrevem o aglomerado granular são válidas no limite quando $V \gg \sigma, \dot{\varepsilon}$. A seguir, analisaremos o comportamento do aglomerado para toda a extensão de valores de m , com base nas equações (3.19 - 3.24).

3.5.1

$$m = 0$$

Nesse caso, o coeficiente de restituição não depende do impacto relativo da velocidade. Temos

$$c_0 = \dot{\epsilon}_0 - V_0 + \sigma_0 \approx -V_0, \quad (3.26)$$

$$\dot{\epsilon} = V - \sigma - V_0. \quad (3.27)$$

À medida que $t \rightarrow \infty$, observamos que V e σ tendem a zero e, assim, $\dot{\epsilon} \approx -V_0 < 0$. Das equações (3.19) e (3.20), podemos escrever

$$\frac{dV^{-(1+m)}}{dt} = \frac{1+m}{L}$$

e

$$\frac{d\sigma^{-(1+m)}}{dt} = \frac{1+m}{\epsilon} = \left(\frac{1+m}{L}\right) \frac{L}{\epsilon} \gg \frac{1+m}{L}.$$

Com isso, $\sigma^{-(1+m)}$ cresce bem mais rapidamente do que $V^{-(1+m)}$. Logo, σ vai a zero mais rapidamente do que V .

Na prática, não é possível observar o limite assintótico acima, uma vez que o colapso acontece num intervalo de tempo finito (ver figura 3.5). Portanto, o aglomerado fica estável e não se dissolverá.

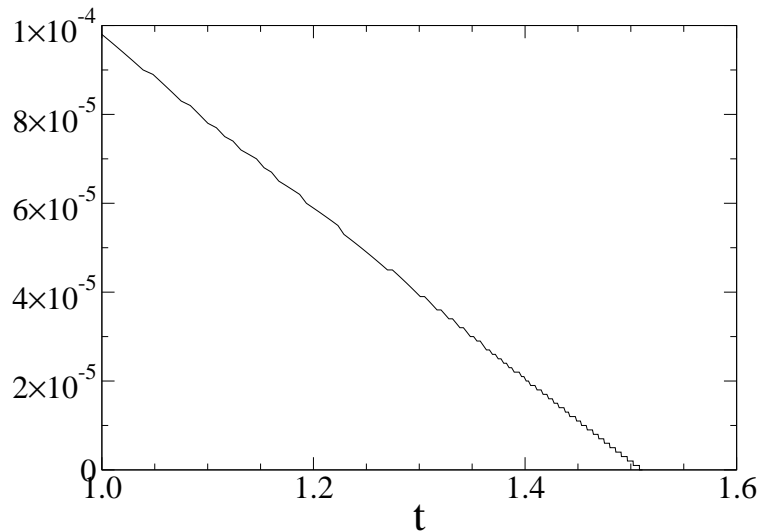


Figura 3.5: Coeficiente de restituição independente das velocidades. O único caso estável em todos os instantes de tempo. O espaçamento médio, ϵ , é medido em unidades de L/N .

3.5.2

$m > 0$

Quando o coeficiente de restituição depende da velocidade relativa inicial da colisão, ou seja, quando $m > 0$, o comportamento físico do sistema muda qualitativamente. Mostramos isso no apêndice A.

Um argumento de escala auto-consistente pode ser usado e comparado com o resultado de simulações para obtermos o comportamento de longo prazo das variáveis V , σ e ε . A solução assintótica para ε e σ pode ser escrita como potências do tempo e do logaritmo do tempo:

$$V \sim t^{\beta_1}, \quad \sigma \sim t^{\beta_2}(\ln t)^{\alpha_2}, \quad \varepsilon \sim t^{\beta_3}(\ln t)^{\alpha_3}. \quad (3.28)$$

O uso do logaritmo para ε e σ deve-se à possibilidade de comportamentos escondidos e lentos existirem. De outra forma, os mesmos não seriam evidenciados nas equações (3.28), implicando em soluções espúrias ou até contraditórias.

Substituindo as equações (3.28) nas equações (3.19), (3.20), (3.21) e (3.22), encontramos as expressões para os expoentes β_1 , β_2 , β_3 , α_2 e α_3 . Os desenvolvimentos que levam a tais expoentes encontram-se no apêndice C.

As soluções são

$$\beta_1 = -\frac{1}{1+m}, \quad (3.29)$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{m}, \quad (3.30)$$

$$\beta_2 = 0, \quad (3.31)$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{m}, \quad (3.32)$$

$$\beta_3 = 1. \quad (3.33)$$

Assim, o comportamento de longo prazo de σ e ε é dado por

$$\sigma \sim (\ln t)^{-1/m} \quad \text{e} \quad \varepsilon \sim t(\ln t)^{-1/m}. \quad (3.34)$$

Essas são as soluções auto-consistentes de longo prazo para σ e ε . Vejamos esse comportamento de σ com mais detalhes.

Para $m > 0$, não há colapso granular. Após algum tempo transiente, o aglomerado crescerá quase linearmente (como pode ser visto na figura 3.6, consistente com o comportamento aproximado de $\varepsilon \sim t$) e, eventualmente, ocupará todo o recipiente, tornando-se mais uma vez um gás com um espaçamento entre os grãos dado por $\varepsilon \sim L/N$. Isso leva um longo tempo para acontecer de fato. A figura 3.6 ilustra os casos $m = 1/5$, $m = 1$ e $m = 2$.

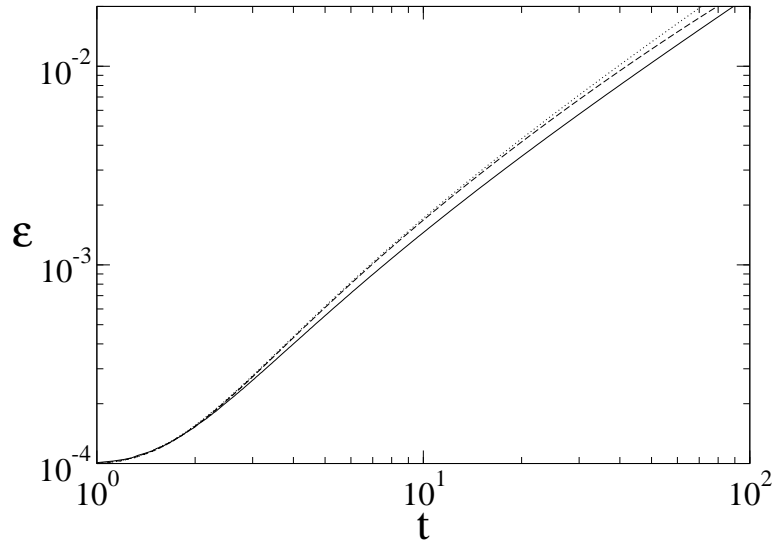


Figura 3.6: Evolução temporal para alguns exemplos de coeficientes de restituição dependentes da velocidade. A linha pontilhada representa $m = 2$, a tracejada $m = 1$ e a cheia $m = 1/5$.

Para tempos longos, nosso modelo torna-se quase-elástico ($r = 1$ com excelente aproximação) quando $m > 0$. Para este caso dependente da velocidade, a dissipação interna do aglomerado torna-se desprezível ($\beta_2 = 0$), mas sua energia interna não é conservada. Esta aparente contradição surge do fato de $\beta_2 = 0$ e $\sigma \rightarrow 0$, em primeira aproximação. Porém, σ decai como uma potência de $\ln t$ e, mais significativamente, em nosso modelo $\varepsilon \leq L/N$, portanto, o crescimento de ε será limitado. Uma vez que as equações de campo médio não impõem condições de contorno para ε , a eq.(3.20) dará $\dot{\sigma} \rightarrow 0$ à medida que $t \rightarrow \infty$, consistente com $\beta_2 = 0$. Na verdade, depois de atingir seu tamanho limite, a dissipação normal do gás prevalecerá e o aglomerado, agora um gás, seguirá novamente a Lei de Haff para a dissipação de energia.

Outro importante argumento de consistência pode ser extraído da eq.(3.34). Se tomarmos o limite $m \rightarrow 0$ antes do limite $t \rightarrow \infty$ ser tomado, obtemos $\varepsilon = \sigma = 0$. Isso está de acordo com o nosso resultado que mostra que o colapso granular acontece num intervalo de tempo finito quando $m = 0$.

3.6

Outros Modelos na Literatura

Notamos que em [30, 31] os autores simularam um sistema granular, dependente da velocidade, com um limiar elástico (impuseram $r = 1$ abaixo de um certo limiar relativo à velocidade relativa de colisão), e supuseram ainda que os resultados eram extensíveis ao regime viscoelástico. Isso está de acordo com nossos resultados. Contudo, a forma do coeficiente de restituição em [30]

está mais próxima do caso $m > 1$ do que do caso $m = 1/5$. Como observado em nossos cálculos, ε não tenderá a zero, nem permanecerá estável em ambos os casos, o que é consistente com [30].

3.7

Oscilações do Aglomerado

Uma característica interessante dos aglomerados observada é que eles oscilam em baixa frequência em tempos muito longos. A eq.(3.20) prevê oscilações em torno do comportamento de escala com frequências decrescentes. Para vermos isso, podemos analisar o caso de uma pequena perturbação ϕ sobre o valor assintótico calculado de ε , tal que

$$\varepsilon = t (\ln t)^{-1/m} [1 + \phi].$$

Obtemos uma equação assintótica para a parte principal da equação da perturbação relativa ϕ :

$$\ddot{\phi} + \frac{1}{t} \dot{\phi} + \frac{1}{t^2} \phi = 0. \quad (3.35)$$

Essa equação é similar a de um oscilador harmônico amortecido, com uma frequência efetiva que tende a zero com $t^{-1}(\ln t)^{1/2}$.

O efeito de pequenas perturbações no valor assintótico de ε é difícil de ser observado diretamente. Contudo, conseguimos observá-lo rodando nossas simulações para obtermos os valores de ε , σ e suas derivadas em tempos longos. Perturbamos ε usando $(1 + \Delta)\varepsilon$, com $\Delta = 10^{-4}$.

Rodamos duas vezes a simulação, uma com condição inicial não-perturbada, e a outra usando a solução perturbada como acima. A diferença deve, então, obedecer a eq.(3.35). O resultado é mostrado na figura 3.7, numa escala logarítmica (o gráfico mostra no eixo das ordenadas o valor absoluto de ϕ ; os sinais correspondem às regiões onde ϕ é positivo ou negativo).

Pode ser visto que o período é crescente (da ordem do tempo total, consistente com uma frequência da ordem de $t^{-1}(\ln t)^{1/2}$), o que se reflete em oscilações com a mesma “largura” no eixo logaritmo dos tempos.

3.8

Conseqüências do Modelo

A conseqüência mais imediata do presente modelo (para $m \neq 0$) é a evidência de que há uma natureza transiente para algumas singularidades em um gás granular resfriando livremente, quando o coeficiente de restituição depende da velocidade. Isso indica que um tratamento hidrodinâmico pode ser adequado para tais sistemas, ao menos após um tempo transiente. Também

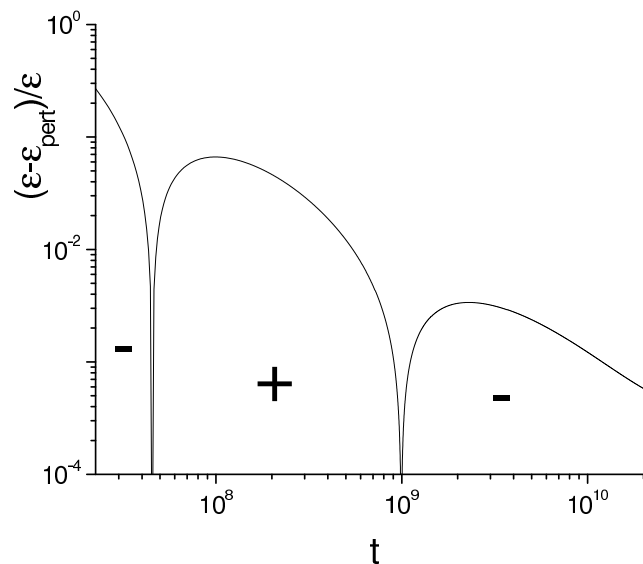


Figura 3.7: Valor não perturbado de ε menos o valor perturbado, como uma função do tempo, normalizado pelo próprio ε .

deduzimos de nossos resultados que efeitos puramente dinâmicos não podem gerar aglomerados permanentes se $m \neq 0$ (no regime onde não há alimentação externa de energia).

Outra consequência é a eventual evaporação de aglomerados, mesmo para sistemas onde os grãos são perfeitamente lisos. A equação de Burgers foi proposta como um mecanismo de formação para aglomerados granulares com coeficiente de restituição independente da velocidade [32, 39]. Para sistemas com $m \neq 0$, podemos questionar se a equação de Burgers é ainda adequada, e que tipo de regime é estabelecido nos períodos de evaporação do aglomerado (em tempos muito longos). Atualmente, trabalhos têm sido desenvolvidos nessa linha.

A ausência de colapso quando $m \neq 0$ nos dá a esperança de que pode ser possível tratar (hidrodinamicamente) aglomerados de duas ou três dimensões como fases granulares muito densas, mas não-singulares (para sistemas lisos), descritas pelas variáveis internas de comportamento não-analítico (possivelmente similares a σ e ε). Isso facilitaria a incorporação do tratamento dos aglomerados nos métodos hidrodinâmicos disponíveis hoje.