Referências Bibliográficas

[1] H. J. Herrmann. Granular matter. *Physica A*, 313(1-2):188–210, 2002. (document), 1.1

[2] B. D. Lubachevsky. How to simulate billards and similar systems. *J. Comp. Phys.*, (94):255, 1991. (document), 1.4

[3] O. Reynolds. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. *Philos. Mag. Ser.*, 5(469):20–50, 1885. 1

[4] P. K. Haff. Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon. *J. Fluid Mech.*, 134:401–430, 1983. 1, 2.1, 3.1, 3.4

[5] R. A. Bagnold. *The Physics of Blow Sand and Desert Dunes.* London: Methuen, 1941. 1, 2.1

[6] S. Chapman, T. G. Cowling. *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases.* Cambridge University Press, third edition, 1970. 1, 3.3.3, 3.3.4

[7] T. Pöschel, T. Schwager. *Computational Granular Dynamics.* Springer, Berlin, 2005. 1, 2.2.4, 3.1

[8] E. Thiesen, W. A. M. Morgado. Granular clustering: Self-consistent analysis for general coefficients of restitution. *Phys. Rev. E*, 73(051303):1–9, 2006. 1.1, 3, 3.1

[9] I. S. Aranson, L. S. Tsimring. Patterns and collective behavior in granular media. *Rev. Mod. Phys.*, 78:641–692, 2006. 1.1, 3.1, 4

[10] H. M. Jaeger, S. R. Nagel, R. P. Behringer. Granular solids, liquids, and gases. *Rev. Mod. Phys.*, 68(4):1259–1273, 1996. 1.1

[11] L. P. Kadanoff. Built upon sand: Theoretical ideas inspired by granular flows. *Rev. Mod. Phys.*, 71(1):435–444, 1999. 1.1, 3.2, 3.2

[12] J. T. Jenkins, S. B. Savage. Theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles. *J. Fluid Mech.*, 130:187–202, 1983. 2.1

[13] R. A. Bagnold. Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a newtonian fluid under shear. *Proc. R. Soc. Lond.*, (A225):49–63, 1954. 2.1.2

[14] B. J. Alder, T. E. Wainwright. Phase transition for a hard sphere system. *J. Chem. Phys.*, (27):1208, 1957. 2.2.1

[15] J. Roth, F. Gähler, H. R. Trebin. A molecular dynamics run with 5,180,116,000 particles. *Int. J. Mod. Phys. C*, (11):317, 2000. 2.2.1

[16] J. Duran, P. G. Gennes, A. Reisinger. *Sands, Powders and Grains.* Springer, 1999. 2.2.2

[17] Y h. Taguchi. Numerical modeling of vibrate beds. *J. Mod. Phys. B*, (7):1839, 1993. 2.2.2

[18] J. A. C. Gallas, H. J. Herrmann, S. Sokolowski. Convection cells in vibrating granular media. *Phys. Rev. Lett.*, (69):1371, 1992. 2.2.2

[19] R. Ramirez, T. Pöschel, N. V. Brilliantov, T. Schwager. Coefficient of restitution of colliding viscoelastic spheres. *Phys. Rev. E*, 60(4):4465–4472, 1999. 2.2.4, 2.4

[20] H. Hertz. Über die berührung fester elastischer körper. *J. f. reine u. angewandte Math.*, (92):156, 1882. 2.2.4

[21] N. V. Brilliantov, F. Spahn, J. M. Hertzsch, T. Pöschel. Model for collisions in granular gases. *Phys. Rev. E*, 53(5):5382–5392, 1996. 2.2.4, 2.2.4, 3.1, 3.2, 3.4

[22] W. A. M. Morgado, I. Oppenheim. Energy dissipation for quasielastic granular particle collisions. *Phys. Rev. E*, 55(2):1940–1945, 1997. 2.2.4, 3.1, 3.2, 3.4

[23] M. Marín, D. Risso, P. Cordeiro. Efficient algorithms for many-body hard particle molecular dynamics. *J. Comp. Phys.*, 109:306, 1993. 2.3

[24] S. McNamara, W. R. Young. Dynamics of a freely evolving, two-dimensional granular medium. *Phys. Rev. E*, 53(5):5089–5100, 1996. 2.4

[25] V. Garzó, J. W. Dufty. Homogeneous cooling state for a granular mixture. *Phys. Rev. E*, 60(5):5706–5713, 1999. 3.1

[26] I. Goldhirsch, G. Zanetti. Clustering instability in dissipative gases. *Phys. Rev. Lett*, 70(11):1619–1622, 1993. 3.1

[27] E. Ben-Naim, J. B. Knight, E. R. Nowak, H. M. Jaeger, S. R. Naegel. Slow relaxation in granular compaction. *Physica D*, 123(1-4):380–385, 1998. 3.1

[28] J. J. Brey, F. Moreno, J. W. Dufty. Model kinetic equation for low-density granular flow. *Phys. Rev. E*, 54(1):445–456, 1996. 3.1

[29] G. Kuwabara, K. Kono. Restitution coefficient in a collision between two spheres. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 26:1230–1233, 1987. 3.1, 3.2, 3.4

[30] T. Pöschel, N. V. Brilliantov, T. Schwager. Long-time behavior of granular gases with impact-velocity dependent coefficient of restitution. *Physica A*, 325(1-2):274–283, 2003. 3.1, 3.6

[31] N. V. Brilliantov, C. Salueña, T. Schwager, T. Pöschel. Transient structures in a granular gas. *Phys. Rev. Lett.*, 93(13):134301–134304, 2004. 3.1, 3.2, 3.6

[32] X. Nie, E. Ben-Naim, S. Y. Chen. Dynamics of freely cooling granular gases. *Phys. Rev. Lett.*, 89(20):204301, 2002. 3.1, 3.8, 4

[33] W. A. M. Morgado, E. Vernek. A simple exemple of clustering for a granular gas model. *Int. J. Mod. Phys. B*, 18(20-21):2829–2840, 2004. 3.2

[34] Y. Du, H. Li, L. P. Kadanoff. Breakdown of hydrodynamics in a one-dimensional system of inelastic particles. *Phys. Rev. Lett.*, 74(8):1268–1271, 1995. 3.2, 3.2

[35] J. M. Pasini, P. Cordeiro. Clustering and fluidization in a one-dimensional granular system. *Phys. Rev. E*, 63(041302):1–7, 2001. 3.2

[36] N. Sela, I. Goldhirsch. Hydrodynamics of a one-dimensional granular medium. *Phys. Fluids*, 7(3):507–525, 1995. 3.2

[37] N. V. Brilliantov, T. Pöschel. Velocity distribution in granular gases of viscoelastic particles. *Phys. Rev. E*, 61(5):5573–5587, 2000. 3.4

[38] W. A. M. Morgado, I. Oppenheim. Kinetic equations for smooth granular systems. *Physica A*, 246(3-4):547–562, 1997. 3.4

[39] E. Ben-Naim, S. Y. Chen, G. D. Doolen, S. Redner. Shocklike dynamics of inelastic gases. *Phys. Rev. Lett.*, 83(20):4069, 1999. 3.8, 4

A
Equações do Equilíbrio Aglomerado-gás

A.1
$m > 0$

Das equações 3.2 e 3.3, obtemos as velocidades para duas partículas de mesma massa, substituindo o valor de r dado pela eq.(3.1) e considerando o tempo de duração da colisão nulo:

$$\begin{aligned}
v_1' &= \left(1 - \frac{A}{2}\left|\frac{v_1 - v_0}{g_0}\right|^m\right) v_0 + \frac{A}{2}\left|\frac{v_1 - v_0}{g_0}\right|^m v_1 \\
&= \left[1 - \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \left(1 + m\,\frac{v_1}{V}\right)\right](-V) + \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \left(1 + m\,\frac{v_1}{V}\right) v_1 \\
&= -V + \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \left(1 + m\,\frac{v_1}{V}\right) V + \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \left(1 + m\,\frac{v_1}{V}\right) v_1 \\
&= -V + \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \left(1 + m\,\frac{v_1}{V}\right)(V + v_1) \\
&= -V + \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \left(1 + m\,\frac{v_1}{V}\right)\left(1 + \frac{v_1}{V}\right) V \\
&\approx -V + \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \left(1 + m\,\frac{v_1}{V} + \frac{v_1}{V}\right) V \\
&\approx -V + \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m V + (1 + m)\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m v_1
\end{aligned} \tag{A.1}$$

onde, a partir da segunda linha, fizemos $v_0 = -V$. Nas duas últimas linhas, a ordem $(\frac{v_1}{V})^2$ foi eliminada.

$$\begin{aligned}
v_0'' &= \frac{A}{2}\left|\frac{v_1 - v_0}{g_0}\right|^m v_0 + \left(1 - \frac{A}{2}\left|\frac{v_1 - v_0}{g_0}\right|^m\right) v_1 \\
&= -\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \left(1 + m\,\frac{v_1}{V}\right) V + \left[1 - \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \left(1 + m\,\frac{v_1}{V}\right)\right] v_1 \\
&= v_1 - \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \left(1 + m\,\frac{v_1}{V}\right)\left(1 + \frac{v_1}{V}\right) V \\
&\approx v_1 - \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m V - (1 + m)\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m v_1
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Usamos acima equações básicas da dinâmica de colisões entre partículas. Assumimos que $g_0 \geq |v_0| = V \geq |v_1|$ e expandimos o último termo da eq.(3.1) da seguinte maneira:

$$\left|\frac{v_1 - v_0}{g_0}\right|^m = \left|\frac{v_0}{g_0}\right|^m \left|1 - \frac{v_1}{v_0}\right|^m \approx \left|\frac{V}{g_0}\right|^m \left(1 + m\,\frac{v_1}{V}\right). \qquad \text{(A.3)}$$

Portanto, a eq.(A.1) e a eq.(A.2) representam as velocidades da partícula 1 do aglomerado e do gás, respectivamente, logo após a primeira colisão. Com isso, a partícula 1 do aglomerado passa a ser a partícula rápida, enquanto a do gás é, agora, a lenta.

Após ℓ colisões, a velocidade da partícula rápida será a ℓ-ésima:

$$v'_\ell \approx -V + \ell\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m V + (1+m)\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \sum_{i=1}^{\ell-1} v_i,$$

e a $(\ell - 1)$-ésima partícula (que sofreu duas colisões) terá a velocidade:

$$v''_{\ell-1} \approx v_\ell - \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m V - (1+m)\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m v_\ell.$$

Depois de colidir N vezes, a partícula rápida alcançará a parede inelástica. Sua velocidade, antes de colidir com essa parede, será:

$$v'_N = -V + N\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m V + (1+m)\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \wp_{cl},$$

onde

$$\wp_{cl} = \sum_{i=1}^{N} v_i$$

é o momento total do aglomerado antes de colidir com o gás. Dessa forma, o momento total dado pelo gás ao aglomerado é:

$$\Delta\wp_{aglomerado_1} = -N\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m V - (1+m)\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \wp_{cl}.$$

Após a colisão com a parede inelástica, temos:

$$V' = v'''_N = V - (N+1)\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m V - (1+m)\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \wp_{cl}. \qquad \text{(A.4)}$$

O procedimento para os cálculos referentes à volta da partícula rápida através do aglomerado é similar ao descrito acima. O resultado final (até a mesma ordem de aproximação usada) para a velocidade da partícula do gás (antes de colidir com a parede elástica) é:

$$v_0''' = V' - N\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m V' + (1+m)\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \wp_{cl}'', \tag{A.5}$$

onde

$$\wp_{cl}'' = \sum_{i=1}^{N} v_i''.$$

O momento total recebido pelo aglomerado, devido a essas colisões, é então:

$$\begin{aligned}
\Delta\wp_{aglomerado_2} &= N\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m V' - (1+m)\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \wp_{cl}'' \\
&= N\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m V - (1+m)\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \wp_{cl}''
\end{aligned}$$

onde substituímos a eq.(A.4) aqui.

Substituindo a eq.(A.4) na eq.(A.5), podemos reescrever esta última na forma

$$v_0''' = V - (2N+1)\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m V + (1+m)\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m (\wp_{cl}'' - \wp_{cl}).$$

Depois de colidir com a parede elástica, a partícula do gás fica com a velocidade

$$v_0'''' = -V + (2N+1)\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m V - (1+m)\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m (\wp_{cl}'' - \wp_{cl}).$$

Assim, o valor absoluto da variação da velocidade da partícula do gás (para um único ciclo de colisão com o aglomerado) é dado por:

$$\begin{aligned}
\Delta V &= -v_0'''' - V \\
&= -(2N+1)\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m V + (1+m)\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m (\wp_{cl}'' - \wp_{cl}) \\
&= -(2N+1)\,\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m V, \qquad \text{(A.6)}
\end{aligned}$$

onde descartamos termos de ordem $\mathcal{O}(|\frac{V}{g_0}|^{2m})$.

O momento total absorvido pelo aglomerado devido à colisão com o gás (após 1 cilco) é, então

$$\begin{aligned}
\Delta\wp_{aglomerado_{total}} &= \Delta\wp_{aglomerado_1} + \Delta\wp_{aglomerado_2} \\
&= -(1+m)\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m (\wp''_{cl} + \wp_{cl}) \\
&= -(1+m)A\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \wp_{cl}. \qquad \text{(A.7)}
\end{aligned}$$

Assumimos que o tempo inicial é grande o bastante para que quantidades tais como $NA|V/g_0|^m$ sejam pequenas, e a dissipação total a cada colisão aglomerado-gás possa ser uma pequena fração da energia cinética do gás.

As equações (A.6) e (A.7) são resultados fundamentais. Podemos transformá-las em equações de taxa com a determinação da taxa de colisão aglomerado-gás. O tempo entre duas colisões sucessivas é dado por

$$\Delta t = \frac{2L}{V}.$$

Portanto, utilizando a eq.(A.6), obtemos a equação que governa o comportamento do valor absoluto da velocidade do gás:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{\Delta V}{\Delta t} \\
&= -(2N+1)\,\frac{A}{4L}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m V^2. \qquad \text{(A.8)}
\end{aligned}$$

A equação para a pressão do gás (taxa de transferência de momento) também é obtida:

$$\begin{aligned}
p_{gas} &= \frac{\Delta\wp_{aglomerado_{total}}}{\Delta t} \\
&= -(1+m)\frac{A}{2L}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m V\,\wp_{cl}.
\end{aligned}$$

Para $N \gg 1$, podemos usar a eq.(A.8) e reescrever a equação para a pressão do gás como:

$$
\begin{aligned}
p_{gas} &= -(1+m)\,\frac{A}{2L}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m V\,\wp_{cl} \\
&= (1+m)\,\frac{2\dot{V}}{V\,(2N+1)}\,\wp_{cl} \\
&= (1+m)\,\frac{\dot{V}}{V\,\left(N+\frac{1}{2}\right)}\,\wp_{cl} \\
&= \frac{(1+m)}{2}\,\frac{\dot{V}}{V}\,\dot{\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{A.9}
$$

A.2
$m = 0$

No caso particular de um coeficiente de restituição constante, assumimos que:

$$A \ll 1 \qquad \Rightarrow \qquad r = 1 - A \approx 1.$$

Depois de uma colisão com a partícula lenta a partícula rápida adquire a velocidade

$$v' = (1 - A)v.$$

Ao final de uma seqüência de N colisões, a velocidade da partícula rápida (antes de colidir com a parede inelástica) será

$$v_N = (1 - A)^N v_0.$$

O momento trocado com o aglomerado será

$$\Delta\wp_{aglomerado_1} = [(1 - A)^N - 1]v_0.$$

Após colidir com a parede inelástica, a partícula do gás fica com a velocidade

$$v_N = -(1 - A)^N v_0.$$

Depois de colidir outras N vezes com as partículas do aglomerado, a partícula do gás terá a velocidade

$$v''_N = -(1 - A)^{2N} v_0.$$

O momento trocado com o aglomerado será

$$\Delta\wp_{aglomerado_2} = -(1-A)^N[(1-A)^N - 1]v_0$$

A mudança total na velocidade da partícula do gás, após a colisão com a parede elástica, será

$$\Delta V = -[1-(1-A)^{2N}]V. \tag{A.10}$$

A taxa de com que V varia é dada por

$$\dot{V} = -\left(\frac{1-(1-A)^{2N}}{2L}\right)V^2. \tag{A.11}$$

O momento total ganho pelo aglomerado após a colisão é então

$$\begin{aligned} \Delta\wp_{aglomerado_{total}} &= \Delta\wp_{aglomerado_1} + \Delta\wp_{aglomerado_2} \\ &= -[(1-A)^N - 1]^2 V. \end{aligned} \tag{A.12}$$

A pressão do gás será dada de forma similar ao caso $m > 0$:

$$\begin{aligned} p_{gas} &= \frac{\Delta\wp_{aglomerado_{total}}}{\Delta t} \\ &= -\frac{[(1-A)^N - 1]^2}{2L}V^2. \end{aligned} \tag{A.13}$$

Podemos ver que a pressão do gás está relacionada à variação em sua velocidade através da equação

$$p_{gas} = \frac{1-(1-A)^N}{1+(1-A)^N}\dot{V}. \tag{A.14}$$

Há uma clara mudança de regime na pressão do gás quando passamos do caso $m > 0$ para o caso $m = 0$. Isso faz com que a pressão aplicada pelo gás, no caso $m > 0$, seja mais fraca, dado que o fator $\dot{V}$ na eq.(A.9) está multiplicado pelo fator $\dot{\varepsilon}/V$.

B
Dissipação da Energia do Aglomerado na Colisão Aglomerado-gás

B.1
$m > 0$

Para mostrarmos que a energia cinética do aglomerado não é afetada pela colisão aglomerado-gás (na ordem de aproximação considerada), consideraremos a soma das velocidades depois da primeira passagem da partícula do gás pelo aglomerado, em direção à parede inelástica. Essa soma é obtida através da conservação do momento, $\Delta\wp_{gas} = \Delta\wp_{aglomerado}$, onde

$$\Delta\wp_{gas} = v'_N - v_0$$

e

$$\Delta\wp_{aglomerado} = \sum_{i=0}^{N-1} v''_i - \sum_{i=1}^{N} v_i.$$

Portanto (lembrando que estamos usando a notação $v_0 = -V$),

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N-1} v''_i &= \sum_{i=1}^{N} v_i - (v'_N - v_0) \\
&= \sum_{i=1}^{N} v_i - \left[-\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m N v_0 - (1+m)\frac{A}{2}\frac{v_0}{V}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \sum_{i=1}^{N} v_i \right] \\
&= \sum_{i=1}^{N} v_i + \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m N v_0 + (1+m)\frac{A}{2}\frac{v_0}{V}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \sum_{i=1}^{N} v_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} v_i - \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m N V - (1+m)\frac{A}{2}\frac{v_0}{V}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \sum_{i=1}^{N} v_i \\
&= \left[1 - (1+m)\frac{A}{2}\frac{v_0}{V}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m\right] \sum_{i=1}^{N} v_i - \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m N V. \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}$$

Nossos cálculos são levados até a ordem $N|V/g_0|^m$ no desenvolvimento do coeficiente de restituição, conforme a hierarquia (3.4). Eliminamos, assim, termos menores que $N|V/g_0|^m$.

Consideremos, agora, a soma das velocidades depois da passagem de volta da partícula do gás,

$$\sum_{i=1}^{N} v_i'''' = \left[1-(1+m)\frac{A}{2}\frac{v_0}{V}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m\right]\sum_{i=0}^{N-1} v_i'' - \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m NV. \tag{B.2}$$

Substituindo a eq.(B.1) na eq.(B.2), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} v_i'''' &= \left[1-(1+m)\frac{A}{2}\frac{v_0}{V}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m\right] \\
&\times \left\{\left[1-(1+m)\frac{A}{2}\frac{v_0}{V}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m\right]\sum_{i=1}^{N} v_i - \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m NV\right\} \\
&+ \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m NV \\
&= \left[1-(1+m)\frac{A}{2}\frac{v_0}{V}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m\right]^2 \sum_{i=1}^{N} v_i \\
&- \left[1-(1+m)\frac{A}{2}\frac{v_0}{V}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m\right]\frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m NV \\
&+ \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m NV \\
&= \left(1-(1+m)A\left|\frac{V}{g_0}\right|^m\right)\sum_{i=1}^{N} v_i \\
&- \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m NV + \frac{A}{2}\left|\frac{V}{g_0}\right|^m NV \\
&= \sum_{i=1}^{N} v_i - (1+m)A\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \sum_{i=1}^{N} v_i.
\end{aligned}$$

Logo, temos a equação que dá a pressão exercida sobre o aglomerado pelo gás:

$$\sum_{i=1}^{N} v_i'''' - \sum_{i=1}^{N} v_i = -(1+m)A\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \sum_{i=1}^{N} v_i. \tag{B.3}$$

De maneira similar, obtemos as somas para os quadrados das velocidades:

$$\sum_{i=0}^{N-1} (v_i'')^2 = \sum_{i=1}^{N} v_i^2 - AV\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \sum_{i=1}^{N} v_i \tag{B.4}$$

e

$$\sum_{i=1}^{N} (v_i'''')^2 = \sum_{i=0}^{N-1} (v_i'')^2 + AV\left|\frac{V}{g_0}\right|^m \sum_{i=0}^{N-1} v_i'' \tag{B.5}$$

As equações (B.1), (B.4) e (B.5) mostram que a energia cinética do aglomerado permanece a mesma,

$$\sum_{i=1}^{N}(v_i'''')^2 = \sum_{i=1}^{N} v_i^2 + \mathcal{O}(\sigma^2|V/g_0|^{2m}). \tag{B.6}$$

B.2
$m = 0$

Como visto no apêndice A, o gás transfere momento para o aglomerado. Assumiremos que $NA \ll 1$. Isso não é tão restritivo ao nosso argumento, uma vez que mostraremos que um colapso granular de longo prazo acontecerá para o caso do coeficiente de restituição quase-elástico independente da velocidade. Assim, isso certamente ocorrerá para o caso em que o produto NA for grande.

Notamos que, à medida que o gás colide com o aglomerado, ele (o gás) transfere energia mudando as velocidades das partículas em uma quantidade proporcional a $NA\dot{V}$. Após elevar ao quadrado as velocidades (em ralação ao centro de massa do aglomerado) de todas as partículas do aglomerado, somá-las e subtrair seu valor inicial, obtemos uma taxa de energia, transferida ao aglomerado, proporcional ao produto $\dot{V}$ e $\dot{\varepsilon}$.

A taxa com que σ muda tem duas parcelas principais: uma negativa, proveniente das colisões internas, e outra positiva, devida à colisão aglomerado-gás. Esta última pode ser desprezada. Isso ocorre porque, uma vez que $|\dot{V}| \gg |\dot{V}\dot{\varepsilon}|$, se assumirmos que $|\dot{V}\dot{\varepsilon}| > \frac{\sigma^2}{\varepsilon}$, então σ decairá mais lentamente quando o termo de transferência de energia estiver presente. O termo correspondente à pressão da parede, na eq.(3.21), continuará sendo bem menor que o correspondente à pressão do gás.

C
Comportamento de Longo Prazo: Soluções Assintóticas

Vamos agora analisar a validade das soluções, dadas pelas equações (3.28),

$$V \sim t^{\beta_1}, \qquad \sigma \sim t^{\beta_2}(\ln t)^{\alpha_2}, \qquad \varepsilon \sim t^{\beta_3}(\ln t)^{\alpha_3}, \tag{C.1}$$

propostas para o comportamento assintótico das variáveis V, σ e ε, quando $m > 0$. Para tanto, partiremos das equações (3.19), (3.20) e (3.22):

$$\dot{V} = -V^{2+m}, \tag{C.2}$$

$$\dot{\sigma} = -\frac{\sigma^{2+m}}{\varepsilon}. \tag{C.3}$$

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon} + \frac{\dot{V}}{V}\dot{\varepsilon}. \tag{C.4}$$

Começando por β_1, que corresponde à lei de Haff, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -V^{2+m} \\ \frac{dV}{V^{2+m}} &= -dt \\ -\frac{V^{-(1+m)}}{1+m} + C_0 &= -(t-t_0). \end{aligned}$$

Quando $t = t_0$, temos:

$$C_0 = \frac{V_0^{-(1+m)}}{1+m}.$$

Portanto, com esse valor de C_0, podemos chegar a uma equação para V com uma forma similar à apresentada no capítulo 3. Dessa forma:

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{1}{1+m}\right)\left[\frac{1}{V^{1+m}} - \frac{1}{V_0^{1+m}}\right] &= -(t-t_0) \\
\frac{1}{V^{1+m}} &= \frac{1}{V_0^{1+m}} + (1+m)(t-t_0) \\
V^{1+m} &= \frac{V_0^{1+m}}{1+(1+m)(t-t_0)V_0^{1+m}} \\
V &= \frac{V_0}{[1+(1+m)(t-t_0)V_0^{1+m}]^{\frac{1}{1+m}}}
\end{aligned} \tag{C.5}$$

A eq.(C.5) corresponde à eq.(3.23), com a diferença apenas em t_0. Em nosso modelo, começamos a análise do sistema em t_0, que foi omitido das equações apresentadas para não sobrecarregar a notação. Dessa forma, chegamos ao primeiro expoente, β_1,

$$V \sim t^{\frac{-1}{1+m}} \qquad \Rightarrow \qquad \beta_1 = -\frac{1}{1+m}.$$

Para os próximos coeficientes, usaremos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(t^\beta (\ln t)^\alpha\right) &= \beta\, t^{\beta-1}(\ln t)^\alpha + \alpha\, t^\beta (\ln t)^{\alpha-1} t^{-1} \\
&= \beta\,\frac{t^\beta}{t}(\ln t)^\alpha + \alpha\,\frac{t^\beta}{t}\,\frac{(\ln t)^\alpha}{(\ln t)} \\
&= \left[\frac{\beta}{t} + \frac{\alpha}{t\,(\ln t)}\right]\left(t^\beta (\ln t)^\alpha\right)
\end{aligned} \tag{C.6}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\left(t^\beta (\ln t)^\alpha\right) &= \frac{d}{dt}\left\{\left[\frac{\beta}{t}+\frac{\alpha}{t\,(\ln t)}\right]\left(t^\beta (\ln t)^\alpha\right)\right\} \\
&= \left[\frac{\beta}{t}+\frac{\alpha}{t\,(\ln t)}\right]\frac{d}{dt}\left(t^\beta (\ln t)^\alpha\right) \\
&+ \left(t^\beta (\ln t)^\alpha\right)\frac{d}{dt}\left[\frac{\beta}{t}+\frac{\alpha}{t\,(\ln t)}\right] \\
&= \left[\frac{\beta}{t}+\frac{\alpha}{t\,(\ln t)}\right]\frac{d}{dt}\left(t^\beta (\ln t)^\alpha\right) \\
&+ \left(t^\beta (\ln t)^\alpha\right)\left[-\frac{\beta}{t^2}-\frac{\alpha\,(1+\ln t)}{t^2(\ln t)^2}\right] \\
&= \left[\frac{\beta}{t}+\frac{\alpha}{t\,(\ln t)}\right]^2\left(t^\beta (\ln t)^\alpha\right) \\
&- \left(t^\beta (\ln t)^\alpha\right)\left[\frac{\beta}{t^2}+\frac{\alpha\,(1+\ln t)}{t^2(\ln t)^2}\right] \\
&= \left[\frac{\beta(\beta-1)}{t^2}+\frac{(2\beta-1)\alpha}{t^2\ln t}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{t^2(\ln t)^2}\right]\left(t^\beta (\ln t)^\alpha\right)
\end{aligned} \tag{C.7}
$$

Substituindo a solução para σ, dada em (C.1), na eq.(C.3), temos:

$$
\dot{\sigma} \sim -\frac{t^{\beta_2(2+m)}(\ln t)^{\alpha_2(2+m)}}{t^{\beta_3}(\ln t)^{\alpha_3}} \tag{C.8}
$$

Da identidade (C.6), temos que:

$$
\dot{\sigma} \sim \frac{\beta_2\, t^{\beta_2}\,(\ln t)^{\alpha_2}}{t}+\frac{\alpha_2\, t^{\beta_2}\,(\ln t)^{\alpha_2}}{t\,(\ln t)}. \tag{C.9}
$$

Comparando as equações (C.8) e (C.9), temos:

$$
\begin{aligned}
-\frac{t^{\beta_2(2+m)}(\ln t)^{\alpha_2(2+m)}}{t^{\beta_3}(\ln t)^{\alpha_3}} &\sim \frac{\beta_2\, t^{\beta_2}\,(\ln t)^{\alpha_2}}{t}+\frac{\alpha_2\, t^{\beta_2}\,(\ln t)^{\alpha_2}}{t\,(\ln t)} \\
-\frac{1}{t^{\beta_3-\beta_2(2+m)}(\ln t)^{\alpha_3-\alpha_2(2+m)}} &\sim \frac{\beta_2}{t^{1-\beta_2}(\ln t)^{-\alpha_2}}+\frac{\alpha_2}{t^{1-\beta_2}(\ln t)^{1-\alpha_2}}
\end{aligned} \tag{C.10}
$$

Para que a eq.(C.10) seja consistente, uma das parcelas à direita deve ser nula. Para fazermos isso, temos que escolher $\beta_2 = 0$. Se tivéssemos escolhido $\alpha_2 = 0$, teríamos eliminado o logaritmo do lado direito da equação e, conseqüentemente, esta teria ficado inconsistente. Portanto:

$$
\beta_2 = 0. \tag{C.11}
$$

Com isso, a eq.(C.10) fica

$$-\frac{1}{t^{\beta_3}(\ln t)^{\alpha_3-\alpha_2(2+m)}} \sim \frac{\alpha_2}{t(\ln t)^{1-\alpha_2}} \tag{C.12}$$

Da eq.(C.12), vemos que $\alpha_2 < 0$. Além disso,

$$\beta_3 = 1. \tag{C.13}$$

Comparando os expoentes de $(\ln t)$ nos dois lados da eq.(C.12), temos que

$$\alpha_3 - \alpha_2(2+m) = 1 - \alpha_2$$

e, dessa forma, obtemos uma relação entre α_2 e α_3:

$$\alpha_2 = -\left(\frac{1-\alpha_3}{1+m}\right). \tag{C.14}$$

Com os valores de β_1, β_2 e β_3 já obtidos, usaremos a eq.(C.4) para obter α_2 e α_3.

Substituindo as soluções (C.1) na eq.(C.4), temos:

$$\ddot{\varepsilon} \sim \frac{t^{2\beta_2}(\ln t)^{2\alpha_2}}{t^{\beta_3}(\ln t)^{\alpha_3}} + \frac{\beta_1}{t}\left[\frac{\beta_3}{t} + \frac{\alpha_3}{t\,(\ln t)}\right]\left(t^{\beta_3}\,(\ln t)^{\alpha_3}\right) \tag{C.15}$$

$$\sim \frac{(\ln t)^{2\alpha_2-\alpha_3}}{t} - \frac{1}{1+m}\,\frac{(\ln t)^{\alpha_3}}{t} \tag{C.16}$$

onde desprezamos o segundo termo entre colchetes na eq.(C.15), uma vez que estamos analisando o comportamento assintótico.

A eq.(C.16) representa o comportamento assintótico de $\ddot{\varepsilon}$. Como $\ddot{\varepsilon}$ representa a aceleração do aglomerado, e uma vez que não há fonte de energia alimentando o sistema, os termos à direita na eq.(C.16) devem cancelar um ao outro. Para isso, as duas potências de $(\ln t)$ devem ser iguais. Logo

$$2\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_3. \tag{C.17}$$

Dessa forma, com as equações (C.14) e (C.17), encontramos:

$$\alpha_2 = -\frac{1}{m} \tag{C.18}$$

e

$$\alpha_3 = -\frac{1}{m}. \tag{C.19}$$