

## 4

### Definições e Conceitos Básicos

O capítulo a seguir tem como objetivo fazer uma breve revisão de alguns conceitos básicos que serão mencionados e utilizados ao longo do trabalho, tais como: processos estocásticos, métodos numéricos e simulação de Monte Carlo.

#### 4.1

##### Processos Estocásticos

Um dos aspectos mais importantes dentro do processo de modelagem é determinar qual o processo estocástico que irá reger o comportamento das incertezas das variáveis envolvidas. Na maioria dos estudos, assume-se que, no tempo, a evolução das incertezas possui uma parcela de aleatoriedade.

Um processo estocástico poder ser discreto ou contínuo em relação a variável tempo. Quanto às suas propriedades estatísticas (média e variância), pode ser estacionário ou não estacionário.

##### 4.1.1

##### Processo de Itô

No processo de Itô para a variável  $x$ , a tendência e a variância são funções do estado e do tempo. O processo é representado da seguinte forma:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

onde,

$$a(x,t) = \textit{tendência}$$

$$b^2(x,t) = \textit{variância}$$

$$dz = \textit{incremento de Wiener}$$

O processo de Itô apresenta as seguintes propriedades estatísticas:

$$E(dx) = a(x, t)dt$$

$$Var(dx) = b^2(x, t)dt$$

#### 4.1.2

#### Movimento Geométrico Browniano

É uma caso particular do processo de Itô onde  $a(x, t) = \mu x$  e  $b(x, t) = \sigma x$ . O processo pode ser representado da forma abaixo:

$$\frac{dx}{x} = \mu dt + \sigma dz$$

As principais propriedades estatísticas deste processo são:

$$E[x(t)] = x_0 e^{\mu t}$$

$$Var[x(t)] = x_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$$

O modelo proposto por Black e Scholes assume que o preço do ativo objeto segue o Movimento Geométrico Browniano (MGB). A tendência do crescimento ou decréscimo dos preços segue uma distribuição lognormal com variância crescendo com o tempo.

#### 4.1.3

#### Processo de Reversão à Média

Em alguns casos, pode-se supor que a variância irá crescer infinitamente. Para o caso de ações, esta suposição é válida, mas não é possível garantir que a mesma regra será válida para o preço de uma *commodity*. Esta suposição pode ser até adotada para o curto prazo, mas no longo prazo, o preço tenderá a voltar para um nível próximo ao seu custo marginal. Neste caso em especial, o processo

adotado será o de Reversão à Média. O processo pode ser representado da forma abaixo:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz$$

onde,

$\eta$  = velocidade da reversão

$\sigma$  = volatilidade do processo

As propriedades estatísticas do processo de reversão à média são:

$$E[x_t] = \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta t}$$

$$Var[x_t - \bar{x}] = \frac{\sigma^2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta t})$$

Apesar de ser um processo de Markov, o processo de reversão à média não possui incrementos independentes.

## 4.2

### Métodos Numéricos de Avaliação

Dentre a literatura disponível, destacam-se três métodos numéricos utilizados largamente no processo de avaliação de ativos contingentes: árvores binomiais, diferenças finitas e simulação de Monte Carlo.

#### 4.2.1

##### Modelo Binomial

A árvore binomial é uma técnica útil para apreçar uma opção, já que baseia-se na projeção das diferentes trajetórias dos preços que poderão ser seguidas pelo ativo objeto durante a sua vida e, conseqüentemente, pela opção.

Esta metodologia deriva do estudo publicado por Cox, Ross e Rubinstein [7] (1979).

O modelo assume que movimentos de preços da ação sejam compostos por um grande número de pequenos movimentos binomiais. A idéia central é dividir a vida da opção em pequenos intervalos de tempo  $\Delta t$ . A cada intervalo de tempo, o preço da ação sai de seu valor inicial  $S$ , para um entre dois novos valores,  $S_u$  e  $S_d$ . A probabilidade de uma movimento ascendente é  $p$  e de um movimento descendente  $1-p$ . As probabilidades dependem de outros três parâmetros. São eles:  $u$ ,  $d$  e  $a$ .

Abaixo seguem as fórmulas para cada um dos parâmetros.

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad a = e^{r\Delta t} \quad p = \frac{a-d}{u-d}$$

Quanto à evolução do ativo objeto, ela pode ser obtida a partir da seguinte equação:

$$Su^j d^{i-j} \quad j = 0,1,2,\dots,i$$

Com a árvore binomial do ativo objeto já contruída, pode-se construir a árvore binomial para a opção. As opções são avaliadas do fim (instante  $T$ ) ao começo da árvore.

O valor da opção é conhecido no instante  $T$ . Para uma opção de compra, seu valor será dado por  $\max(S_T - X, 0)$ , onde  $S_T$  é o preço do ativo objeto em  $T$ . (já definido no passo anterior). Com base na suposição de tratar-se de um mundo neutro ao risco, o valor de cada nó no instante  $T - \Delta t$  pode ser calculado como o valor esperado no instante  $T$  descontado à taxa livre de risco  $r$  para um período de tempo  $\Delta t$ . O processo é repetido até que chegue ao instante **zero**.

#### 4.2.2

#### Modelo Trinomial

As árvores trinomiais podem ser utilizadas como alternativa às binomiais. Os cálculos para o modelo trinomial são análogos aos utilizados para uma árvore

binomial. Sendo  $p_u$ ,  $p_m$  e  $p_d$  as probabilidades de movimentos ascendentes, horizontais e descendentes em cada nó e que  $\Delta t$  seja a extensão do intervalo de tempo, os valores dos parâmetros que combinam com a média e desvio padrão das mudanças nos preços, quando são ignorados os termos de ordem superior a  $\Delta t$ , são:

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}} \quad d = \frac{1}{u}$$

$$p_d = -\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{1}{6} \quad p_m = \frac{2}{3} \quad p_u = \sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{1}{6}$$

### 4.2.3

#### Métodos de Diferenças Finitas

Na literatura financeira, uma das abordagens para a solução numérica de opções baseia-se na solução da equação de Black e Scholes. Para se resolver a equação de B&S, pode-se escolher dentre os métodos Explícito, Implícito e Crank-Nicholson.

O método das Diferenças Finitas avalia um derivativo através da solução da equação diferencial que o derivativo satisfaz, convertendo-a num sistema de equações diferenciais que pode ser resolvido iterativamente. A título de ilustração, esta abordagem será aplicada para se avaliar uma *put* americana. A equação diferencial que a opção deve satisfazer é:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (13)$$

#### Discretização t (0 → T)

Um determinado intervalo de tempo é especificado, igualmente distribuído entre o instante corrente **zero** e a data de vencimento do derivativo **T**.

Para **N+1** intervalos (0,  $\Delta t$ ,  $2\Delta t$ ,  $3\Delta t$ , ..., T):  $\Delta t = \frac{T}{N}$

### Discretizando S ( $0 \rightarrow S_{\max}$ )

Um determinado intervalo de preço para o ativo objeto, igualmente distribuído, é especificado. O valor máximo  $S_{\max}$  é tal que, dado um certo intervalo de confiança, será improvável que o ativo objeto alcance este patamar durante a vida do contrato.

Para  $M+1$  intervalos de preço – ativo objeto ( $0, \Delta S, 2\Delta S, 3\Delta S, \dots, S_{\max}$ ):

$$\Delta S = \frac{S_{\max}}{M}$$

Dado o processo em tempo discreto, e assumindo valores na malha que descreve o ativo objeto  $S_t$ , pode-se obter graficamente uma malha com  $(M+1)(N+1)$  pontos, onde cada ponto possui uma coordenada específica. (ver figura 1).

O ponto  $(i, j)$  representa o preço do ativo objeto  $j\Delta S$  no instante  $i\Delta t$ .

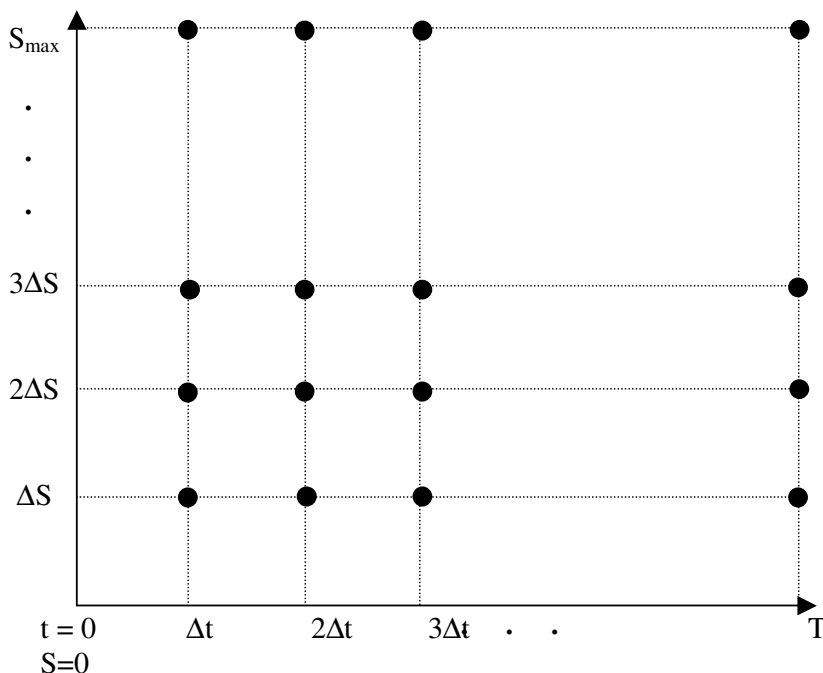


Figura 1: Grid para os possíveis preços para o ativo objeto

A variável  $f_{i,j}$  representa o valor de um derivativo no ponto  $(i, j)$ .

O método em questão possui duas abordagens. São elas:

- Método de Diferenças Finitas Implícito (MDFI)
- Método de Diferenças Finitas Explícito (MDFE)

#### 4.2.3.1

##### Método de Diferenças Finitas Implícita

Para um dado ponto  $(i, j)$  na malha,  $\frac{\partial f}{\partial S}$  pode ser representada por:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S} \longrightarrow \text{Aproximação Diferença Posterior}$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta S} \longrightarrow \text{Aproximação Diferença Anterior}$$

Ainda é possível usar uma aproximação simétrica (média dos dois pontos apresentados anteriormente), como é sugerido por Hull:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} \quad (14)$$

Para  $\frac{\partial f}{\partial t}$ , é utilizado a aproximação por diferença avançado, onde o valor no instante  $i\Delta t$  é relacionado ao valor no instante  $(i+1)\Delta t$  por:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} \quad (15)$$

Conforme foi dito anteriormente,  $\frac{\partial f}{\partial S}$  estimada no ponto  $(i, j)$ , é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S}$$

Assim, para o ponto  $(i, j)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$  pode ser representada por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{\left( \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S} - \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta S} \right)}{\Delta S} = \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} \quad (16)$$

Substituindo as equações (14), (15) e (16) em (13), e fazendo  $S = j \Delta S$ , tem-se:

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} = rf_{i,j}$$

para  $j = 1, 2, 3, \dots, M-1$  e  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Rearrmando os termos, obtém-se:

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j} \quad (17)$$

onde:

$$a_j = \frac{1}{2} rj\Delta t - \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t$$

$$b_j = 1 + r\Delta t + \sigma^2 j^2 \Delta t$$

$$c_j = -\frac{1}{2} rj\Delta t - \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t$$

Para se resolver a equação (17), é necessário fornecer as condições de contorno para a grade da figura 1. Para o exemplo em questão (*put americana*), as condições são as seguintes:

$$f_{N,j} = \max[X - j\Delta S, 0] \quad j = 0, 1, 2, \dots, M$$



$$f_{i,0} = X \quad i = 0,1,2,\dots, N$$

$$f_{i,M} = 0 \quad i = 0,1,2,\dots, N$$

As equações de contorno fornecem o valor da opção nas três extremidades da grade, onde  $S = 0$ ,  $S = S_{\max}$  e  $t = T$ . De posse da equação (17), chega-se ao valor de  $f$  em todos os outros pontos. Inicialmente, o sistema é resolvido com  $M-1$  equações e  $M-1$  variáveis correspondente ao instante  $T - \Delta t$ .

$$a_j f_{N-1,j-1} + b_j f_{N-1,j} + c_j f_{N-1,j+1} = f_{N,j} \quad \text{para } j = 1,2,3,\dots,M-1$$

Após a resolução do sistema, cada valor de  $f_{N-1,j}$  é comparado com  $X - j\Delta S$ .

Se  $f_{N-1,j} < X - j\Delta S$ , o exercício antecipado no instante  $T - \Delta t$  é ideal e  $f_{N-1,j}$  igual a  $X - j\Delta S$ . Este procedimento é repetido para os instantes anteriores até se determinar o valor da opção no instante inicial.

#### 4.2.3.2

##### Método de Diferenças Finitas Explícito

Usando o Método de Diferenças Finitas Explícito (MDFE) como simplificação para o Método de Diferenças Finitas Implícito (MDFI), e escolhendo adequadamente a aproximação para as derivadas parciais a serem usadas no processo de discretização, ter-se-á:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S} \quad (18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i+1, j+1} + f_{i+1, j-1} - 2f_{i+1, j}}{\Delta S^2} \quad (20)$$

Substituindo as equações (18), (19) e (20) em (13), e fazendo  $S = j \Delta S$ , tem-se:

$$\frac{f_{i+1, j} - f_{i, j}}{\Delta t} + rj\Delta S \frac{f_{i+1, j+1} - f_{i+1, j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{f_{i+1, j+1} + f_{i+1, j-1} - 2f_{i+1, j}}{\Delta S^2} = rf_{i, j}$$

para  $j = 1, 2, 3, \dots, M-1$  e  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Rearrumando os termos, obtém-se:

$$a_j f_{i+1, j-1} + b_j f_{i+1, j} + c_j f_{i+1, j+1} = f_{i, j} \quad (21)$$

onde:

$$a_j = \frac{1}{1+r\Delta t} \left( -\frac{1}{2} rj\Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t \right)$$

$$b_j = \frac{1}{1+r\Delta t} (1 - \sigma^2 j^2 \Delta t)$$

$$c_j = \frac{1}{1+r\Delta t} \left( \frac{1}{2} rj\Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta t \right)$$

Como as condições de contorno valem tanto para o método implícito como para o explícito, os valores para a opção em  $T$  já são conhecidos. Os valores em  $T - \Delta t$  são obtidos a partir da equação (21). O procedimento deve ser repetido até o instante inicial  $t$ .

Os métodos Implícito e de Crank-Nicholson mostram ser mais estáveis independentemente da discretização da malha, porém possuem como desvantagem o fato de que  $(m-1)$  equações têm que ser resolvidas simultaneamente para obter os valores da opção a cada instante.

O método Explícito é mais fácil de se resolver, contudo esta abordagem possui algumas limitações no que diz respeito a convergência (principalmente quando se avaliam opções americanas). Podem ocorrer algumas distorções, principalmente, próximas às bordas. Contudo, este problema pode ser amenizado

se for adotado um *grid* suficientemente pequeno no que se refere aos intervalos de tempo e preço de modo a assegurar a convergência. Mesmo sabendo dos problemas de convergência (a instabilidade depende dos intervalos de preço e tempo para a formação da malha), o método continua a ser largamente utilizado. Felizmente, existem algumas sugestões que têm como objetivo minimizar este problema. Por exemplo, segundo Dewynne [8] (1996), uma condição suficiente para assegurar a estabilidade do método é adotar  $\Delta t \leq 1/\sigma^2 M^2$ .

#### 4.2.4

#### Simulação de Monte Carlo

O uso da Simulação de Monte Carlo para o apreçamento e medição de risco de derivativos foi sugerida por Boyle [4] (1977) e desde então sua utilização vem se tornando cada vez mais comum, não somente na área financeira, mas como também em outras áreas como a engenharia e a física. Com a evolução da tecnologia, os métodos numéricos se tornaram uma ferramenta de suma importância na resolução de problemas onde as soluções analíticas são extremamente complicadas ou até mesmo ineficazes.

A técnica de Monte Carlo é um procedimento numérico que faz uso de números aleatórios, ou pseudo-aleatórios, para computar algumas quantidades não necessariamente aleatórias, com base na Lei dos Grandes Números e no teorema do Limite Central. Esta técnica consiste em gerar uma série de valores aleatórios para cada distribuição de probabilidades dentro de um modelo com objetivo de produzir inúmeros cenários, onde a distribuição dos valores calculados deve refletir a probabilidade de ocorrência dos mesmos. Quando comparada aos métodos analíticos, a Simulação de Monte Carlo oferece muitas vantagens tais como:

- Simplicidade do método;
- Fácil implementação;
- Avaliação de instrumentos complexos;
- Correlações e outras interdependências podem ser modeladas.

Por estes motivos, acima citados, a utilização da Simulação de Monte Carlo passou a ser referência no que tange a avaliação de opções dependentes de múltiplas variáveis de estado ou opções que dependem do caminho.

A avaliação de opções através da Simulação de Monte Carlo pode ser resumida em três etapas:

- 1) Simulação dos fatores de risco do ativo (preço do ativo objeto, volatilidade);
- 2) Determinação do *payoff* do instrumento financeiro;
- 3) Apreçamento da opção através da média das simulações.

Para implementar o Método de Monte Carlo é necessário que sejam geradas sequências de números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo  $[0,1]$ . É muito importante ressaltar que o sucesso da implementação desta técnica está diretamente ligado à qualidade da aleatoriedade dos números dessas sequências. Essas sequências são geradas na prática por geradores de números aleatórios. Os geradores de números aleatórios são classificados de acordo com os tipos de números gerados. São eles:

- 1) Números Aleatórios;
- 2) Números Pseudo-Aleatórios;
- 3) Números Quasi-Aleatórios.

A qualidade e as especificações técnicas desses geradores são extremamente importantes para entender as limitações do Método de Monte Carlo, para que então seja garantida a obtenção de bons resultados com as simulações.

Quanto à precisão dos resultados obtidos a partir da Simulação de Monte Carlo, pode ser conseguida uma melhor acurácia dos valores simplesmente aumentando-se o número de simulações, o que por sua vez pode causar um sério problema: elevar o custo computacional do processo. Felizmente, este problema pode ser contornado com o uso de técnicas de redução de variância que tem como objetivo aumentar a eficiência do método sem incorrer num aumento significativo do custo computacional. Vale ressaltar, que este assunto não faz parte do escopo deste trabalho.