5
Modelo Matemático

O capítulo abaixo mostra o modelo matemático utilizado nesta dissertação demonstrando a equação diferencial do derivativo estudado, assim como a aplicação do Método de Diferenças Finitas Explícito.

5.1
Equação Diferencial

Seja F(t), ou F, o valor do ativo objeto (taxa de juros no instante t) que segue um processo de difusão. O comportamento do preço do contrato futuro sobre taxa de juros é descrita nas etapas seguintes:

Movimento Geométrico Browniano (MGB)

Pelo MGB uma variação infinitesimal de F pode ser descrita da seguinte maneira:

$$dF = \mu\ F\ dt + \sigma\ F\ dz$$

Onde dz é o diferencial de Wiener , $dz = \varepsilon \sqrt{dt}$

Se f(F, t) representa um derivativo de taxa de juros que depende de F e de t, então, pelo Lema de Itô tem-se:

$$df = \frac{\partial f}{\partial F}\, dF + \frac{\partial f}{\partial t}\, dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\, dF^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\, dt^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F\, \partial t}\, dF\ dt$$

Considerando $(dt)^i = 0$, onde i > 1, então:

$$df = \frac{\partial f}{\partial F}\, dF + \frac{\partial f}{\partial t}\, dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\left\{\mu^2\ F^2\ (dt)^2 + \sigma^2\ F^2\ (dz)^2\right\}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial F}\, dF + \frac{\partial f}{\partial t}\, dt + \left(\frac{1}{2}\,\sigma^2\ F^2\ dt\right)\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}$$

Construindo o portfólio livre de risco

O portfólio livre de risco é composto por:

i) Uma posição vendida em N contratos futuros de taxa de juros (neste caso um portfolio composto por duas posições contrárias em contratos de DI Futuro, com diferentes datas de vencimento)

ii) Uma posição comprada num derivativo de taxa de juros (f)

Então,

$\pi = f - N\ F$ (Valor do Portfolio)

$$d\pi = df - N\ dF$$

$$d\pi = \frac{\partial f}{\partial F}\, dF + \frac{\partial f}{\partial t}\, dt + \left(\frac{1}{2}\,\sigma^2\ F^2\ dt\right)\frac{\partial^2 f}{\partial F^2} - N\ dF$$

Fazendo $N = \frac{\partial f}{\partial F}$, um portfolio livre de risco é obtido, o que nos leva a:

$$d\pi = \frac{\partial f}{\partial t}\, dt + \left(\frac{1}{2}\,\sigma^2\ F^2\ dt\right)\frac{\partial^2 f}{\partial F^2} = \pi\ r\ dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}\,\sigma^2\ F^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial F^2} = \left(f - \frac{\partial f}{\partial F}\ F\right) r$$

Como o valor do contrato futuro é zero no instante em que a operação é acordada, então:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t}+\left(\frac{1}{2}\,\sigma^2\;F^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}=r\;f} \tag{22}$$

5.2
Aplicação do Método de Diferenças Finitas Explícito

Particularizando o método de diferença finita explícito, descrito no capítulo 4, para a opção sobre Futuro de DI, tem-se como ponto de partida a equação 22 obtida na seção 5.1.

A equação diferencial que descreve o comportamento do preço do derivativo é dada por :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t}+\left(\frac{1}{2}\,\sigma^2\;F^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}=r\;f}$$

As derivadas parciais podem ser aproximadas por:

$$\frac{f_{i+1,\,j}-f_{i,\,j}}{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\;F^2\left(\frac{f_{i+1,\,j+1}+f_{i+1,\,j-1}-2f_{i+1,\,j}}{\Delta F^2}\right)=r\;f_{i,\,j}$$

Como F = j ΔF na coordenada (i,j) e consequentemente $F^2 = j^2\ \Delta F^2$, então:

$$\frac{f_{i+1,\,j}-f_{i,\,j}}{\Delta t}+\frac{1}{2}\sigma^2\;j^2\left(f_{i+1,\,j+1}+f_{i+1,\,j-1}-2f_{i+1,\,j}\right)=r\;f_{i,\,j}$$

Multiplicando por Δt:

$$f_{i+1,\,j}-f_{i,\,j}+\frac{1}{2}\sigma^2\;j^2\;\Delta t\left(f_{i+1,\,j+1}+f_{i+1,\,j-1}-2f_{i+1,\,j}\right)=r\;\Delta t\;f_{i,\,j}$$

Arrumando os termos:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\ j^2\ \Delta t\ f_{i+1,\,j+1} + \frac{1}{2}\sigma^2\ j^2\ \Delta t\ f_{i+1,\,j-1} + \left(1-\sigma^2\ j^2\ \Delta t\right) f_{i+1,\,j} = \left(1 + r\ \Delta t\right) f_{i,\,j}$$

Desta forma , o resultado final pode ser obtido:

$$f_{i,\,j} = \frac{1}{\left(1 + r\ \Delta t\right)} \left(A_j\ f_{i+1,\,j+1} + B_j\ f_{i+1,\,j} + A_j\ f_{i+1,\,j-1}\right)$$

Onde,

$$A_j = \frac{1}{2}\sigma^2\ j^2\ \Delta t$$

$$B_j = 1 - \sigma^2\ j^2\ \Delta t$$

5.3
Método de Diferenças Finitas Explícito X Árvores Trinomiais

O método de diferenças finitas explícita é bem semelhante à abordagem da árvore trinomial. Nas expressões abaixo, é possível interpretar os termos da seguinte maneira:

$A_j = \frac{1}{2}\sigma^2\ j^2\ \Delta t$ - Probabilidade do valor do ativo objeto aumentar ΔF no instante Δt (igual a probabilidade de decrescer);

$B_j = 1 - \sigma^2\ j^2\ \Delta t$ - Probabilidade do valor do ativo objeto permanecer inatlterado no instante Δt.

É importante mencionar que as três probabilidade (aumentar, decrescer e permanecer inalterada) somam uma unidade.

Conforme foi mencionado anteriormente, um dos pontos críticos na implementação do Método de Diferença Finita Explícito é a convergência da solução. Este problema ocorre pelo simples fato de as probabilidades da árvore associada poderem ser negativas. Quando ocorrem probabilidades negativas, os resultados obtidos podem não convergir necessariamente para a solução da equação diferencial.

Uma das sugestões exixtentes para superar este problema foi dada por Hull e White que sugeriram o uso da mudança de variável, definindo Z = ln(F) e fazendo $\Delta Z = \sigma \sqrt{3\,\Delta t}$. Com estas alterações, a árvore e as probabilidades serão idênticas àquelas utilizadas na abordagem da árvore trinomial.

5.4
Mudança de Variável

Na grande maioria dos casos, é mais eficiente do ponto de vista computacional utilizar métodos de diferenças finitas com ln(F), em vez de F, como variável objeto.

Definamos Z = ln(F), então, sendo "f" uma função de F e t, o objetivo é re-escrever a equação diferencial para f(Z, t) como mostrado abaixo.

$$\frac{\partial f}{\partial F} = \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial F} = \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{1}{F}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial F} = \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{1}{F}} \qquad (23)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial F^2} = \left\{\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial f}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial F}\right)\right\}\frac{\partial Z}{\partial F} = \left\{\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial f}{\partial Z}\frac{1}{F}\right)\right\}\frac{\partial Z}{\partial F}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial F^2} = \left\{\frac{\partial^2 F}{\partial Z}\frac{1}{F} + \frac{\partial f}{\partial Z}\frac{\partial\left(F^{-1}\right)}{\partial Z}\right\}\frac{\partial Z}{\partial F}$$

Como F = exp(Z), então, F^{-1} = exp(-Z)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial F^2} = \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial Z} \frac{1}{F} + \frac{\partial f}{\partial Z} (-1) \exp(-Z) \right\} \frac{\partial Z}{\partial F} = \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial Z} \frac{1}{F} - \frac{\partial f}{\partial Z} \frac{1}{F} \right\} \frac{\partial Z}{\partial F}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial F^2} = \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial Z} \frac{1}{F} - \frac{\partial f}{\partial Z} \frac{1}{F} \right\} \frac{1}{F}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial F^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial Z} \frac{1}{F^2} - \frac{\partial f}{\partial Z} \frac{1}{F^2}} \qquad (24)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} = 0 + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}} \qquad (25)$$

Assim, dada a equação diferencial obtida no fim da seção 5.1 [eq. (22)] que governa o comportamento do preço do derivativo de taxa de juros, e substituindo a derivada parcial pela expressão descrita na equação (25), podemos mostrar facilmente que:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 \; F^2 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial F^2} = r \; f$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 \; F^2 \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Z} \frac{1}{F^2} - \frac{\partial f}{\partial Z} \frac{1}{F^2} \right) = r \; f$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Z} - \frac{\partial f}{\partial Z} \right) = r \; f$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} - \left(\frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\partial f}{\partial Z} + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\partial^2 F}{\partial Z} = r \; f} \qquad (26)$$

Aplicando o Método de Diferença Finita Explícito à equação (26), tem-se:

$$\frac{f_{i+1,\,j}-f_{i,\,j}}{\Delta t}-\frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{f_{i+1,\,j+1}-f_{i+1,\,j-1}}{2\,\Delta Z}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{f_{i+1,\,j+1}+f_{i+1,\,j-1}-2f_{i+1,\,j}}{\Delta Z^2}\right)=r\,f_{i,\,j}$$

$$f_{i+1,\,j}-f_{i,\,j}-\frac{1}{2}\sigma^2\,\Delta t\left(\frac{f_{i+1,\,j+1}-f_{i+1,\,j-1}}{2\,\Delta Z}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2\,\Delta t\left(\frac{f_{i+1,\,j+1}+f_{i+1,\,j-1}-2f_{i+1,\,j}}{\Delta Z^2}\right)=r\,\Delta t\,f_{i,\,j}$$

$$\boxed{f_{i,\,j}=\frac{1}{(1+r\,\Delta t)}\left(A_j\;f_{i+1,\,j+1}+B_j\;f_{i+1,\,j}+C_j\;f_{i+1,\,j-1}\right)} \qquad (27)$$

$$A_j^*=\frac{1}{2\,\Delta Z^2}\sigma^2\,\Delta t-\frac{1}{4\,\Delta Z}\sigma^2\,\Delta t \qquad (28)$$

$$B_j^*=1-\frac{1}{\Delta Z^2}\sigma^2\,\Delta t \qquad (29)$$

$$C_j^*=\frac{1}{2\,\Delta Z^2}\sigma^2\,\Delta t+\frac{1}{4\,\Delta Z}\sigma^2\,\Delta t \qquad (30)$$

A abordagem da mudança de variável traz um grande banefício para facilitar a solução do problema que é o fato dos parâmetros A^*_j, B^*_j e C^*_j serem independentes de j.

5.5
Condições de Contorno

O valor do derivativo obtido quando a equação (22) é resolvida, depende das condições de contorno utilizadas, que especificam os valores deste nas fronteiras dos valores possíveis de F e t.

É importante mencionar que a opção sobre DI Futuro possui uma particularidade no que diz respeito a condição de maturidade, ou seja, no vencimento uma opção de compra sobre taxa de juros terá payoff análogo ao de uma opção de venda sobre preço (PU). Por este motivo, uma opção de compra na forma como definida no contrato deverá ser apreçada como uma opção de venda no modelo de Black.

$$f_{N,j} = \max(X - j\Delta F, 0) \qquad \text{j} = 0,1,2,\ldots,\text{M}$$

Uma vez que o cálculo do método escolhido é recursivo, o que implica em se dar uma elevada importância à condição de contorno no vencimento, arbitra-se $r_{\min}$ e $r_{\max}$ de forma que seja pouco provável que estes valores sejam alcançados.

No caso da condição de contorno inferior, tem-se:

$$f_{i,0} = 0 \qquad \text{i} = 0,1,2,\ldots,\text{N}$$

Considerando o patamar de taxa de juros praticada na data da avaliação e o fato de $r_{\min}$ ser igual a zero, é muito pouco provável que o derivativo seja exercido, forçando assim que seu valor seja zero ao longo de toda a borda.

Já no caso da condição de contorno superior, define-se $S = r_{\max}$. Desta forma teremos:

$$f_{i,M} = \frac{100000}{(1 + r_{\max})^{du/252}} \qquad \text{i} = 0,1,2,\ldots,\text{N}$$

onde,

du = número de dias úteis para o vencimento da contrato futuro

Com $S = r_{max}$, o valor da opção será máximo, pois quanto maior a taxa de juros, menor será o PU, e consequentemente maior o valor da opção.

Definidos os valores do instrumento nas três extremidades (bordas) da grade, resta utilizar as equações (28), (29) e (30) para chegar-se ao valor f em todos os outros pontos.