

3. TEORIA DE FILAS E SIMULAÇÃO

Neste capítulo será feita uma breve apresentação sobre Pesquisa Operacional (PO), Teoria de Filas e Simulação, uma vez que estas ferramentas serão utilizadas neste trabalho.

A PO é um método científico que objetiva fornecer ferramentas quantitativas ao processo de tomada de decisões. É constituída por um conjunto de subáreas, tais como Programação Linear, Teoria de Filas, Simulação, Programação Dinâmica, Teoria dos Jogos, etc.

Segundo Andrade (2004) a expressão “Pesquisa Operacional” foi utilizada pela primeira vez durante a Segunda Guerra Mundial quando as equipes de pesquisadores procuraram desenvolver métodos para resolver determinados problemas de operações militares. O sucesso dessas aplicações levou o mundo acadêmico e empresarial a procurar utilizar as técnicas criadas para resolver problemas de administração.

O emprego PO dentro de uma empresa ou instituição deve envolver todo o pessoal empregado na(s) atividade(s) cujo problema se deseja solucionar. Seu uso deve ser encarado como multidisciplinar, ou seja, pessoas de diversas áreas de conhecimento podem e devem ser empregadas no desenvolvimento do modelo representativo do sistema real.

As principais características do processo de tomada de decisão são as seguintes: a sequencialidade, a complexidade e o inter-relacionamento.

A PO pode ser vista pelo enfoque matemático ou pelo enfoque atual, que é sistêmico e mais administrativo. Essa abordagem permite a compreensão mais ampla do problema levando em consideração suas interações com o ambiente externo.

Na Figura 2 são apresentadas as fases de um estudo de PO.

A primeira fase é a definição do problema onde se explicam as alternativas e as limitações existentes, para que as soluções obtidas no final do processo sejam aceitáveis e válidas.

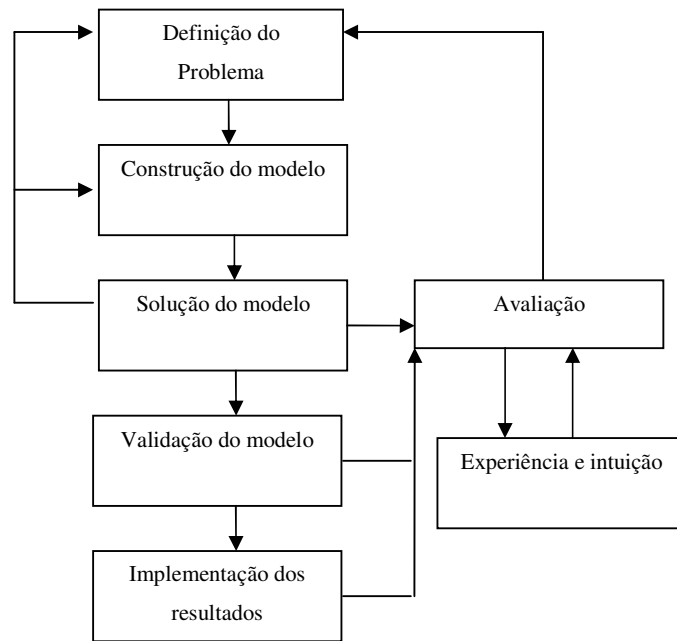


Figura 2 - Fases de um estudo de PO

Fonte: Andrade (2004)

A segunda fase é a construção do modelo onde é exigida muita criatividade por parte do analista, pois todo processo seguinte depende do grau de representação da realidade que este venha apresentar. Se o modelo não representar o sistema real com fidelidade, os resultados serão distorcidos.

A terceira fase é a solução do modelo, que no caso dos matemáticos, a solução é obtida pelo algoritmo mais adequado, em termos de rapidez de processamento e precisão de resposta, sendo chamada de “solução ótima”.

A quarta fase é a validação onde se averigua se o modelo fornece uma previsão aceitável do comportamento do sistema real.

Na quinta fase realiza-se a implementação do modelo, que é uma etapa crítica do processo, pois os valores encontrados na solução, quando levados à prática, podem necessitar de ajustes.

A sexta fase é a avaliação final, onde a experiência e a visão crítica do pessoal envolvido são fundamentais, pois a solução do problema não deve ser puramente matemática, mas fruto de um trabalho de reflexão de toda equipe envolvida no processo.

3.1 Tipos de Variáveis

Segundo Andrade (2004) as variáveis de um modelo de decisão podem ser classificadas em: variáveis de decisão, variáveis controláveis ou endógenas e variáveis não controláveis ou exógenas.

As variáveis de decisão são aquelas que servirão de base para o gerente definir formas de atuação mais adequadas.

A variável controlável ou endógena é uma variável gerada pelo próprio modelo durante o processo de solução. Ela é dependente dos dados fornecidos, das hipóteses estabelecidas e da própria estrutura do modelo.

As variáveis não controláveis ou exógenas são os fatores ou dados externos fornecidos ao modelo e que representam as hipóteses levantadas ou as condições que devem ser respeitadas.

3.2 Tipos de Modelos

Segundo Andrade (2004), dependendo de como o processo de decisão é abordado pelo analista e pela própria natureza da decisão podem ser identificados três tipos diferentes de modelo: modelos conceituais, modelos simbólicos ou matemáticos e modelos heurísticos.

Os modelos conceituais relacionam de maneira seqüencial e lógica as informações e as fases do processo de decisão, de modo a permitir o desenvolvimento controlado e consistente com os objetivos que se tem em mente.

Os modelos simbólicos ou matemáticos baseiam-se na pressuposição de que todas as informações e variáveis relevantes do problema de tomada de decisão podem ser quantificadas. São usados, nestes modelos, símbolos e funções matemáticas para representá-los.

Os modelos matemáticos podem ser de simulação e de otimização. Os modelos de simulação procuram oferecer uma representação do mundo real com o objetivo de permitir a geração e análise de alternativas.

Os modelos de otimização não permitem flexibilidade na escolha das alternativas, já que são estruturados para selecionar uma única alternativa, a qual será considerada “ótima”, segundo o critério estabelecido pelo analista.

Os modelos heurísticos são construídos quando a complexidade do problema é de tal ordem que a utilização de relações matemáticas, torna-se

impraticável ou dispendiosa. Esses modelos baseiam-se em regras empíricas ou intuitivas que, dada determinada solução para o problema, permitem o avanço para outra solução mais aprimorada.

3.2.1 Construção dos modelos de simulação.

Para se construir um modelo é necessário, primeiramente, observar os sistemas reais e as interações entre os seus vários componentes. Isto proporciona uma melhor coleta de dados. O segundo passo é a construção do modelo conceitual, onde são assumidas determinadas características dos componentes e da estrutura do sistema.

Em seguida é feita a implementação de um modelo operacional, que incorpora características assumidas no modelo conceitual, usando-se um, para isso, software de simulação.

A construção de um modelo, não é linear no que se refere aos passos citados anteriormente, pois há casos em que o modelo vai sendo verificado e validado durante a construção.

3.2.2 Construção do Modelo Conceitual utilizando o ACD

Segundo Chwif & Medina (2006) o *Activity Cycle Diagram (ACD)* é uma forma de modelagem dos objetos pertencentes a um sistema, particularmente útil naqueles com fortes características com formação de filas. O ACD utiliza dois símbolos para descrever o ciclo de vida das entidades: uma circunferência que representa uma “fila” e um retângulo que representa uma “atividade”. Esta modelagem é apresentada na Figura 3.

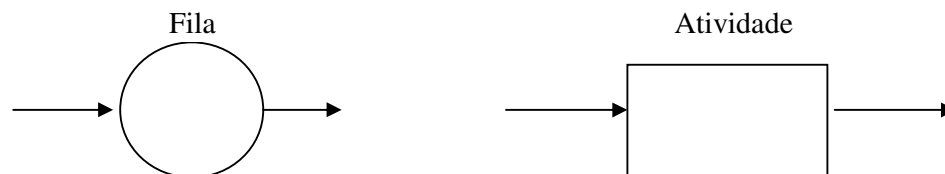


Figura 3 Elementos Básicos de um ACD

Fonte: Chwif & Medina (2006)

No *ACD*, as entidades podem estar aguardando em filas ou participando de alguma atividade. Um estado passivo, ou estado de fila, não envolve cooperação entre diferentes classes de entidade, sendo, geralmente, um estado no qual a entidade está aguardando alguma coisa acontecer. As filas e as atividades devem estar sempre dispostas alternadamente. Seja o Exemplo 1 representado na Figura 4.

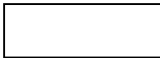


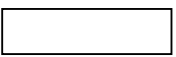
Entidade	Estado	Símbolo
garfo	utilizado	
	esperando	
filósofo	comendo	
	esperando pensar	
	pensando	
	esperando comer	

Figura 4 – Modelo *ACD* para os filósofos famintos (1)

Fonte: Chwif & Medina (2006)

Exemplo 1: Certos de número de filósofos sentam numa mesa circular. Entre cada par de filósofos há um garfo. Um filósofo pode comer se ambos os garfos adjacentes a ele estiverem disponíveis, caso contrário, deverá aguardar. Após terminar de comer, o filósofo pensa por um determinado tempo.

Quando pára de pensar, tentará comer novamente. Para comer, os filósofos levam um tempo uniformemente distribuído entre 5 e 8 minutos, e, para pensar, um tempo obedecendo a uma distribuição normal com média 6 e desvio padrão 1 minuto. O objetivo do modelo é determinar a proporção de tempo que cada filósofo espera para comer, na média.

Na Figura 5 são apresentados os símbolos representativos das atividades e filas correspondentes ao exemplo dos Filósofos Famintos.

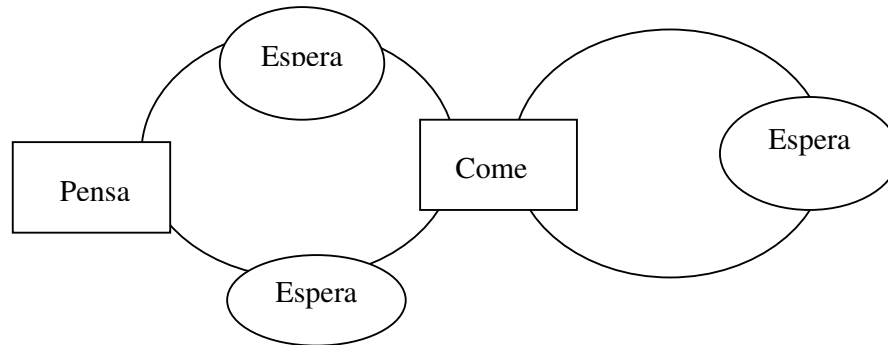


Figura 5- Modelo ACD para o Exemplo dos Filósofos Famintos (2)

Fonte: Chwif & Medina (2006)

3.3 Modelagem dos Dados de Entrada

Uma das etapas mais importantes na construção de um estudo de simulação é a modelagem dos dados de entrada. Este processo é facilitado da seguinte forma: quando as entradas de dados podem ser representadas por uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas; quando a distribuição das variáveis aleatórias pode ser aproximada por um modelo probabilístico conhecido e encontrada em pacotes comerciais e, quando os dados estão disponíveis, de modo que seus parâmetros possam ser estimados.

O estudo da modelagem de dados pode ser resumido na coleta, no tratamento dos dados e na inferência. A coleta de dados corresponde ao processo de amostragem e o uso desta técnica torna-se útil quando se pretende diminuir custos, e não se dispõe de tempo ou, ainda, quando não se tem acesso a toda população.

No tratamento dos dados são utilizadas técnicas para descrever, levantar e identificar possíveis falhas nos valores amostrados com o objetivo de se aumentar o conhecimento acerca do fenômeno em estudo.

Na inferência aplicam-se os conhecimentos do cálculo de probabilidades para se tirar conclusões sobre o comportamento da população a partir da amostra.

3.4 Teoria de Filas

As filas de espera estão presentes em muitas das situações do cotidiano, como por exemplo: filas de espera de um banco, filas em consultórios dentários, filas em oficinas, filas em processos industriais de produção, etc.

A Teoria de Filas é conhecida como um método analítico que aborda a modelagem de sistemas através de fórmulas matemáticas. De acordo com Prado (1999), o surgimento da abordagem matemática para o estudo das filas se deu em 1908 em Copenhague, Dinamarca, por A. K. Erlang, considerado o pai da Teoria de Filas, utilizando-a para estudar o redimensionamento de centrais telefônicas. Mas, foi a partir da Segunda Guerra Mundial que a teoria passou a ser aplicada a outros problemas.

O uso da Teoria de Filas, na prática, envolve dois maiores aspectos: seleção de um modelo matemático apropriado que represente adequadamente o sistema, com o objetivo de determinar as medidas de desempenho mais adequadas e a implementação de um modelo de decisão baseado nas medidas de desempenho, com o objetivo de melhorar o processamento do serviço ao cliente, a despeito das dificuldades matemáticas.

Os sistemas de filas podem ser humanos, semi-automatizados ou completamente automatizados.

3.4.1 Processo de Chegada

A caracterização do processo de chegada é dada pela distribuição de probabilidades de tempo entre sucessivos eventos de chegada e pelo número de indivíduos ou unidades que aparecem em cada um desses eventos.

3.4.2 Processo de Saída

Para descrever o processo de saída, frequentemente chamado de processo de serviço de um sistema de filas, é necessário se especificar a distribuição de probabilidades que se ajusta aos tempos de serviço. Em muitos casos assume-se que a distribuição do tempo de serviço independe do número de clientes no

sistema. Isto implica que o servidor não trabalha mais rápido porque há um número maior de clientes.

Os servidores podem trabalhar em série e/ou em paralelo. Quando estão em paralelo, o serviço provido é o mesmo, bastando somente a entidade passar por um deles para completá-lo. Nos servidores em série, os clientes tem que percorrer todas as estações de trabalho.

3.4.3 Disciplina da Fila

Para descrever um sistema de filas é necessário considerar a maneira pela qual os clientes chegam ao sistema e a disciplina da fila cuja a organização mais comum é *FIFO (First in First Out)*, em que os clientes são atendidos por ordem de chegada. Outra disciplina é *LIFO (Last In First Out)*, em que o último que chega é o primeiro a ser atendido. Algumas vezes, a ordem em que o cliente chega não afeta a ordem em que ele é atendido. Este é o caso em que os clientes são escolhidos, aleatoriamente, dentre os que estão aguardando na fila. Esta situação é chamada de *SIRO (service in random order)*, em que o atendimento é feito por ordem aleatória.

Existe, também, a disciplina de fila por prioridade (*Priority Rules, PR*), em que as chegadas são classificadas em categorias, que recebem, então, um nível de prioridade. Dentro de cada nível o cliente é atendido pela disciplina *FIFO*.

3.4.4 Mecanismo de Atendimento

Da mesma forma que o processo de chegada, o mecanismo de atendimento é caracterizado pela identificação de uma distribuição de probabilidades que o rege. Existem situações em que os atendentes aumentam sua velocidade de atendimento conforme a fila vai enchendo ou quando se aproxima do final do expediente.

O mecanismo de atendimento determina o número e a configuração de servidores ou canais. As configurações podem ocorrer em casos onde o sistema é formado por uma fila e um servidor, uma fila para vários servidores, em paralelo ou em série.

3.5 Simulação

Segundo o Aurélio (2004), simular é “representar com semelhança; aparentar”. Dependendo do ambiente em que o termo for empregado, suas técnicas e métodos são completamente diferentes. Na engenharia, ele tem sido usado para designar as situações nas quais se tenta compreender as características de um sistema pelo conhecimento de outro que lhe é similar. Segundo Prado (2004), “simulação é a técnica de solução de um problema pela análise de um modelo que descreve o comportamento do sistema usando um computador digital”.

Segundo Chwif & Medina (2006) o termo simulação pode ser classificado em duas grandes categorias: a simulação computacional e a simulação não-computacional.

Quando se pensa em simular algo, o objetivo é representar um sistema composto de várias partes que operam juntas visando um objetivo comum. Um sistema pode ser real ou hipotético. Embora a validação de um sistema imaginário ou hipotético seja mais difícil isto é viável e comum.

De um modo geral, um sistema recebe “clientes” de um meio externo, processa-os e os envia para outro meio externo. Os sistemas, também, podem ser contínuos ou discretos. Chamam-se de discretos aqueles os constituídos de componentes discretos ou inteiros como, por exemplo, caminhões, pessoas, navios, etc. Já nos sistemas contínuos a principal entidade em estudo existe em quantidades contínuas, como por exemplo, o fluxo de uma determinada substância líquida por uma tubulação.

A simulação de sistemas contínuos tem sido usada na engenharia eletromecânica ou de processos (química e metalúrgica) que possuem um número pequeno de variáveis que podem ser descritas por equações diferenciais da física clássica. Já a simulação de sistemas discretos encontra aplicações principalmente na engenharia de produção e na engenharia de sistemas.

Em uma modelagem por simulação é importante estar familiarizado com as terminologias dos elementos que compõe o estudo. Em seguida serão definidos alguns termos comuns em trabalhos com simulação.

- a) **Entidades:** são os elementos que transitam pelo sistema e sofrem processamento. Representam a unidade física do problema cujo comportamento se deseja estudar. As entidades podem ser permanentes, temporárias, ativas e passivas;
- b) **Evento:** é o instante de tempo no qual alguma troca significativa de estado ocorre no sistema, como por exemplo, o sistema passar do Regime Transitório para o Regime Permanente.
- c) **Atividades:** são operações e procedimentos que são iniciados em cada evento. Toda atividade está delimitada por dois eventos, o primeiro que caracteriza o seu início e o segundo o seu término;
- d) **Processos:** são as seqüências de eventos em ordem cronológica, geralmente especificados por uma distribuição de probabilidade dos tempos de serviço.
- e) **Recursos:** é o que a entidade necessita para realizar alguma atividade. Um recurso pode executar várias atividades ou pode haver um recurso para cada atividade;
- f) **Replicação:** é o número de vezes que é repetido o experimento de simulação, devendo ser calculado previamente com base nas variáveis de desempenho;
- g) **Tempos de Serviço:** é o tempo em que os trabalhos são executados nos recursos. Para se efetuar uma simulação é necessário especificar a distribuição de probabilidades dos tempos de serviço. A escolha da distribuição de probabilidades tem um grande impacto nos dados de saída, principalmente nas decisões tomadas com a simulação. Caso se especifique de maneira errada a distribuição de probabilidades dos dados de entrada, certamente não se terá uma análise confiável dos dados de saída.
- h) **Taxas de Chegada:** é a freqüência com que chegam as entidades no sistema.

Na análise de dados de entrada, uma distribuição teórica é preferível a uma distribuição empírica, pois esta pode conter irregularidades, principalmente, se há poucos dados disponíveis. Esta distribuição suaviza os dados sendo um modo compacto de representar o conjunto de valores.

Outra desvantagem do uso da distribuição empírica é que não é possível gerar valores fora da gama daqueles observados na simulação, enquanto que na distribuição teórica isto pode ser feito.

Em alguns casos, há fortes razões para usar determinado tipo de distribuição teórica e, quando isso acontece, é recomendável usar os dados observados como base para especificar esta particular distribuição; outra desvantagem do uso da distribuição empírica é que, em algumas linguagens de simulação, se n valores de dados estão disponíveis em uma distribuição contínua, então $2n$ valores (dados e correspondente probabilidade cumulativa) têm que ser armazenados para representar uma distribuição empírica. Para um conjunto grande de dados isto seria muito trabalhoso. Há, porém, situações em que nenhuma distribuição teórica provê adequado ajustamento para os dados observados, sendo necessário o uso de uma distribuição empírica.

3.5.1 Aplicações da Simulação

O campo de aplicação da simulação é amplo, podendo ser utilizado em manufatura e serviços.

Na área de serviços ela pode ser aplicada em aeroportos, portos, bancos, cadeias logísticas, centrais de atendimento, escritórios, hospitais, parques de diversões, restaurantes, cadeias de *fast-food* e supermercados, etc.

Na área de manufatura ela pode ser aplicada em sistemas de movimentação e armazenagem de materiais, linhas de montagem, células automatizadas, problemas de programação da produção, análise de estoques, logística interna, projetos de sistemas de expedição, *cross-docking* e movimentação interna de armazéns.

3.5.2 Verificação e Validação

As mais importantes tarefas depois de se desenvolver um modelo de simulação são a verificação e a validação do modelo. A verificação está ligada à construção correta do modelo e serve para comparar o modelo conceitual com aquele que foi desenvolvido com uso do computador. Este procedimento serve

para se averiguar se o modelo foi implementado corretamente no simulador e se os parâmetros de entrada e a estrutura lógica do modelo representam-no corretamente.

A validação tem como objetivo a verificação da precisão do modelo em representar o sistema real, sendo esta precisão alcançada através da calibração do modelo, num processo iterativo de comparação usando as discrepâncias para fazer os ajustes necessários para se alcançar um nível de precisão aceitável.

3.5.3 Regime Transitório e Regime Permanente

O Regime Transitório ocorre quando o modelo ainda não está aquecido, e nem todas as estações de trabalho estão ocupadas pelas entidades. Durante o este regime as medidas de desempenho fornecidas pela simulação não são precisas.

O Regime Permanente ocorre após o aquecimento do sistema, que atinge “plena carga” quando todas as estações de trabalho estão ocupadas. Neste regime as medidas de desempenho obtidas pela simulação tornam-se mais precisas.

3.5.4 Simulação Terminal e Simulação Não Terminal

A simulação terminal é usada em situações em que as atividades têm o tempo certo para iniciar e terminar, isto é, possuem turnos de trabalhos pré-definidos.

A simulação não terminal ou em regime é usada em sistemas em que não se sabe o momento certo para encerrá-la, mas que é um período longo de tempo. Neste caso, usa-se uma simulação para um horizonte de tempo longo ou “infinito”. As siderúrgicas são exemplos de aplicação deste regime.

3.5.5 Escolha das Medidas de Desempenho Adequadas

Devem ser escolhidas as variáveis que interessam diretamente à análise dos resultados e a conseqüente tomada de decisão. Muitas variáveis podem ser extraídas dos relatórios de simulação, mas algumas influenciam diretamente no fenômeno que está sendo observado. Segundo Chwif & Medina (2006) a primeira

etapa para se realizar uma boa análise de resultados é escolha das medidas de desempenho do sistema a partir da definição dos objetivos da simulação.

3.5.6 Cálculo do Número de Replicações

Este cálculo fornece o número de replicações (n^*) necessárias para se obter resultados precisos, sendo efetuado da seguinte maneira: primeiramente deve-se estipular a precisão desejada (h^*) e “rodar” a simulação com poucas replicações, geralmente dez. Entretanto, há sistemas que exigem um número maior devido à sua complexidade.

Para se estabelecer o número de replicações utiliza-se como parâmetro a metade da amplitude do intervalo de confiança (h), construído com base nas medidas de desempenho escolhidas previamente. Caso h^* seja menor que h , o número de replicações é considerado suficiente para simular o sistema real, caso contrário deve-se trabalhar com uma amostra de tamanho maior (número de replicações maior) e repetir o processo.

Exemplo 2: extraído de Chwif & Medina (2006). Em uma central de financiamento de uma loja de departamentos, o tempo entre chegadas sucessivas de clientes é normalmente distribuído com média de 5,0 minutos e desvio padrão de 2,2 minutos. Existem três atendentes que realizam a pré-análise. O tempo de pré-análise é exponencialmente distribuído com média de 8,0 minutos. Enquanto a atendente está realizando a pré-análise do cliente, ela não pode atender outro cliente. Os clientes que chegam quando todas as atendentes estão ocupadas aguardam em fila única. Após a pré-análise 70% dos clientes são encaminhados ao gerente, que finaliza o processo de financiamento. Os outros 30% não têm o financiamento aceito. O gerente leva 2,5 minutos, na maior parte das vezes, para atender aos clientes, segundo uma distribuição triangular em que o menor valor é de 0,5 minutos e o maior valor é de 5,0 minutos. A central funciona diariamente das 10h30min às 22h00min. A loja pretende estudar o tempo médio que um cliente gasta no sistema.

A medida de desempenho mais adequada ao exemplo acima exposto é tempo médio que um pedido aceito permanece no sistema. Trabalhou-se com uma

confiança estatística de 95% (portanto $\alpha = 0,05$) e uma precisão tal que h^* seja de, no máximo, 0,5 minutos.

Na Tabela 1 são apresentados os tempos médios de replicação no serviço de pré-análise.

Tabela 1 – Dados de saída do modelo do Exemplo 1 (1ª replicação)

Replicação	Média do tempo no serviço
1	11,29
2	10,82
3	11,87
4	9,54
5	8,94
6	10,22
7	12,48
8	11,36
9	11,03
10	11,98
Média	10,95
Desvio Padrão	1,11

Fonte: Chwif & Medina (2006)

Efetua-se, então o seguinte cálculo:

$$t_{n-1, \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} = 2,26 \frac{1,11}{10} = 0,80 .$$

Como não se atingiu a precisão desejada, deve-se aumentar o número de replicações e partir deste resultado determinar o número de replicações necessárias pela expressão: $n^* = \left\lceil n \left(\frac{h}{h^*} \right)^2 \right\rceil = \left\lceil 10 \left(\frac{0,80}{0,50} \right)^2 \right\rceil = [25,6] = 26$ replicações.

Em seguida, roda-se novamente o modelo com mais 16 replicações conforme resultados apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Dados de saída do modelo Exemplo 1 (2ª replicação)

Replicação	Média do tempo no serviço
1	11,29
2	10,82
3	11,87
4	9,54
5	8,94
6	10,22
7	12,48
8	11,36
9	11,03
10	11,98
11	9,87
12	10,18
13	10,02
14	9,09
15	8,95
16	9,98
17	10,29
18	9,84
19	11,97
20	10,05
21	10,40
22	10,27
23	10,50
24	12,96
25	10,60
26	11,52
Média	10,62
Desvio Padrão	1,06

Fonte: Chwif & Medina (2006)

Como h^* é menor que h é pode-se concluir de que o tamanho da amostra é suficiente para simular o sistema e existe uma probabilidade de 95% de que o

intervalo [10,39; 10,84] contem o verdadeiro valor da média do tempo esperado no sistema.

3.5.7 Cálculo do Tempo de Aquecimento (*Warm UP*) para Sistemas não Terminais

Após a indicação das variáveis de interesse para a análise do sistema, calcula-se o tempo de aquecimento necessário para que o sistema entre em regime permanente, conforme o Exemplo 2.

Exemplo 3: seja uma linha de montagem hipotética onde os tempos de trânsito das entidades no sistema são observados em uma rodada de cinco replicações. A Tabela 3 apresenta a média aritmética e as médias móveis para a o cálculo do tempo de aquecimento do sistema.

Tabela 3 - Média aritmética e médias móveis

TEMPO MÉDIO DE TRÂNSITO											
Tempo (h)	Replicações						Médias Móveis				
	1	2	3	4	5	Média	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6
180	159,59	162,24	161,74	166,96	164,23	162,95	162,95	162,95	162,95	162,95	162,95
190	158,59	164,40	164,98	166,96	164,23	163,83	163,39	163,39	163,39	163,39	163,39
200	161,30	167,99	168,51	171,88	165,03	166,94	165,39	164,58	164,58	164,58	168,58
210	161,30	166,65	164,98	169,23	165,27	165,49	166,21	165,42	164,80	164,80	164,8
220	161,30	164,86	167,50	169,63	165,27	165,71	165,60	166,05	165,49	164,98	168,98
230	161,30	167,26	167,30	169,63	165,23	166,14	165,93	165,78	166,07	165,62	165,18
240	161,30	167,99	168,56	170,39	165,23	166,69	166,42	166,18	166,01	166,20	165,80
250	161,30	167,99	168,51	171,88	165,03	166,94	166,82	166,59	166,37	166,20	166,32
260	161,30	167,99	169,57	171,88	166,21	167,39	167,17	167,01	166,79	166,58	166,39
270	162,65	168,61	169,57	171,88	166,21	167,78	167,59	167,37	167,20	166,99	166,78
280	162,65	169,07	170,26	171,88	167,21	168,21	168,00	167,80	167,58	167,40	167,19
190	158,59	164,40	164,98	166,96	164,23	163,83	166,02	166,61	166,81	166,83	166,81
300	166,09	169,07	170,89	176,03	166,81	169,78	166,81	167,27	167,40	167,40	167,32
310	166,09	169,07	171,18	176,03	166,81	169,84	169,81	167,82	167,92	167,89	167,81
320	166,09	170,41	171,28	176,13	166,81	170,14	169,99	169,92	168,40	168,36	168,26
330	166,37	170,41	171,52	177,02	168,02	170,67	170,41	170,22	170,11	168,85	168,75
340	166,37	170,75	171,52	177,33	168,02	170,80	170,73	170,54	170,36	170,24	169,18
350	167,37	170,75	171,52	177,56	168,72	171,18	170,99	170,88	170,70	170,53	170,40

Na Figura 6 é apresentado o comportamento da média aritmética e das médias móveis ao longo do tempo, onde se percebe a estabilização dos tempos de trânsito por volta de 230 horas de aquecimento.

Após o cálculo do tempo de aquecimento é efetuado o cálculo do número de replicações.

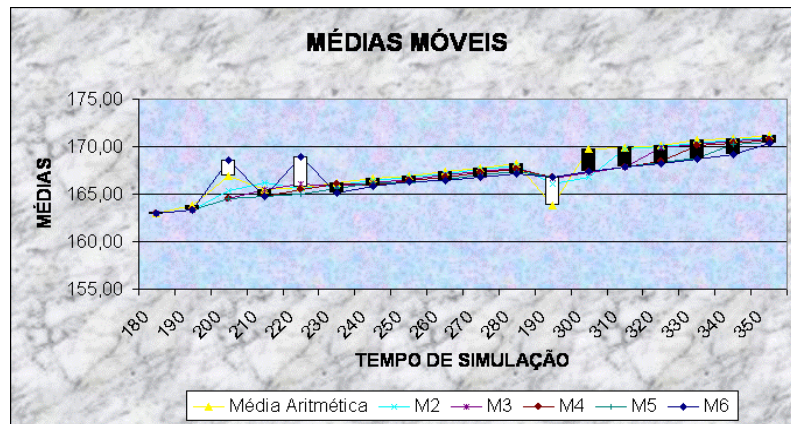


Figura 6 – Comparação da média aritmética e das médias móveis

3.5.8 Análise de Resultados

É o exame dos dados gerados pela simulação com o propósito de prever o desempenho de um sistema ou comparar o desempenho de dois ou mais sistemas alternativos. É necessário realizar análises estatísticas dos dados de saída pelo fato de as variáveis de entrada também serem aleatórias. Duas diferentes seqüências de números aleatórios produzirão conjuntos de saída que provavelmente diferirão.

Se o desempenho de um sistema é medido por um parâmetro θ , o resultado de um conjunto de experimentos de simulação será um estimador $\hat{\theta}$ de θ . A precisão de $\hat{\theta}$ pode ser medida pelo seu erro padrão ou pela amplitude do intervalo de confiança.

3.6 O Software

Segundo Chwif & Medina (2006), um ponto importante num estado de simulação é a escolha correta do software, porém o fundamental é a atuação do analista.

O Software ARENA, por ser mais acessível e ter uma interface amigável é o que tem sido mais utilizado no mundo acadêmico. Ele possui um conjunto de

blocos que são utilizados para se descrever uma aplicação real funcionando como comandos de uma linguagem de programação.

O ARENA visualiza o sistema a ser modelado como constituído de um conjunto de estações de trabalho que prestam serviços a clientes que se movem através do mesmo, podendo ser aplicado em várias situações da vida prática.

A seguinte notação é usada por este software:

TS: Tempo Médio de Permanência no Sistema ;

NS: Número Médio de Clientes no Sistema ;

λ : Ritmo Médio de Chegada ;

IC: Intervalo Médio Entre Chegadas (IC);

TF: Tempo Médio de Permanência na Fila (*Waiting Time*),

NF: Número Médio de Clientes na Fila (*Number Time*);

TA: Tempo Médio de Atendimento ou serviço (*Process Time ou Delay Time*),

c: Quantidades de atendentes;

NA: Número médio de clientes que estão sendo atendidos

μ : Ritmo Médio de Atendimento de cada atendente (μ).

Por definição $TA = 1/\mu$ e as seguintes relações básicas são utilizadas pelo ARENA:

$$NS = NF + NA \text{ e } TS = TF + TA$$

A taxa de utilização de atendentes é definida por $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, em que λ é o ritmo

de chegada e μ é o ritmo médio de atendimento. No caso de “uma fila/vários

atendentes”, a expressão se torna $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$ em que c é o número de atendentes.

3.6.1 O *Input Analyzer*

O *Input Analyzer* é um componente do ARENA que serve para determinar que distribuição de probabilidades melhor se ajusta aos dados coletados. Esta determinação é feita pelos erros-padrões e pelos testes de aderência Qui-Quadrado e Kolmogorov Smirnov, descritos mais adiante. Ela classifica as distribuições por *rank*, da melhor para a pior servindo, também, como um arquivo de dados que permite a comparação das mesmas.

3.6.2 A Ferramenta *Fit All* do *Input Analyzer*

Na Figura 7 é apresentada a caixa de diálogo de ajuste de dados às distribuições teóricas usadas pelo ARENA. Nela é apresentado ajuste das distribuições e o sumário dos cálculos realizados.

Pode-se utilizar esta caixa de diálogo para se escolher uma determinada distribuição como representativa dos tempos de serviço realizado pelas estações de trabalho.

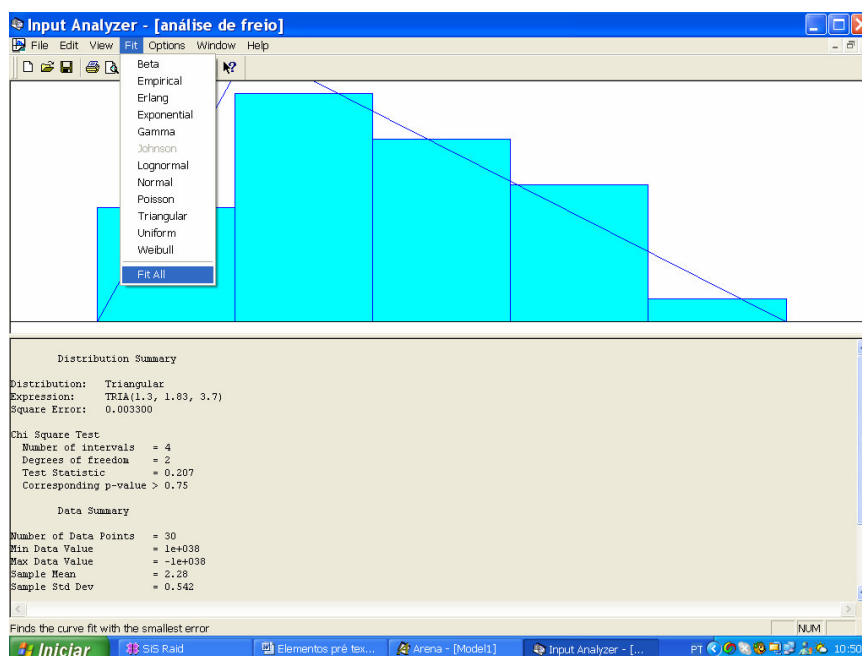


Figura 7 – Distribuições teóricas do ARENA

3.6.3 O Ajuste das Curvas

Para a maioria das distribuições analisadas pelo *Input Analyzer*, a curva ajustada é baseada no uso de estimador de máxima verossimilhança. Exceções para esta regra são as distribuições Beta, Triangular, e Uniforme. A distribuição Beta é ajustada por dois modos diferentes: pelo estimador de máxima verossimilhança e pelo método dos momentos. As distribuições Triangular e Uniforme usam regras empíricas para ajustar os dados.

A qualidade de um ajuste de curva é principalmente baseada na minimização do erro quadrado, como mostrado na expressão:

$$\sum_i (f_i - f(x_i))^2$$

onde:

f_i é a frequência relativa observada no intervalo i

$f(x_i)$ é a frequência relativa teórica no intervalo i

Se a distribuição cumulativa é explicitamente conhecida, então $f(x_i)$ é determinado pela expressão:

$$F(x_i) - F(x_i - 1)$$

onde:

x_i é o limite à direita do intervalo considerado e $x_i - 1$ é o limite à esquerda.

Os resultados dos Testes Qui-Quadrado e Kolmogorov-Smirnov são, também, apresentados no sumário dos dados mostrados.

3.6.4 Modificando Parâmetros

Na Figura 8 é apresentada uma caixa de diálogo onde é possível efetuar mudanças nos parâmetros da distribuição e o no número de intervalos do histograma de frequências.

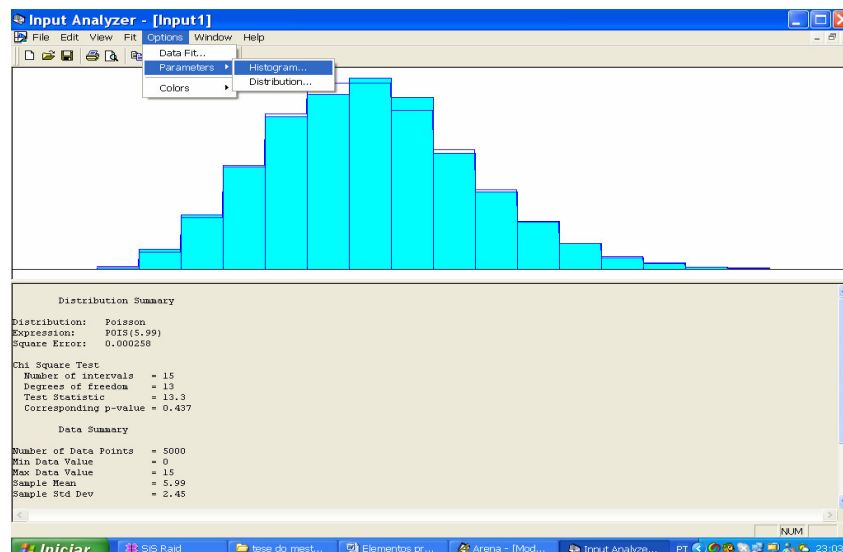


Figura 8 – Modificação de parâmetros do Input Analyzer

3.6.5 Expressões usadas pelo ARENA

O ARENA, dentre outras funções, possui um componente chamado *SIMAN*, que fornece a expressão representativa da distribuição de probabilidades que se ajusta aos dados.

Esta expressão pode, também, ser fornecida à célula “*expression*” da caixa de diálogo apresentada na Figura 9, que representa o processo de atendimento da entidade pelos recursos.

As técnicas usadas pelo *SIMAN* são: (i) o método da transformada inversa, quando é possível explicitar a inversa da função de distribuição, (ii) técnicas polinomiais quando isto não é possível e (iii) o método da convolução com o uso de soma de variáveis aleatórias independentes. O método mais comum é o método da transformada inversa.

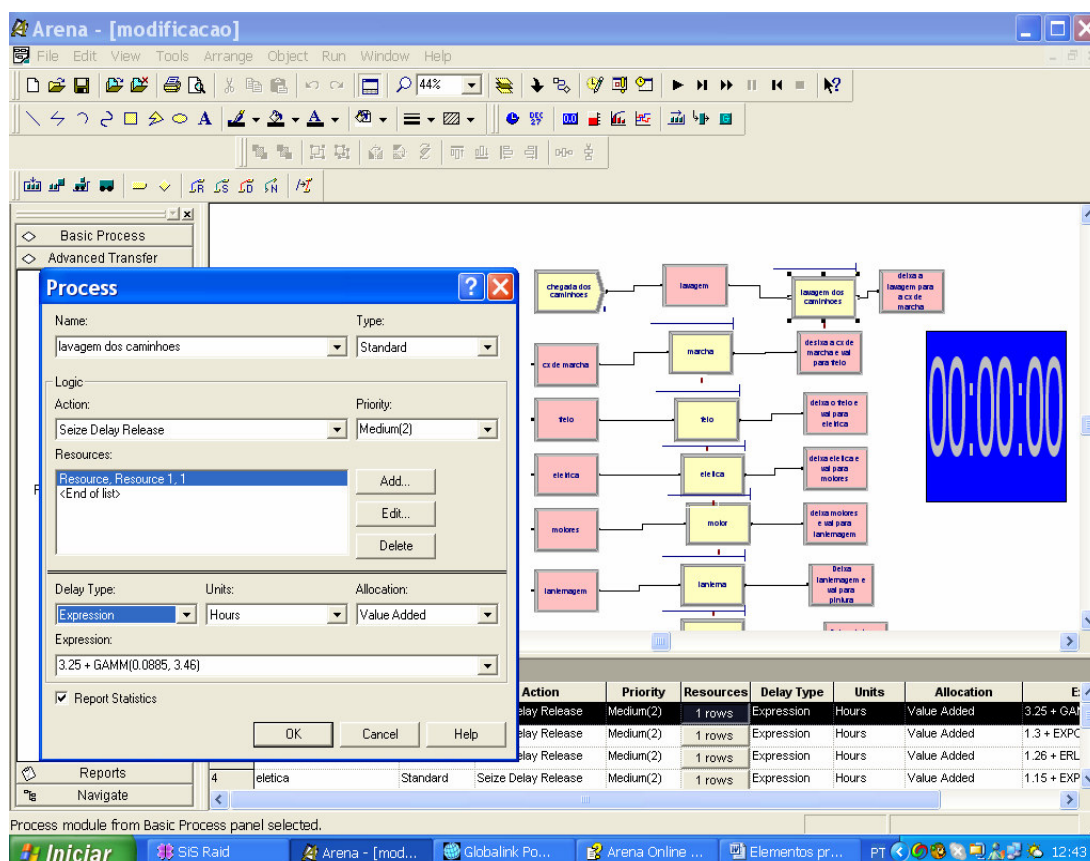


Figura 9 – Expressões usadas pelo ARENA

3.6.6 Método de Transformação Inversa

Seja $U \sim U(0, 1)$ e X um valor gerado

$$X = F^{-1}(U)$$

$U(0, 1)$ representa um número aleatório gerado a partir de uma distribuição uniforme com uma gama de valores entre zero e um. $F^{-1}(U)$ pode ser a forma exata da função de distribuição cumulativa inversa ou uma aproximação polinomial a tal função.

Exemplo 1: Uma variável aleatória uniformemente distribuída com parâmetros $[a, b]$ onde $a < b$ tem uma função de distribuição inversa dada pela expressão:

$$X = F^{-1}(U) = a + (b - a) * U$$

O *SIMAN* usa o método da transformada inversa para gerar a distribuição uniforme como se segue:

$$x = a + (b - a) * U$$

A distribuição Weibull tem uma função de distribuição inversa dada pela expressão:

$$F^{-1}(U) = \beta [-\ln(1 - U)]^{1/\alpha}$$

3.7 Distribuições de Probabilidades

Serão apresentadas algumas distribuições de probabilidades que podem ser usadas para modelar os dados apresentados nesta dissertação:

3.7.1 Distribuição Beta

$$\begin{cases} f(x) = x^{\beta} (1 - x)^{\alpha-1} & \text{para } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{Média: } \frac{\beta}{\alpha + \beta}, \text{ Variância: } \frac{\beta\alpha}{(\beta + \alpha)^2(\beta + \alpha + 1)}$$

Obs.: por causa de sua versatilidade para assumir uma larga variedade de formas, esta distribuição é freqüentemente usada na ausência de dados. A beta é freqüentemente usada para representar proporções aleatórias, como a proporção de artigos defeituosos em um lote.

3.7.2 Distribuição Erlang

Se $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ são variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas exponencialmente, a sua soma tem uma distribuição Erlang. A média (β) de cada distribuição exponencial e o número de variáveis aleatórias (k) são os parâmetros da distribuição. A média da distribuição exponencial é um número real positivo, e k é especificado como um valor inteiro positivo.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^{-k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{(k-1)!} & \text{para } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{Média: } k\beta, \text{ Variância: } k\beta^2$$

A distribuição Erlang é usada em situações em que uma atividade ocorre em sucessivas etapas e cada fase é ajustada por uma distribuição exponencial. Para valores grandes de k , a Erlang se aproxima da distribuição normal sendo usada para representar o tempo requerido para completar uma tarefa. É, também, um caso especial da distribuição Gama em que o parâmetro de forma, α , é um inteiro k .

3.7.3 Distribuição Gama

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)} \text{ para } x > 0 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Os parâmetros de forma (α) e parâmetro de escala (β) são especificados

como valores reais positivos.

Média: $\alpha\beta$; Variância: $\alpha\beta^2$

Obs.: A Distribuição Gama é sempre usada para representar o tempo requerido para completar uma tarefa, como, por exemplo, o tempo de reparo de uma máquina.

3.7.4 Distribuição Lognormal

Esta distribuição modela situações em que a distribuição do processo envolvido pode ser considerada como a multiplicação de um conjunto de processos e sua a função densidade de probabilidade pode ser escrita como:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-(\ln(x) - \mu)^2 / 2\sigma^2} \text{ para } X > 0 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

A Média LogMean ($\mu_1 > 0$) e desvio padrão LogStd ($\sigma_1 > 0$) da variável aleatória Lognormal têm que ser números estritamente positivos.

Média: $\text{LogMean} = \mu_1 = e^{\mu + \sigma^2/2}$, Variância: $(\text{LogStd})^2 = \sigma_1^2 = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$

Obs.: É freqüentemente usada para representar o tempo de tarefa que tem uma distribuição com assimetria positiva.

3.7.5 Distribuição Triangular

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2(x-a)}{(m-a)(b-a)} & \text{para } a \leq x \leq m \\ f(x) = \frac{2(b-x)}{(b-m)(b-a)} & \text{para } a \leq x \leq m \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Os parâmetros desta distribuição são: o mínimo (a), moda (m) e o máximo (b) que são números reais em que $a < m < b$.

$$\text{Média: } \frac{(a+m+b)}{3}, \text{ Variância: } \frac{(a^2 + m^2 + b^2 - ma - ab - mb)}{18}$$

A distribuição Triangular é comumente usada em situações em que a exata forma da distribuição é desconhecida, mas estimada por um valor mínimo, máximo e uma moda.

3.7.6 Distribuição Exponencial

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1^{-x/\beta}}{\beta} & \text{para } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{Média: } \beta, \text{ Variância: } \beta^2$$

Obs.: Esta distribuição é usada, frequentemente, para modelar tempos de chegada aleatórios, mas é geralmente imprópria para modelar tempos de demora de processo.

3.7.7 Distribuição Uniforme

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{b-a} & \text{para } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{Média} = \frac{a+b}{2}, \text{Variância} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Esta distribuição é usada para modelar processos em que todos os valores em um intervalo $[a, b]$ são igualmente prováveis de ocorrer.

3.8 Testes de Aderência

Uma importante classe de teste não-paramétrico é constituída pelos chamados testes de aderência, em que a hipótese testada refere-se à forma da distribuição da população. Nesses testes, admite-se, por hipótese, que a distribuição da variável de interesse na população seja descrita por determinado modelo de distribuição de probabilidades e testa-se o modelo, ou seja, verifica-se a boa ou má aderência dos dados da amostra ao modelo. Se houver uma boa aderência e a amostra for razoavelmente grande, pode-se, em princípio, admitir que o modelo forneça uma boa representação da distribuição populacional. Inversamente, a rejeição de H_0 em um dado nível de significância indica que o modelo testado é inadequado para representar a distribuição de probabilidades da população.

3.8.1 Teste de Aderência Qui-Quadrado

Segundo Wonnacott (1980), essa forma de testar, a aderência foi desenvolvida por Karl Pearson e baseia-se na estatística:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (3.1)$$

Onde:

χ^2_v é a estatística de teste, com v graus de liberdade;

O_i é a frequência observada de uma determinada classe ou valor da variável;

E_i é a frequência esperada, segundo o modelo testado, dessa classe ou valor da variável;

$$n = \sum_{i=1}^{\kappa} O_i = \sum_{i=1}^{\kappa} E_i \text{ é o número de elementos da amostra;}$$

κ é número de classes ou valores considerados.

Se o modelo testado for verdadeiro e se todas $E_i \geq 5$, a quantidade definida em (3.1) terá aproximadamente distribuição χ_v^2 com $v = k - m - 1$ onde v é o número de graus de liberdade, sendo k o número de parcelas somadas e m o número de parâmetros do modelo estimados independentemente a partir da amostra. A subtração de 1 ao valor de k deve-se a existência da restrição $\sum_{i=1}^k O_i = n$ entre as frequências observadas. O cálculo das frequências esperadas é feito através da expressão $E_i = np_i$, onde p_i é a probabilidade, de se obter um valor da variável na classe considerada, e n é o número de elementos na amostra. Essa expressão resulta do fato de que cada frequência observada O_i terá, para população infinita, uma distribuição binomial com parâmetros n e p_i .

O fato de a quantidade definida em (3.1) se distribuir aproximadamente segundo um χ^2 não deve surpreender, pois:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{O_i - E_i}{\sqrt{E_i}} \right)^2 \quad (3.2)$$

Havendo várias classes, $\sqrt{E_i} = \sqrt{np_i} \cong \sqrt{np_i(1-p_i)}$, pois p_i deverão ser pequenos. Ora, sendo $E_i \geq 5$, a distribuição binomial das O_i aproxima-se da normal, e o valor entre parênteses no segundo membro de (3.2) seria aproximadamente um valor de z . Como a distribuição χ^2 surge de uma soma de valores de z ao quadrado, resulta que o somatório deveria mesmo fornecer uma variável com distribuição próxima do χ^2 .

O teste é unilateral, devendo a hipótese ser rejeitada se $\chi_v^2 > \chi_{v,\alpha}^2$. Isso é razoável, pois, se o modelo testado estiver longe da realidade, as frequências observadas irão diferir bastante das esperadas, e a variável de teste tenderá a crescer.

Caso existam classes que não satisfaçam à condição $E_i \geq 5$ estas classes deverão ser “fundidas” às classes adjacentes, conforme será visto no Exemplo 3.

Tabela 4 - Número de aparelhos com defeito

Número de defeitos	0	1	2	3	4	5	6	7
Número de aparelhos	25	35	18	13	4	2	2	1

Fonte: Montgomery (2003)

Exemplo 4: o número de defeitos por unidade, observado em uma amostra de cem aparelhos de televisão produzidos em uma linha de montagem apresentou a seguinte distribuição de frequência mostrada na Tabela 4.

Verificar se o número de defeitos por unidade segue razoavelmente uma distribuição de Poisson.

Solução: usa-se o teste de aderência pelo χ^2 para testar as hipóteses;

H_0 , a distribuição do número de defeitos por unidade é uma Poisson;

H_1 , tal não ocorre.

Sabe-se, do cálculo de probabilidades, que a distribuição de Poisson é uma distribuição discreta cujas probabilidades são dadas por:

$$P(X = r) = \frac{\mu^r e^{-\mu}}{r!} \quad (r = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.3)$$

Onde μ é uma média da distribuição. É, portanto, uma distribuição que fica bem caracterizada com o conhecimento de um único parâmetro, sua média μ .

Como a hipótese testada não especifica a média μ do modelo, o primeiro passo será estimá-la por meio da média amostral \bar{x} , onde:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n} = \frac{155}{100} = 1,55.$$

Usa-se, portanto o modelo de Poisson de média $\mu = 1,55$ para cálculo das probabilidades p_i . Considerando $p_i = P(X = i)$, $i=0, 1, 2, \dots$ e aplicando a fórmula de Poisson (3.3), obtém-se:

$$p_0 = \frac{(1,55)^0 e^{-1,55}}{0!} = e^{-1,55} \cong 0,212$$

$$p_1 = \frac{(1,55)^1 e^{-1,55}}{1!} = 1,55 e^{-1,55} \cong 0,329$$

$$p_2 = \frac{(1,55)^2 e^{-1,55}}{2!} = \frac{2,4025}{2} e^{-1,55} \cong 0,255$$

Tabela 5 – Cálculos necessários para o Teste Qui-Quadrado

x_i	$f_i = O_i$	$x_i f_i$	p_i	E_i	$O_i - E_i$	$(O_i - E_i)^2$	$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$
0	25	0	0,212	21,2	3,8	14,44	0,681
1	35	35	0,329	32,9	2,1	4,41	0,134
2	18	36	0,225	25,5	-7,5	56,25	2,206
3	13	39	0,132	13,2	-0,2	0,04	0,003
4	4	16	0,051	5,1	1,8	3,24	0,450
5	2	10	0,016	1,6			
6	2	12	0,004	0,4			
7	1	7	0,001	0,1			
Total	100	155		100			3,474

Fonte: Montgomery (2003)

Estes resultados quando multiplicados por $n=100$ fornecem os E_i , chegando-se, por fim, ao valor do χ^2 , por meio da expressão (3.1), sendo seu cálculo ilustrado na própria tabela.

Deve-se notar que a condição $E_i \geq 5$ não é satisfeita para os valores 5, 6, 7 da variável. Logo, juntam-se esses valores ao valor 4, passando a considerar o

conjunto de valores $X \geq 4$ com frequência observada 9 e frequência esperada 7,2. O valor χ_v^2 calculado pela fórmula (3.1) foi 3,474.

Para determinação do χ_v^2 crítico, o número de graus de liberdade deverá ser $v = k - 1 - m = 5 - 1 - 1 = 3$, pois houve cinco parcelas e estima-se um parâmetro a partir da amostra. Seja $\alpha = 5\%$. Logo, $\chi^2_{crítico} = \chi_{3;5\%}^2 = 7,815$.

Como $3,474 < 7,815$, não se pode rejeitar H_0 , concluindo-se que a variável adere razoavelmente bem ao modelo Poisson.

3.8.2 Método de Kolmogorov-Smirnov

A prova de Kolmogorov Smirnov é, também, uma prova de aderência. Ela diz respeito ao grau de concordância entre a distribuição de um conjunto de valores amostrais observados e determinada distribuição teórica específica, determinando se os valores da amostra podem ser considerados como provenientes de uma população com aquela distribuição teórica.

A prova procura especificar a distribuição de frequência acumulada que ocorreria sob a distribuição teórica, e compará-la com a distribuição de frequência acumulada observada. A distribuição teórica representa o que se poderia esperar sob H_0 e determina o ponto em que essas duas distribuições (teórica e observada) acusam maior divergência. A referência à distribuição amostral indica se essa diferença máxima pode ser atribuída ao acaso.

Seja $F_0(X)$ uma distribuição de frequência acumulada completamente especificada, isto é, a distribuição de frequência acumulada, teórica, sob H_0 . Para qualquer valor de X , o valor de $F_0(X)$ é a proporção de casos esperados com escores iguais a, ou menores do que X .

Seja $S_N(X)$ a distribuição de frequência acumulada de uma amostra aleatória de n observações. Quando X é qualquer escore possível $S_N(X) = \frac{K}{N}$, onde K é o número de observações não superiores a X .

Ora, pela hipótese de nulidade, de que a amostra tenha sido extraída da distribuição teórica especificada, espera-se que, para cada valor X , $S_N(X)$ esteja

suficientemente próximo de $F_0(X)$. Isto é, sob H_0 , espera-se que as diferenças entre $S_N(X)$ e $F_0(X)$ sejam pequenas e estejam dentro dos limites dos erros aleatórios. A prova de Kolmogorov Smirnov focaliza a maior dessas diferenças. O maior valor de $F_0(X) - S_N(X)$ é chamado desvio máximo D:

$$D = \text{máximo} |F_0(X) - S_N(X)|$$

A distribuição amostral de D , sob H_0 , é conhecida pois existem tabelas que dão os valores críticos dessa distribuição amostral. Para maiores esclarecimentos ver exemplo em SIEGEL (1975).

Segundo Chwif & Medina (2006) o processo de modelagem de dados termina com algum teste estatístico para determinar se o modelo probabilístico selecionado tem ou não aderência ao conjunto de dados observados. Escolhe-se certo nível de significância e, se o valor obtido da amostra for menor que o valor crítico tabelado, então a hipótese não é rejeitada.

Em trabalhos técnicos e softwares, trabalha-se, também com o *p-valor*, ou nível descritivo, que representa o menor nível de significância que pode ser assumido para se rejeitar a hipótese de aderência, ou seja:

- Se $p\text{-valor} \leq \alpha$, então H_0 é rejeitada ao nível de significância α ;
- Se $p\text{-valor} > \alpha$, então, H_0 não é rejeitada ao nível de significância α .

Portanto, quanto menor o *p-valor*, mais razões temos para rejeitar a hipótese de aderência. O Quadro 1 apresenta faixa de valores para o *p-valor*.

Quadro 1 – Valores para p-valor

VALOR	CRITÉRIO
$p\text{-valor} < 0,01$	Evidência forte contra a hipótese de aderência
$0,01 \leq p\text{-valor} < 0,05$	Evidência moderada contra a hipótese de aderência
$0,05 \leq p\text{-valor} < 0,10$	Evidência potencial contra a hipótese de aderência
$0,10 \leq p\text{-valor}$	Evidência fraca ou inexistente contra a hipótese de aderência

Fonte: Chwif & Medina (2006)

O *Input Analyzer*, usa o *p*-valor para verificar a qualidade do ajustamento dos dados à determinada distribuição de probabilidades.

Seja o Exemplo 4, sobre o uso do *p*-valor, que se encontra em Montgomery (2003):

Exemplo 4: “O número de defeitos nas placas de circuito impresso supostamente segue a distribuição Poisson conforme apresentado na Tabela 6”.

Tabela 6 - Defeitos em placas de circuito impresso

Número de defeitos	Frequência observada
0	32
1	15
2	9
3	4

Fonte: Montgomery(2003)

Uma amostra aleatória de 60 placas impressas foi coletada e o número de defeitos observado. A média da distribuição de Poisson considerada nesse exemplo é desconhecida e tem de ser estimada a partir dos dados da amostra. A estimativa do número médio de defeitos por placa é a média amostral $(32*0+15*1+9*2+4*3)/60=0,75$.

A partir da distribuição de Poisson com parâmetro 0,75, podemos calcular p_i , a probabilidade teórica utilizada na hipótese, associada com o *i-ésimo* intervalo de classe. Uma vez que cada intervalo de classe corresponde a um número particular de defeitos, pode-se encontrar p_i como se segue:

$$p_1 = (P = 0) = \frac{e^{-0,75} (0,75)^0}{0!} = 0,472$$

$$p_2 = (P = 1) = \frac{e^{-0,75} (0,75)^1}{1!} = 0,354$$

$$p_3 = (P = 2) = \frac{e^{-0,75} (0,75)^2}{2!} = 0,133$$

$$P_4 = P(X \geq 3) = 1 - (p_1 + p_2 + p_3) = 0,041$$

As frequências esperadas são calculadas pela multiplicação do tamanho da amostra pelas probabilidades p_i , isto é, $E_i = np_i$ e são mostradas na Tabela 7.

Tabela 7 – Frequências esperadas

Número de defeitos	Probabilidade	Frequência Esperada
0	0,472	28,32
1	0,354	21,24
2	0,133	7,98
3 (ou mais)	0,041	2,46

Fonte: Montgomery (2003)

Já que a frequência esperada na última célula é menor do que três, combinam-se as duas últimas células, conforme mostrado na Tabela 8.

A estatística de teste qui-quadrado terá $k-m-1=3-1-1=1$ graus de liberdade, porque a média da distribuição de Poisson foi estimada a partir desses dados. O procedimento para o teste de hipóteses pode ser aplicado usando $\alpha = 0,05$, conforme se segue:

Tabela 8 – frequências observadas e esperadas

Número de defeitos	Frequência Observada	Frequência Esperada
0	32	28,32
1	15	21,24
2 (ou mais)	13	10,44

Fonte: Montgomery (2003)

1. A variável de interesse é a forma de distribuição de defeitos nas placas de circuito impresso;
2. H_0 : a forma da distribuição de defeitos é Poisson;
3. H_1 : a forma da distribuição de defeitos não é Poisson;
4. $\alpha = 0,05$
5. A estatística de teste é:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{O_i - E_i}{\sqrt{E_i}} \right)^2$$

Rejeita-se H_0 se $H_0 : \chi_0^2 > \chi_{0,05,1}^2 = 3,84$

Cálculos:

$$\chi_0^2 = \frac{(32 - 28,32)^2}{28,32} + \frac{(15 - 21,24)^2}{21,24} + \frac{(13 - 10,44)^2}{10,44} = 2,94$$

Conclusões: Uma vez $\chi_0^2 = 2,94 < \chi_{0,05,1}^2 = 3,84$, não se pode rejeitar a hipótese de que a distribuição de defeitos nas placas de circuito impresso é Poisson H_0 . O p-valor para o teste é 0,0864.