3 Retorno, Marcação a Mercado e Estimadores de Volatilidade

3.1. Retorno de um Ativo

Grande parte dos estudos envolve retorno ao invés de preços. Dentre as principais razões, destaca-se o fato de séries de retornos serem mais fáceis de manipular que as séries de preços, porque sua forma possui propriedades estatísticas mais atrativas. Existem, entretanto, algumas definições diferentes de retorno que serão abordadas a seguir.

3.1.1. Retorno Aritmético

É o mais simples de ser calculado e para um único período pode ser obtido da seguinte maneira:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \qquad (7)$$

onde: R_t é o retorno no período t;

P_t é o preço no período t.

Para múltiplos períodos, tem-se:

$$R_{t,k} = \frac{P_t}{P_{t-k}} - 1$$

$$R_{t,k} + 1 = \frac{P_t}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \ldots \times \frac{P_{t-(k-1)}}{P_{t-k}}$$

$$R_{t,k}+1=\frac{P_t}{P_{t-k}}=(1+R_t)\times(1+R_{t-1})\times\ldots\times(1+R_{t-(k-1)})$$

$$R_{t,k}=\left[\prod_{i=0}^{k-1}(1+R_{t-i})\right]-1 \tag{8}$$

3.1.2.
Retorno Logarítmico

Consiste no logaritmo natural do retorno aritmético.

$$r_t=\ln(1+R_t)=\ln\frac{P_t}{P_{t-1}}=\ln P_t-\ln P_{t-1}=p_t-p_{t-1} \tag{9}$$

Uma das grandes vantagens dos retornos logarítmicos é que, para múltiplos períodos de tempo, o retorno é composto pela simples soma dos retornos em cada período de tempo, como pode ser visto a seguir.

$$r_{t,k}=\ln(1+R_{t,k})=\ln\left[(1+R_t)\times(1+R_{t-1})\times\ldots\times(1+R_{t-(k-1)})\right]$$

$$r_{t,k}=\ln(1+R_t)+\ln(1+R_{t-1})+\ldots+\ln(1+R_{t-(k-1)})$$

$$r_{t,k}=r_t+r_{t-1}+\ldots+r_{t-(k+1)} \tag{10}$$

Quando os retornos são pequenos, o valor do retorno logarítmico se aproxima muito do retorno aritmético, ou seja, satisfeita esta condição, pode-se usar as séries dos retornos logarítmicos dos ativos no lugar do retorno aritmético.

Segundo a eq.(9), tem-se:

$$r_t=\ln(1+R_t)$$

Através da expansão de Taylor:

$$r_t=\ln(1+R_t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}R_t^k=R_t-\frac{1}{2}R_t^2+\frac{1}{3}R_t^3-\ldots$$

Se R_t for pequeno, as parcelas que tenham valores R_t^2 e de ordem superiores tenderão a zero, o que acarretará:

$$r_t \cong R_t \tag{11}$$

Na ampla maioria dos casos, os retornos logarítmicos podem e são empregados. Algumas incompatibilidades podem aparecer quando existem mudanças de sinal no valor do objeto em análise, dado que o domínio da função logarítmica é $]0,\infty[$. Para estes casos, os retornos aritméticos são a melhor solução.

3.2.
Marcação a Mercado (*Mark to Market* – MtM)

O conceito de *Mark to Market* ou Marcação a Mercado é fundamental e bastante utilizado. Ele consiste em determinar o valor presente de fluxos futuros que compõem uma carteira, isto é, o valor que se poderia realizar no mercado caso o possuidor do direito de receber essas receitas resolvesse se desfazer desse direito.

O *Mark to Market* possui importantes aplicações práticas: na gestão de investimentos, onde implica numa maior transparência no cálculo do valor das cotas de um fundo de investimento e na gestão de risco, para o cálculo do *Value at Risk*.

O MtM de um ativo de renda-fixa genérico com prazo de vencimento finito e sem cotação diária no mercado é encontrado trazendo-se a valor presente o valor de vencimento do ativo através de um fator de desconto (correspondente à data de vencimento do ativo) obtida da curva de juros em reais.

3.3. Volatilidade

Volatilidade do preço de um ativo corresponde à incerteza em relação a movimentos futuros nos preços deste ativo. A volatilidade por si só já é considerada uma medida de risco.

Em opções, partindo do princípio que o mercado utiliza um modelo para precificá-las, como por exemplo, o modelo de Black & Scholes; partindo do princípio que a opção está corretamente precificada, pode-se obter sua volatilidade, chamada de volatilidade implícita. Estudos empíricos mostram que a volatilidade implícita tende a ser superior àquelas obtidas pela maioria dos modelos estatísticos.

A volatilidade possui características que são comumente encontradas nos ativos. Primeiramente, o valor da volatilidade pode oscilar de período para período. Segundo, a volatilidade parece reagir diferentemente para grandes aumentos de preços ou grandes quedas. Essas características são fundamentais na modelagem da volatilidade, com alguns modelos sendo criados apenas para incorporar tais propriedades.

3.4. Estimadores de volatilidade

Existem vários modelos de estimadores de volatilidade. Portanto, a estimativa de volatilidade depende da escolha de um destes modelos a ser aplicado aos dados históricos dos retornos do ativo, geralmente um modelo de série temporal. Aplicando o modelo escolhido aos dados históricos, tem-se estimativas estatísticas da volatilidade passada. Simultaneamente, geram-se previsões da volatilidade de agora até algum ponto futuro no tempo.

Nas subseções a seguir, serão abordados vários modelos de previsão de volatilidade, que vão desde os mais simples, como o de média móvel com janela fixa, até modelos mais complexos, como os modelos GARCH. Vale lembrar que uma boa “seleção” dos dados levantados torna-se crucial para a eficiência do modelo.

3.4.1.
Média Móvel

Nesta metodologia, a volatilidade corresponde ao desvio padrão dos retornos do ativo contidos dentro de uma janela móvel de extensão fixa. É um estimador muito rudimentar, e pode ser calculado pela eq.(12):

$$\sigma_t = \frac{1}{N}\left[\sum_{t=1}^{N}\left(r_t - \overline{r_t}\right)^2\right]^{1/2} \tag{12}$$

onde: σ_t é a volatilidade do ativo;

r_t é o retorno do dia t;

$\overline{r_t}$ é o média dos retornos;

N é a extensão da janela de tempo.

Uma grande dificuldade deste modelo está em qual valor de N (janela de tempo) escolher. Valores grandes de N sugerem maior precisão na estimação da volatilidade, porém dados históricos muito antigos perdem relevância na previsão do futuro.

O método de média móvel para estimativa de volatilidade pode ser tido como ingênuo por encarar com mesmo grau de relevância todas observações presentes na janela de tempo. Este problema, contudo, será corrigido em modelos subseqüentes. Dentre as vantagens do modelo, este apresenta uma menor sensibilidade a valores extremos e possui apenas um parâmetro, referente ao período passado considerado.

3.4.2. Alisamento Exponencial

Os cálculos da média móvel com alisamento exponencial são semelhantes ao com janela móvel simples, porém há a preocupação de colocar pesos relativos ao momento em que os dados foram colhidos, como forma de minimizar o problema das diferentes datas de levantamento dos dados. Os dados mais recentes recebem maiores pesos, ou seja, tem maior relevância no cálculo da volatilidade. A referência RiskMetrics (1996) faz uma abordagem ampla e completa dessa técnica.

Para estimar a volatilidade através desse método, atribui-se o peso λ (sempre entre 0 e 1) para a previsão anterior, e incorpora-se o quadrado da observação mais recente com um peso (1 - λ), conforme a eq.(13). Os valores de λ sugeridos na documentação RiskMetrics são de 0,94 para observações diárias e 0,97 para observações mensais. Quanto maior o valor de λ, maior é o peso colocado nas observações passadas recentes e mais suave a série se torna. No Brasil, dada a dinâmica mais turbulenta dos mercados, a otimização dos fatores de decaimento costuma apresentar resultados menores, com λ variando de 0,85 a 0,94[6].

$$\sigma_{EWMA,t+1|t} = \left[\sigma^2_{EWMA,t|t-1} \times \lambda + r_t^2 \times (1-\lambda)\right]^{1/2} \tag{13}$$

Onde: λ é o fator de decaimento;

$\sigma_{EWMA,t+1|t}$ é a volatilidade calculada segundo o alisamento exponencial para o dia $t+1$, com informações que incluem o dia t.

Uma simples manipulação da eq.(13) permite observar que o EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) termina por atribuir aos dados pesos que declinam com a sua antiguidade, como pode ser visto na eq.(14).

$$\sigma_{EWMA,t+1|t} = \left[(1-\lambda)\times\left(r_t^2 + r_{t-1}^2 \times \lambda + r_{t-2}^2\lambda^2 + \ldots\right)\right]^{1/2} \tag{14}$$

---

[6] Estes valores são adotados pelo Banco Central do Brasil em seu modelo de VaR.

Por depender de um único parâmetro, o fator de decaimento λ, esse modelo é de fácil implementação, além de possuir boa robustez quanto a erros de especificação.

3.4.3. Os Modelos GARCH

O modelo GARCH (*Generalized Autorregressive Heteroskedastic*) é uma generalização do modelo ARCH, que tem como grande ponto a variância condicional.

Esse modelo possui algumas características que, teoricamente, o tornam um bom preditor de volatilidade em séries financeiras. Dentre elas estão: variâncias que mudam a cada período de tempo e para alguns tipos de retornos.

A estimação da volatilidade pelo modelo GARCH(p,q) pressupõe um processo previsível para a variância dos retornos. Como a eq.(15) mostra, a variância condicional depende da variância condicional imediatamente anterior, bem como da observação mais recente.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i r_{t-i}^2 \qquad (15)$$

onde $p > 0$; $q > 0$; $\alpha_0 > 0$; $\alpha_i \geq 0$ e $\beta_i \geq 0$.

Freqüentemente observa-se que o modelo GARCH(1,1) é suficiente para estimar a volatilidade da maioria dos ativos financeiros, não havendo a necessidade de utilização de processos da família GARCH mais complexos. Portanto, com um diminuto número de parâmetros (três apenas), pode-se aplicar um modelo que aparentemente se adequa bem aos dados financeiros.

Existem ainda outras vantagens no modelo quando comparado aos descritos anteriormente. Em primeiro lugar, os retornos de ativos financeiros não são apropriadamente modelados por um processo independente e identicamente distribuído. Outros estimadores (derivados de médias móveis) baseiam-se em uma volatilidade tida como constante, de forma que a estimativa corrente é tomada como uma previsão. O modelo GARCH descreve um processo de volatilidade condicional, (ou seja, condicionada a um conjunto de informações). Portanto, modelos de variância condicional heterocedástica são considerados mais interessantes para analisar o comportamento da volatilidade nas séries financeiras.

O modelo GARCH possui diversas outras variações, como os modelos EGARCH, IGARCH, FIGARCH, que podem ter desempenho superior dependendo do caso em que sejam aplicados.