

## 2 Leilões

Pode-se considerar um leilão qualquer situação em que um conjunto de competidores, os consumidores, fazem ofertas, os lances, por um bem ou conjunto de bens. Sendo assim, existe uma vasta gama de tipos de leilões diferentes. Estes podem variar quanto ao número de bens que são ofertados simultaneamente, a possibilidade de se fazer lances por conjuntos de bens, a quantidade de bens que cada consumidor pode comprar além de outros detalhes.

Nas seções a seguir, veremos os dois principais tipos de leilões existentes, os leilões unitários, onde existe somente um exemplar de um único bem a venda e os leilões de múltiplos bens, que, por sua vez, abrangem diversos sub-tipos de leilões. Antes, porém, definiremos alguns conceitos que nos ajudarão no estudo de leilões. Para facilitar a leitura, consideramos nas definições a seguir que um bem pode representar tanto um bem individual quanto um conjunto de bens.

**Definição 2.1** *A **avaliação** de um consumidor por um bem é o valor que ele acredita que este bem realmente valha, ou seja, é o máximo que este consumidor estaria disposto a pagar por este bem.*

**Definição 2.2** *O **lance** de um consumidor por um bem é o maior valor que ele se compromete a pagar por um determinado bem. De maneira geral, um lance maior sempre anula um lance menor, exceto se observado o contrário nas regras de um leilão.*

Podemos perceber que enquanto a avaliação é um valor privado do consumidor, isto é, ele não é obrigado a revelá-lo, o lance é um valor público. A diferença entre estes dois conceitos está ilustrada na Figura 2.1, onde vemos que apenas os lances de cada consumidor são revelados ao leiloeiro. Deve-se reparar que apesar do lance ser um valor público, nem sempre ele é revelado aos demais consumidores.

**Definição 2.3** *A **alocação** de um leilão indica para qual consumidor cada bem é vendido. Quando um bem não é vendido, ele não faz parte da alocação. A Figura 2.2 ilustra este conceito.*

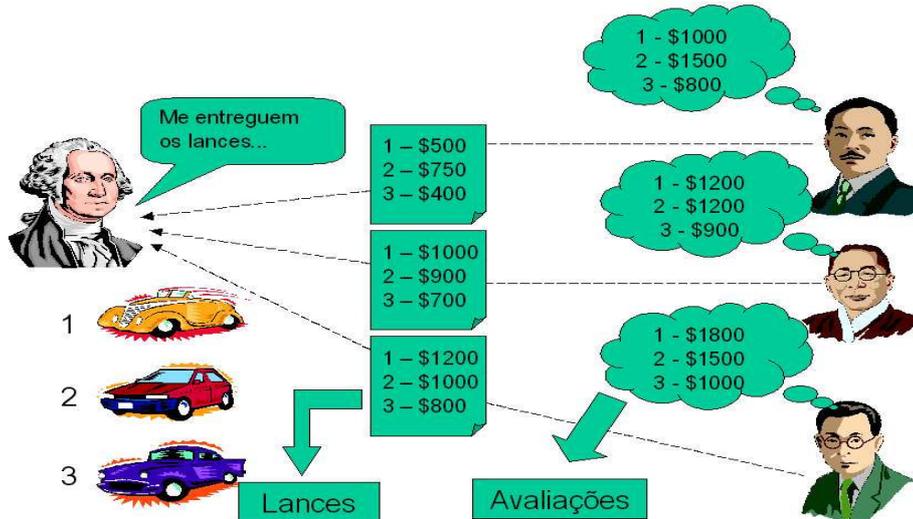


Figura 2.1: Lances são valores públicos e avaliações são valores privados.

**Definição 2.4** *Todo bem vendido tem um **preço** associado a ele, conforme podemos ver na Figura 2.2. Este é o valor que deve ser pago pelo consumidor para o qual o bem foi alocado e deve sempre ser igual ou inferior ao lance.*

**Definição 2.5** *O **lucro** de um consumidor na compra de um bem é igual ao valor da avaliação dele pelo bem menos o preço pago. Consumidores racionais buscam maximizar o lucro. Este conceito está ilustrado na Figura 2.2.*

**Definição 2.6** *A **arrecadação** ou **receita** de um leilão é igual à soma dos preços de todos os bens vendidos. Este conceito está ilustrado na Figura 2.3.*

**Definição 2.7** *A **eficiência econômica** ou **função social** de um leilão, ilustrada na Figura 2.3, é igual à soma das avaliações de cada consumidor pelo conjunto de bens que lhe foi alocado no leilão.*

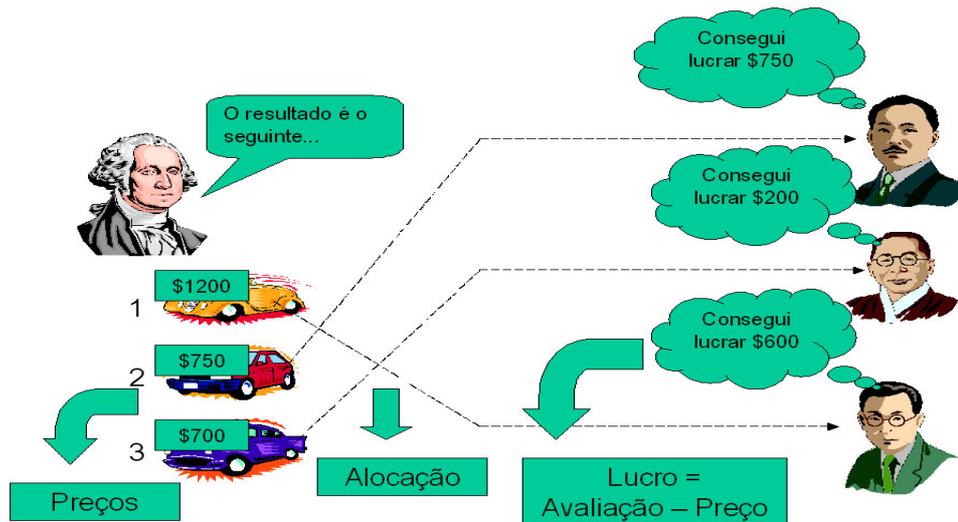


Figura 2.2: O lucro de um consumidor é igual a sua avaliação pelo bem que lhe foi alocado menos o preço pago pelo bem.

## 2.1 Leilões Unitários

Um leilão é dito unitário quando existe um único exemplar de um único bem a venda, ou quando é possível dividir um leilão de múltiplos bens em diversos leilões unitários independentes, isto é, tais que o resultado de um leilão não exerça nenhuma influência no decorrer dos demais. É este o tipo mais comum.

Ao pensar em um leilão deste tipo, a maior parte das pessoas logo o relaciona a um mecanismo de leilão conhecido na literatura como Leilão Inglês, onde são feitos sucessivos lances por um bem que é colocado a venda até que não haja nenhum participante disposto a oferecer um valor maior que o do último lance feito, o lance vencedor. O bem é então vendido ao participante que tiver feito o lance vencedor pelo valor deste. Este, porém, não é o único mecanismo existente. Na verdade existe um número potencialmente ilimitado de mecanismos, que podem variar sobre como é feita a definição do valor de venda de um bem, número de rodadas e outros aspectos. A seguir definimos o que é um mecanismo de leilão unitário e apresentamos alguns dos mecanismos existentes.

**Definição 2.8** *Um mecanismo de leilão unitário é um algoritmo que dados um bem, um conjunto de consumidores e uma seqüência de lances, informa quem ganhou o leilão ou que ninguém ganhou e, caso haja um vencedor, também informa o preço de venda do bem, que não pode exceder o valor do maior lance feito pelo consumidor que venceu o leilão.*

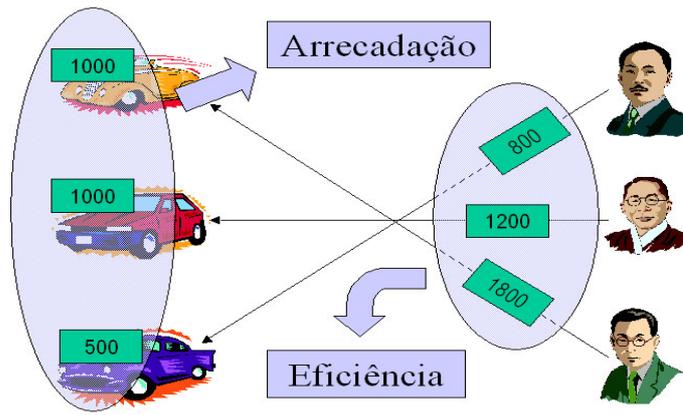


Figura 2.3: A arrecadação é igual à soma dos preços dos bens vendidos, enquanto a eficiência econômica é dada pela soma das avaliações de cada consumidor pelo conjunto de bens que lhe foi alocado.

### 2.1.1 Leilão Inglês

Apesar do nome, Leilão Inglês é um mecanismo e não um leilão propriamente dito. Em geral, estipula-se um valor mínimo de venda, de conhecimento dos participantes, abaixo do qual não pode ser feito nenhum lance. O leilão é comandado pelo leiloeiro e tem início assim que é feito um lance qualquer. O leilão prossegue com os participantes oferecendo lances que superem o valor da maior oferta até o momento por um valor conhecido como incremento mínimo, previamente estipulado. Quando nenhum participante desejar fazer um novo lance, o leilão termina e o bem é vendido ao participante que tiver feito o último lance, o lance vencedor, pelo valor deste. Caso nenhum consumidor ofereça o valor mínimo estipulado, o leilão é encerrado sem que o bem seja vendido.

Se observarmos mais atentamente o funcionamento deste leilão, perceberemos que o que ocorre na prática, é que um consumidor racional continua fazendo novas ofertas enquanto o valor do último lance feito mais o incremento mínimo não ultrapassa a sua avaliação. A partir desse ponto, o consumidor simplesmente se retira do leilão.

Logo, este é um leilão unitário, pois não há mais de um bem a venda simultaneamente, de múltiplas rodadas, já que não existe um limite no número de lances que pode ser feito, desde que se respeite o incremento mínimo, e de propostas abertas, dado que todos os participantes têm conhecimento sobre os lances dos demais. Se houver um valor mínimo de venda do bem, dizemos que o leilão tem um **preço de reserva**.

**Definição 2.9** O *preço de reserva* de um bem é o menor preço pelo qual

*o bem pode ser vendido. Quando não se define o preço de reserva de um bem, podemos considerá-lo como sendo zero.*

### 2.1.2

#### Mecanismo Ótimo de Rodada Única

Existem cenários em que o custo da comunicação é insignificante, quando, por exemplo, várias pessoas estão reunidas em uma mesma sala e fazem os lances utilizando a própria voz. Em outros casos porém, não é possível reunir todos os participantes em um mesmo lugar, seja devido ao número de participantes seja devido a localização de cada um. Nestes casos, o custo da comunicação exerce influência no andamento do leilão. Por custo, expressamos não somente o custo propriamente dito de se informar ao leiloeiro o valor do lance, como também o tempo que isso leva, a infraestrutura necessária, etc. Logo, existe um interesse em se projetar leilões que funcionem com uma única rodada de lances.

Para tal, podemos decidir uma regra simples: Todos os consumidores informam ao leiloeiro o máximo que estão dispostos a pagar e o leiloeiro, assim como ocorre no Leilão Inglês, vende o bem ao consumidor que tiver feito a maior oferta por um preço igual ao valor desta. Aparentemente, isto resolve o problema, exceto por um problema, pequeno mas fundamental: o que estimularia os consumidores a falar a verdade quanto às suas avaliações? Não poderiam os consumidores obter um lucro maior caso mentissem? Vejamos esse problema com mais detalhes.

Evidentemente, do ponto de vista do leiloeiro há o objetivo de alcançar a maior arrecadação possível enquanto que, do ponto de vista dos consumidores, o objetivo é comprar o bem pelo menor valor possível. Podemos perceber um jogo entre os interesses do leiloeiro e dos participantes, que é na verdade o objeto de estudo da Teoria dos Jogos.

Qual seria então o defeito no mecanismo proposto? Para o consumidor que venceu o leilão, seu lucro aumentaria se ele diminuísse o valor do seu lance para um valor infinitesimalmente maior que o valor do segundo maior lance, pois, então, ele continuaria levando o bem mas pagando um preço menor, aumentando assim o seu lucro, tal como o definimos. Como vimos, neste mecanismo os consumidores podem aumentar seu lucro por mentirem quanto às suas avaliações, por isso, dizemos que o mecanismo não é **revelador**.

**Definição 2.10** *Um mecanismo é **revelador** quando, sob nenhuma hipótese, um consumidor pode alcançar um lucro maior por ter mentido sobre as suas avaliações.*

**Exemplo 1** *João, Carlos e Daniel estão interessados numa raquete de tênis, mas João é um aficionado pelo esporte. Digamos que as avaliações dos três pela raquete são, respectivamente, \$100.00, \$40.00 e \$30.00. Se os três ofertassem suas avaliações, João compraria a raquete, porém seu lucro, assim como o dos outros participantes seria zero. Caso João mentisse e oferecesse \$50.00, ele ainda assim compraria a raquete, porém, seu lucro seria de \$50.00.*

Fazendo uma análise mais cuidadosa, percebemos que neste mecanismo nunca é interessante para o consumidor oferecer um lance igual a sua avaliação, pois seu lucro seria sempre zero, independente de quem compre o bem.

O problema de mecanismos não reveladores é que não existe nenhum parâmetro para otimização quando nada é conhecido sobre a crença dos participantes, já que os valores dos lances dependem exclusivamente da estratégia adotada por cada consumidor, o que é imprevisível. Quando existe algum conhecimento sobre a crença dos participantes, é possível calcular um Equilíbrio de Nash, porém ao custo de complicados cálculos matemáticos. Uma das vantagens dos mecanismos reveladores é o fato de eles estimularem os consumidores a revelar suas avaliações, sendo possível, assim, prever a arrecadação do leilão.

### 2.1.3

#### **Mecanismo Vickrey**

Este mecanismo foi proposto por Vickrey em (17). Ele se baseia na observação que no Leilão Inglês, dada a hipótese de consumidores racionais, vence o leilão aquele que tiver a maior avaliação pelo bem. O preço de venda é igual ao valor da segunda maior avaliação pelo bem, exceto, talvez, pelo valor do incremento mínimo. Logo, Vickrey projetou um mecanismo de rodada única que alcança praticamente a mesma receita do leilão Inglês. A diferença entre a arrecadação dos dois mecanismos nunca é maior que o valor do incremento mínimo. Além disso, o valor do lance de um consumidor nunca é revelado aos demais, o que em muitos casos pode ser uma vantagem estratégica, já que o fato de ter que revelar aos concorrentes a avaliação por um bem pode inibir a participação de um consumidor.

No mecanismo Vickrey, também conhecido como mecanismo de segundo preço, todos os participantes fazem os seus lances de maneira simultânea e fechada, isto é, somente o leiloeiro toma conhecimento dos valores. Feitos todos os lances, o bem é vendido àquele que tiver feito o maior lance. O preço de venda é igual ao valor do segundo maior lance, por isso a denominação de mecanismo de segundo preço.



Figura 2.4: Mecanismo Vickrey para o Exemplo 1

Podemos mostrar que o lucro dos participantes do leilão é maximizado quando os consumidores oferecem lances iguais às suas avaliações e, por isso, o mecanismo Vickrey é dito revelador. Esta afirmação é válida desde que não haja comunicação entre os consumidores e que um consumidor não considere vantajoso o simples fato de diminuir o lucro de outro.

**Teorema 2.11** *O mecanismo Vickrey é revelador (10).*

**Prova.** Vamos considerar inicialmente o caso de um consumidor que não consegue comprar o bem ao ofertar a sua avaliação. Seu lucro nesse cenário é zero. Se ele mudasse seu lance para um valor menor, continuaria não conseguindo realizar a compra do bem, logo, vamos analisar apenas os casos em que ele aumenta o valor do seu lance. Se a avaliação dele é igual ao valor do maior lance, isto é, ele não compra o bem por causa dos critérios de desempate, ele passará a comprá-lo, porém, continuará tendo lucro zero. Caso sua avaliação seja menor que o valor do maior lance, só haverá alguma mudança no resultado do leilão caso ele aumente o valor do seu lance de modo que este passe a ser o maior lance. Então ele passará a comprar o bem pagando um valor maior que sua avaliação pelo produto, resultando em um lucro negativo.

Vejam agora o caso do consumidor que consegue comprar o bem. Se ele aumentar seu lance, continuará sendo responsável pela maior oferta e, portanto, nada mudará. Estamos interessados então no caso que ele diminua o valor de seu lance de forma que este deixe de ser o lance de maior valor. Lembremos que o lucro inicial do consumidor era não negativo, pois ele comprava o bem pagando um valor menor ou igual à sua avaliação pelo bem. Feitas as mudanças no valor do lance, ele deixa de comprar o bem e, portanto, seu lucro passa a ser zero.

Vimos que nas duas situações o lucro do consumidor ao mentir sobre suas avaliações passa a ser menor ou igual ao que ele tinha ao revelar a verdade e, portanto, o mecanismo Vickrey é revelador. ■

Apesar do mecanismo Vickrey ser revelador, sua receita pode ser muito ruim se comparada à receita máxima que seria obtida por um vendedor onisciente, isto é, um vendedor que conhece as avaliações de cada consumidor por cada bem e que vende o bem para o consumidor com maior avaliação pelo valor desta. O desempenho do mecanismo Vickrey em relação ao deste tal vendedor onisciente piora a medida que aumenta a diferença entre os valores dos dois maiores lances. Digamos, por exemplo, que na Figura 2.4 o lance de João fosse igual ao lance de Carlos elevado a  $x$ , onde  $x$  é um número maior que 1. Então, a arrecadação do mecanismo Vickrey seria igual a arrecadação ótima elevada a  $1/x$ . Alterando o valor de  $x$ , podemos fazer com que o desempenho do mecanismo Vickrey seja tão ruim quanto desejarmos.

## 2.2

### Leilões de Múltiplos Bens

O termo leilões de múltiplos bens é sem dúvida nenhuma muito genérico. Vamos aqui categorizar os diversos leilões de múltiplos bens existentes de acordo com o tipo de objeto sendo oferecido a venda. Evidentemente, toda a teoria que se aplicar a leilões de múltiplos bens pode ser aproveitada para o caso de leilões de bens únicos, porém, vamos mostrar que também é possível generalizar o mecanismo de Vickrey para o caso de múltiplos bens e alcançar um mecanismo com propriedades muito semelhantes conhecido como VCG (17, 03, 07). Quando nos referimos a leilões de múltiplos bens, a palavra múltiplos pode se referir tanto a quantidade de cópias de um bem quanto a diversidade de bens disponíveis, ou seja, o leilão de duas bolas idênticas assim como o leilão de uma raquete e uma bola e o leilão de uma raquete e duas bolas idênticas são todos considerados leilões de múltiplos bens.

#### 2.2.1

##### Leilões de Bens Digitais

Consideramos um bem digital aquele que pode ser copiado a um custo muito baixo, irrisório em relação ao valor do bem. Exemplos de bens desse tipo são eventos pay-per-view de uma emissora de TV a cabo (o custo é de produzir o evento e não de enviar o sinal pelo cabo de televisão), músicas (o valor da mídia é desprezível em relação ao valor do direito autoral) e software (mais uma vez o valor da mídia é desprezível se comparado ao custo

de desenvolvimento). Consideramos para efeitos de projeto de mecanismos de leilões de bens deste tipo que existe uma quantidade ilimitada de cópias.

O cenário ideal para quem produz bens digitais seria vender o bem a todos os interessados cobrando de cada um exatamente o valor que eles estivessem dispostos a pagar. Evidentemente, assim como acontecia no caso de leilões unitários, não é trivial conhecer a real avaliação de um consumidor por um bem, principalmente quando mentir sobre a avaliação pode ser benéfico ao consumidor. Neste caso, por exemplo, quanto mais baixo for o valor que o consumidor disser que está disposto a pagar menor será o valor que lhe será cobrado. Outro problema que isso acarretaria é que o vendedor estaria cobrando preços diferentes pelo mesmo produto. Mesmo quando um consumidor está disposto a pagar um preço maior do que outra pessoa por um produto, ele espera ser cobrado exatamente o mesmo valor que os demais consumidores que efetivamente comprarem aquele bem.

Uma outra solução possível é cobrar o mesmo preço pelo bem de todos os consumidores. Todos os consumidores que fizerem lances acima do preço determinado compram o bem. O preço é escolhido como sendo aquele que forneça a maior arrecadação possível para o leiloeiro. O preço escolhido será igual ao valor de um dos lances (especificamente do lance de menor valor dentre os lances feitos pelos consumidores que compraram o bem). Dessa forma, no entanto, é possível para o consumidor cujo lance determinou o preço de venda obter um lucro maior ao diminuir o valor do seu lance. Logo, este também não é um mecanismo revelador.

Outra alternativa seria definir antecipadamente o número de cópias que serão vendidas. Sendo  $n$  este número, o bem seria vendido aos consumidores responsáveis pelos  $n$  maiores lances pelo valor do  $(n + 1)$ -ésimo maior lance. Quando  $n$  é igual a 1, este é o mecanismo Vickrey descrito anteriormente. A análise feita do mecanismo Vickrey se encaixa perfeitamente aqui. Este é um mecanismo revelador porém não há nenhuma garantia de receita.

### 2.2.2

#### Leilões Combinatórios Gerais

Em leilões combinatórios gerais não há restrições quanto aos lances que podem ser feitos. Existe um conjunto de produtos a venda, e cada produto tem uma quantidade limitada de cópias. Os consumidores podem fazer lances por grupos de produtos e podem ter mais de um lance vencedor. Além disso, pode existir um número ilimitado de rodadas.

As regras são tão flexíveis que praticamente qualquer leilão se encaixa na definição de um leilão combinatório geral, exceto os que consideram que

existe um número ilimitado de bens. Decidir o sub-conjunto de lances que fornece a receita máxima sem violar as restrições do número de cópias de cada bem é um problema muito difícil em termos computacionais. Por isso, estes tipos de leilões raramente são utilizados na prática. Ao invés disso, definem-se algumas regras que tornam possível sua computação como, por exemplo, nos leilões de espectros de banda realizados pela FCC.

### 2.2.3

#### Leilões do FCC

A FCC, que é a comissão federal de comunicações dos Estados Unidos, antigamente concedia espectros de banda às empresas mediante à análise de propostas de compra. Após diversos estudos, concluiu-se que esta análise estava longe de ser imparcial e levantava muitas suspeitas de favorecimento. Ela passou então a adotar sorteios ao invés das propostas. Apesar deste método jamais ter tido sua imparcialidade questionada, ele não era considerado justo pois não cedia os espectros àquelas pessoas ou empresas que os valorizavam e tinham projetos de interesse público para eles, se tornando uma simples loteria que transformava pessoas sem nenhuma experiência na área de telecomunicações em concessionárias de espectros de banda, o que no fim servia apenas para fazer destes “sortudos” milionários da noite para o dia, através da venda da licença de exploração.

A comissão passou então a adotar um modelo de leilão combinatório com regras públicas. O objetivo inicial era ter um conjunto de bandas a venda e permitir que os interessados fizessem lances por quaisquer sub-conjuntos dessas bandas. Devido ao fato que se poderia gerar um problema sem solução prática (para um método ser razoável, estipulou-se que ele não poderia demorar mais do que algumas poucas horas para apresentar uma saída dado um conjunto de lances), foram fixadas algumas restrições ao modelo de leilões combinatórios gerais.

As restrições impostas foram quanto ao tamanho de cada sub-conjunto, a quantidade de lances de um mesmo consumidor numa mesma rodada e quais sub-conjuntos são permitidos. Evidentemente, não houve preocupação quanto ao número de cópias de cada bem, já que este é por definição igual a um, isto é, considera-se cada espectro único.

A quantidade de restrições e a maneira de calcular os preços e a alocação foi mudando desde a realização do primeiro leilão do FCC no início dos anos 90, sempre buscando a relaxação cada vez maior das restrições e o aperfeiçoamento do mecanismo. Para um aprofundamento sobre o tema, é recomendável a leitura de (08).

## 2.3

### Leilões de Demanda Unitária

Em leilões de demanda unitária, diversos produtos são postos simultaneamente a venda. Cada consumidor pode oferecer lances individuais por todos os produtos, ou seja, não é possível fazer lances por conjuntos de produtos. Além disso, considera-se que todos os bens são distintos e que só pode ser vendido, no máximo, um bem a cada consumidor.

Um exemplo de leilão de demanda unitária seria um leilão de imóveis, onde os participantes podem ter interesse em mais de um item do leilão mas desejam, de fato, adquirir apenas uma das unidades pelas quais têm interesse. Em geral, qualquer leilão de bens conhecidos na Economia como “bens substitutos” (14) podem ser adequadamente modelados como leilões de demanda unitária.

Existem alguns mecanismos clássicos para resolver este problema. Sem dúvida nenhuma, as restrições de que somente um lance pode ser aceito por consumidor e que cada lance envolve sempre um único produto reduz a complexidade computacional dos mecanismos propostos para o problema. A seguir, examinaremos três mecanismos que podem ser utilizados para calcular a saída deste leilão.

#### 2.3.1

##### Mecanismo Ótimo

O mecanismo ótimo é aquele que, dado um conjunto de lances, alcança a receita máxima. Evidentemente, não se trata de um mecanismo revelador, e servirá mais como parâmetro de comparação para os resultados dos demais mecanismos.

Neste mecanismo, quando o bem  $j$  é vendido ao consumidor  $i$ , seu preço de venda é exatamente igual ao valor do maior lance do consumidor  $i$  por  $j$ . Quando um bem não é vendido, seu preço deve ser igual a zero. A alocação bem-consumidor escolhida por este mecanismo é aquela que maximiza a soma dos preços de venda dos bens. Mais formalmente:

**Definição 2.12** *No mecanismo ótimo, se um item  $j$  é alocado a um consumidor  $i$ , o preço de venda de  $j$  é igual ao valor do maior lance de  $i$  por  $j$ . Sua alocação é aquela que gera a maior receita dentre todas que alocam no máximo um item por consumidor.*

As Figuras 2.1 e 2.2 podem ser vistas como um exemplo do funcionamento de um mecanismo ótimo para um leilão de demanda unitária.

Como mencionamos no início, claramente este não é um mecanismo revelador, pois é possível para um consumidor auferir um lucro maior quando

fizer lances menores que suas avaliações. Apesar disso, este é um mecanismo muito importante para ser usado como referência para outros mecanismos, pois, fixado um conjunto de lances, sua arrecadação é um limite superior tanto para a arrecadação quanto para a eficiência de qualquer outro mecanismo. Em geral, ele é utilizado como uma métrica quando o conjunto de lances é igual ao conjunto de avaliações.

### 2.3.2 Mecanismo VCG

Como mencionamos anteriormente, é possível generalizarmos o mecanismo Vickrey para o caso de leilões de múltiplos bens. De fato, esta generalização se encaixa perfeitamente para o caso de leilões de demanda unitária.

No mecanismo Vickrey-Clarke-Groves, ou VCG (17, 03, 07), a alocação bem-consumidor é igual a alocação do mecanismo ótimo.

A determinação do preço de venda, no entanto, segue uma lógica um pouco mais complicada. Lembremos que no mecanismo de Vickrey, o preço de venda do bem é igual ao do segundo maior lance feito por este bem. Podemos pensar, então, que o preço de venda do mecanismo Vickrey é calculado da seguinte forma:

#### Mecanismo Vickrey

- Seja  $i$  o consumidor que fez o maior lance do leilão,  $l_i$ , e que é, portanto, o consumidor que de fato compra o bem;
- Seja  $r = l_i$  a receita ótima para o conjunto de lances que foi passado ao Mecanismo Vickrey;
- Retire o consumidor  $i$  do leilão, isto é, desconsidere todos os lances efetuados por  $i$  e recalcule a receita que seria alcançada pelo mecanismo ótimo com os lances restantes, sendo esta receita representada por  $r_{-i}$ ; e
- O preço de venda do bem deve ser igual a  $l_i - r + r_{-i}$ , que é exatamente igual ao valor do maior lance feito por um consumidor que não o  $i$ .

Generalizando essa mesma estratégia de cálculo de preço para todos os bens, ou seja:

**Mecanismo VCG**

- Seja  $r$  a receita ótima para o conjunto de lances que foi passado ao Mecanismo VCG;
- Para cada bem  $j$  alocado a um consumidor  $i$ :
  - Seja  $l_{i,j}$  o valor do maior lance de  $i$  por  $j$ ;
  - Remova todos os lances feitos pelo consumidor  $i$  e calcule a receita  $r_{-i}$  do mecanismo ótimo para os lances restantes; e
  - O preço de venda de  $j$  deve ser igual a  $l_{i,j} - r + r_{-i}$ ,

temos o mecanismo de leilão conhecido como VCG, em homenagem aos seus autores, Vickrey, Clarkes e Groves. Ele foi descrito originalmente em (17, 03, 07). Como pode-se facilmente perceber, o mecanismo VCG funciona exatamente igual ao mecanismo Vickrey quando só há um bem disponível a venda. Além disso, ele compartilha outra propriedade interessante com o mecanismo Vickrey, que é o fato de ambos serem mecanismos reveladores.

**Exemplo 2** *Considere um leilão com  $n = 4$  consumidores e  $m = 3$  itens. Seja  $\{A, B, C, D\}$  o conjunto de consumidores e  $\{1, 2, 3\}$  o conjunto de bens. Os lances são definidos por:*

- $l_{A,1} = 20$  ;  $l_{A,2} = 15$  ;  $l_{A,3} = 10$  ;
- $l_{B,1} = 15$  ;  $l_{B,2} = 18$  ;  $l_{B,3} = 12$  ;
- $l_{C,1} = 14$  ;  $l_{C,2} = 16$  ;  $l_{C,3} = 14$  ;
- $l_{D,1} = 15$  ;  $l_{D,2} = 15$  ;  $l_{D,3} = 15$ .

*A alocação do mecanismo ótimo é definida pelo seguinte conjunto de pares bem-consumidores:  $\{(1, A); (2, B); (3, D)\}$ . O custo  $r$  desta alocação é  $l_{A,1} + l_{B,2} + l_{D,3} = 20 + 18 + 15 = 53$ .*

*Para calcularmos o preço de venda do produto 1 vendido ao consumidor A, devemos remover A do leilão e recalcular o custo da alocação do mecanismo ótimo. Removendo A do leilão, a alocação do mecanismo ótimo passa a ser  $\{(1, C); (2, B); (3, D)\}$ . O custo  $r_{-A}$  desta alocação é igual a 47. Portanto, o preço de venda do produto 1 deve ser  $l_{A,1} - r + r_{-A} = 20 - 53 + 47 = 14$ .*

*De modo semelhante, ao removermos o consumidor B do leilão o custo  $r_{-B}$  da alocação ótima passa a ser 51, logo, o preço de venda do produto 2 deve ser  $l_{B,2} - r + r_{-B} = 18 - 53 + 51 = 16$ . Finalmente, o preço de venda do produto 3 deve ser  $l_{D,3} - r + r_{-D} = 15 - 53 + 52 = 14$ .*

**Teorema 2.13** *O mecanismo de Vickrey-Clarke-Groves é revelador.*

**Prova.** De acordo com a definição de mecanismo revelador, não deve ser possível a um consumidor obter vantagem por mentir quanto às suas avaliações. Provaremos que o mecanismo VCG é revelador mostrando que caso um consumidor  $i$  qualquer que participe do leilão resolva oferecer lances diferentes das suas avaliações, ele auferirá um lucro menor ou igual àquele que ele obtém quando revela as suas avaliações.

Nesta prova, usaremos as seguintes definições:

- Considere que há  $n$  consumidores participando do leilão;
- Apenas o consumidor  $i$  muda seus lances, isto é, assumimos que os lances de todos os demais consumidores são fixos.
- Seja  $R$  a receita obtida pelo mecanismo ótimo quando o consumidor  $i$  faz lances iguais às suas avaliações;
- Seja  $R'$  a receita obtida pelo mecanismo ótimo quando o consumidor  $i$  mente quanto às suas avaliações;
- Seja  $R_{-i}$  a receita obtida pelo mecanismo ótimo quando o consumidor  $i$  é removido do leilão;
  - $R_{-i}$  não depende dos lances do consumidor  $i$  e, portanto, não muda quando ele decide mentir.
- Sejam  $l_1, \dots, l_n$  os valores dos lances dos consumidores pelos bens que lhes são atribuídos quando  $i$  decide falar a verdade;
- Sejam  $l'_1, \dots, l'_n$  os lances dos consumidores pelos bens que adquirem quando o consumidor  $i$  decide mentir;
- Seja  $v_i$  a avaliação do consumidor  $i$  pelo bem que ele compra quando decide falar a verdade; e
- Seja  $v'_i$  a avaliação do consumidor  $i$  pelo bem que compra quando mente.

Por definição, o lucro do consumidor  $i$ ,  $pr(i)$ , quando fala a verdade é igual a sua avaliação pelo bem comprado menos o preço pago por ele, ou seja,

$$pr(i) = v_i - l_i + R - R_{-i}$$

$$pr(i) = R - R_{-i}.$$

Quando decide mentir, seu lucro,  $pr'(i)$ , passa a ser:

$$pr'(i) = v'_i - l'_i + R' - R_{-i}.$$

Precisamos mostrar, portanto que  $pr(i) \geq pr'(i)$ , ou seja,  $R \geq v'_i - l'_i + R'$ . Podemos reescrever  $R$  como  $\sum_j l_j$ , ou seja,  $R$  é igual ao somatório dos lances de todos os consumidores pelos bens que compram quando  $i$  fala a verdade. Podemos, também, reescrever  $R'$  como sendo  $\sum_j l'_j$ , ou seja, os lances dos consumidores pelos bens que lhes foram atribuídos quando  $i$  mente. Logo, precisamos provar que:

$$\begin{aligned} \sum_j l_j &\geq v'_i - l'_i + \sum_j l'_j \\ \sum_j l_j &\geq v'_i - l'_i + (l'_i + \sum_{j \neq i} l'_j) \\ v_i + \sum_{j \neq i} l_j &\geq v'_i + \sum_{j \neq i} l'_j. \end{aligned}$$

Como ambos os lados da inequação dependem apenas das avaliações do consumidor  $i$  e dos lances dos demais consumidores, valores que consideramos fixos independentemente da decisão do consumidor  $i$  quanto a mentir ou não, a afirmação é verdadeira. Repare que, para ela ser falsa, seria necessário que o mecanismo ótimo não escolhesse a alocação bem-consumidor que maximiza sua receita quando  $i$  fala a verdade. ■

Infelizmente, tal qual o mecanismo Vickrey, não há nenhuma garantia de arrecadação. De fato, para entradas anômalas é possível que o VCG tenha uma arrecadação muito ruim, até mesmo igual a zero.

**Exemplo 3** *Seja um leilão com igual número de bens e de consumidores. Seja  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$  o conjunto de consumidores e  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  o conjunto de bens. O lance de um consumidor  $c_i$  por um bem  $b_j$  é igual a 100 quando  $i = j$  e 0, caso contrário. Isto significa que cada consumidor está interessado em um bem diferente e que, por consequência, para cada bem só é oferecido um lance.*

*Evidentemente, a alocação do Mecanismo VCG, que deve ser igual à do mecanismo ótimo, definirá a venda de cada bem  $b_j$  ao consumidor  $c_j$ . Desta forma: nenhum bem é vendido a mais de um consumidor ; e nenhum consumidor compra mais de um bem. A arrecadação  $r$  do mecanismo ótimo seria  $100.n$ .*

*É fácil perceber que qualquer consumidor  $c_i$  que seja retirado do leilão implica que a arrecadação  $r'_{-i}$  do mecanismo passe a ser de  $100.(n - 1) = 100.n - 100$ . Assim, o preço pago por qualquer consumidor é:*

$$100 - r + r'_{-i} = 100 - 100.n + 100.n - 100 = 0$$

Com isso, a receita alcançada pelo mecanismo VCG para o referido conjunto de lances é igual a zero.

**Exemplo 4** Considere outro leilão com igual número de bens e de consumidores. Seja  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$  o conjunto de consumidores e  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  o conjunto de bens. Todos os consumidores fazem lances por todos os produtos e todos os lances são iguais a 100.

Neste caso, como todos os lances são iguais e todos os consumidores fazem ofertas por todos os produtos, qualquer alocação que venda todos os itens tem um custo igual a  $100.n$ .

É fácil perceber que qualquer consumidor  $c_i$  que seja retirado do leilão implica que a arrecadação  $r'_{-i}$  do mecanismo ótimo passe a ser de  $100.(n - 1) = 100.n - 100$ . Assim, o preço pago por qualquer consumidor é:

$$100 - r + r'_{-i} = 100 - 100.n + 100.n - 100 = 0$$

Com isso, a receita alcançada pelo mecanismo VCG para o referido conjunto de lances é igual a zero.

Apesar de não oferecer nenhuma garantia de arrecadação, o mecanismo VCG alcança, por definição, eficiência máxima, pois a alocação bem-consumidor é feita com base no mecanismo ótimo e os lances dos consumidores são iguais às avaliações.

### 2.3.3

#### Um Mecanismo com Garantia de Receita

Em (09), Hartline et al. propõem um mecanismo para o leilão de demanda unitária que fornece uma alocação *envy-free* (livre de inveja, em uma tradução livre).

**Definição 2.14** Uma alocação é dita *envy-free* quando, dados os preços dos itens, nenhum consumidor preferiria mudar o item que lhe foi alocado. Caso nenhum item tenha sido alocado a um consumidor, significa que para todos os produtos o lance do consumidor pelo produto foi menor do que o preço de venda deste.

No trabalho referido, os autores sugerem uma variação do mecanismo VCG, o mecanismo VCG com preços de reserva, para que seja obtida uma alocação *envy-free*. O mecanismo proposto não é revelador e se baseia em conhecimento prévio sobre a faixa dos lances para alcançar uma receita

$\Omega(\mathcal{T}/\log h)$ , onde  $\mathcal{T}$  é a receita ótima para o conjunto de lances passado ao mecanismo e  $h$  é a razão entre os valores dos dois maiores lances. Basicamente, o mecanismo proposto consiste em:

#### Um Mecanismo com Garantia de Receita

- Seja  $x$  o valor do maior lance feito;
- Escolha aleatoriamente, com probabilidade uniforme, um inteiro  $k$  no conjunto  $\{1, \dots, \lfloor \log_2(x) \rfloor\}$ .
- Execute o mecanismo VCG utilizando  $2^k$  como preço de reserva.

Apresentamos a seguir a descrição do mecanismo VCG com preços de reserva, como foi descrito em (09).

#### Mecanismo VCG com Preços de Reserva

O mecanismo VCG com preços de reserva é uma variação do mecanismo VCG original que garante um valor mínimo para a venda dos bens. Seja este valor mínimo, que é um parâmetro de entrada do mecanismo, representado por  $p$ . O mecanismo VCG de reserva é, então, definido da seguinte maneira:

**Mecanismo VCG com Preços de Reserva**

- Para cada item, crie dois consumidores virtuais que oferecem  $p$  pelo item em questão e nada pelos demais, o que garante que todos os bens alocados pelo mecanismo VCG a consumidores virtuais têm preço igual a  $p$ ;
- Após a criação de todos os consumidores, execute o mecanismo VCG;
  - Como todos os itens têm pelo menos dois lances maiores ou iguais a  $p$ , nenhum item terá preço de venda menor que  $p$ ; e
  - Repare que se nenhum item foi alocado a um consumidor qualquer, então ele não ofereceu mais do que  $p$  por nenhum dos bens alocados a consumidores virtuais.
- Para cada item  $j$  alocado a um consumidor artificial com preço  $p$ , encontre um consumidor  $i$  ao qual não tenha sido alocado nenhum item e que tenha feito um lance igual a  $p$  por  $j$ :
  - Venda o bem  $j$  ao consumidor  $i$  pelo mesmo preço  $p$ ; ou
  - Caso tal consumidor não exista, o item  $j$  não deve ser vendido.
- Retorne a alocação e o vetor de preços após realizadas todas as modificações na alocação original do mecanismo VCG.