# 4
# Novos Mecanismos para Leilões de Demanda Unitária

Neste capítulo, são propostos novos mecanismos para **Leilões de Demanda Unitária**. Inicialmente, mostramos qual é o modelo utilizado, em seguida, apresentamos alguns resultados obtidos na área de Grafos e, finalmente, descrevemos os mecanismos propostos para resolver o problema em questão.

## 4.1
## O Modelo

Seja $C = \{1, 2, \ldots, n\}$ um conjunto de consumidores e seja $I$ um conjunto de $k$ itens distintos. Consideramos que os mecanismos aqui propostos são mecanismos de lances-fechados (os valores dos lances de um consumidor não são revelados aos demais consumidores) aonde cada consumidor pode oferecer um lance por cada item em $I$. Um mecanismo para leilões de demanda unitária é uma função que mapeia qualquer conjunto possível de lances em um par $(A, \mathbf{p})$, onde $A$ é uma alocação que indica qual item é vendido a qual consumidor e $\mathbf{p}$ é um vetor que informa o preço de cada bem alocado. A um consumidor $i$ só pode ser alocado um bem $j$ se o seu lance por $j$ não for menor que o preço de venda deste bem. Assumimos que o mecanismo empregado pelo leiloeiro é publicamente conhecido e as seguintes suposições são feitas a respeito dos consumidores:

- Para todo par $(i, j) \in C \times I$, o consumidor $i$ tem uma avaliação privada (não conhecida publicamente) $v_{i,j} \geq 0$ por todos itens $j$. A avaliação $v_{i,j}$ é o preço máximo que $i$ está disposto a pagar por $j$;
- Se o consumidor $i$ compra o item $j$ pagando $p_j$, então seu lucro (utilidade) é $u_i = v_{i,j} - p_j$;
- Todo consumidor é racional e irá realizar lances com o intuito de maximizar seu próprio lucro;
- Não existe conluio de consumidores, ou seja, sob nenhuma hipótese considera-se que os consumidores podem se unir com o objetivo de burlar o leilão; e

– Os consumidores são indistinguíveis do ponto de vista do leiloeiro.

Relembrando alguns conceitos, a receita alcançada por um mecanismo de leilão para um dado conjunto de lances é a soma dos preços pagos pelos bens alocados durante o leilão. A eficiência econômica de um mecanismo de leilão é definida como a soma das avaliações de cada consumidor pelo conjunto de bens adquiridos.

Um mecanismo aleatorizado de leilão é uma distribuição de probabilidade sobre mecanismos determinísticos. Seguindo o proposto em (06), adotamos que um mecanismo revelador aleatorizado é uma distribuição de probabilidade sobre o conjunto de mecanismos determinísticos reveladores.

Para melhor entendermos os resultados, reformulamos alguns dos conceitos apresentados até aqui em termos da teoria de grafos. A matriz de avaliação $\mathbf{v} = (v_{i,j})_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,k}$, que é a entrada de um mecanismo revelador, pode ser vista como um grafo bipartido completo $G$ com pesos nas arestas. Os dois conjuntos de $G$ são, evidentemente, o conjunto de consumidores e de bens, e o peso $c(e_{i,j})$ da aresta $e_{i,j}$ ligando o consumidor $i$ ao bem $j$ é $v_{i,j}$. Portanto, um mecanismo de leilão revelador determinístico $\mathcal{A}$ é uma função que mapeia cada grafo bipartido $G$ em um par $(M, \mathbf{p})$, aonde $M = \cup_{i=1}^{|M|} e_i$ é um emparelhamento de $G$ e $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_{|M|})$ é um vetor definindo o preço de venda de todo item alocado por $M$, isto é, $p_i$ é o preço de venda de um item tocado por uma aresta $e_i \in M$. Obrigatoriamente, devemos ter $p_i \leq c(e_i)$, para todo $i = 1, \ldots, M$. A receita e a eficiência de $\mathcal{A}$, para a entrada $G$, são a soma dos preços atribuídos aos itens que pertencem a $M$ e a soma dos custos das arestas de $M$, respectivamente. Claramente, para qualquer grafo, não é possível que a receita seja maior que a eficiência.



## 4.2 Resultados

Para que possamos quantificar os resultados obtidos, necessitamos estabelecer algumas definições. Para uma matriz de avaliações $\mathbf{v}$, seja $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ a maior eficiência que pode ser alcançada por um mecanismo revelador. $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ é exatamente o custo do emparelhamento de custo máximo do grafo associado a $\mathbf{v}$. Claramente, $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ é um limite superior tanto para a eficiência quanto para a receita alcançadas por qualquer mecanismo revelador com entrada $\mathbf{v}$. Seja ainda $\mathcal{F}(\mathbf{v})$ a receita máxima de que pode ser obtida por um leiloeiro onisciente. Usamos $s$ para representar $\min\{n, k\}$, isto é, o mínimo entre a quantidade de consumidores e de bens. A probabilidade dos mecanismos aqui propostos alcançarem uma certa eficiência econômica (receita) depende da $\delta$-competitividade do conjunto de avaliações. A $\delta$-competitividade de uma matriz de avaliações $v$ é definida como o número mínimo de consumidores que são capazes de gerar receita de pelo menos $\mathcal{T}(\mathbf{v})/\delta$. Em termos do grafo $G$, associado a $\mathbf{v}$, é o tamanho do menor emparelhamento em $G$ com custo maior ou igual a $\mathcal{T}(\mathbf{v})/\delta$.

Nosso mecanismo orientado à eficiência alcança receita $\Omega(\mathcal{T}(\mathbf{v})/\ln(s))$ e eficiência $\Omega(\mathcal{T}(\mathbf{v}))$ com uma probabilidade de falha que decai exponencialmente com o crescimento da 8-competitividade de $\mathbf{v}$, isto é, o menor número de consumidores que são capazes de gerar receita de pelo menos $1/8 \times \mathcal{T}(\mathbf{v})$.

Por outro lado, nosso mecanismo orientado a receita alcança uma receita $\Omega(\mathcal{F}(\mathbf{v}))$ com probabilidade de falha que decresce exponencialmente com o crescimento da $\ln(s)$-competitividade de $\mathbf{v}$. Ressalte-se que provar um limite de $\Omega(\mathcal{F}(\mathbf{v}))$ é mais forte que provar um limite de $\Omega(\mathcal{T}(\mathbf{v})/\ln(s))$, dado que a desigualdade $\mathcal{F}(\mathbf{v}) \geq \mathcal{T}(\mathbf{v})/\ln(s)$ é sempre verdadeira e, de fato, podemos ter inclusive $\mathcal{F}(\mathbf{v}) = \Omega(\mathcal{T}(\mathbf{v}))$.

## 4.3
## Resultados Teóricos de Grafos

Nesta seção apresentamos alguns resultados sobre a teoria de grafos que são importantes para o projeto e análise dos mecanismos propostos neste capítulo.

Seja $G$ um grafo bipartido completo com pesos nas arestas. Para um consumidor $i$, utilizamos a notação $G_{-i}$ para designar o subgrafo induzido em $G$ após a remoção de $i$ do conjunto de vértices de $G$. Seja $e'$ a aresta de menor peso em um emparelhamento $M$ de $G$. Definimos $\mathcal{F}(M) = |M| \times c(e')$ e $\mathcal{T}(M) = \sum_{e \in M} c(e)$. Usamos $M_G^{\mathcal{T}}$ para representar o maior emparelhamento de $G$ que maximiza $\mathcal{T}(\cdot)$. Semelhantemente, utilizamos $M_G^{\mathcal{F}}$ para representar o maior emparelhamento de $G$ que maximiza $\mathcal{F}(\cdot)$. Definimos $\mathcal{F}_G = \mathcal{F}(M_G^{\mathcal{F}})$ e $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}(M_G^{\mathcal{T}})$. Então, a $\delta$-competitividade de $G$ é o tamanho do menor emparelhamento $M$ que satizfaz $\mathcal{T}(M) \geq \mathcal{T}_G/\delta$. A seguinte proposição apresenta relações entre as métricas $\mathcal{T}(\cdot)$, $\mathcal{F}(\cdot)$ e a competitividade de um grafo.

**Proposição 4.1** *Para todo grafo $G$, temos $\mathcal{F}_G \geq \mathcal{T}_G/\ln(s)$.*

**Prova.** Sejam $e_1, \ldots, e_s$ as arestas de $M_G^{\mathcal{T}}$ ordenadas de forma não-crescente em relação aos seus pesos e seja $e_{j^*}$ a aresta que maximiza a expressão $j^* \times c(e_{j^*})$. Temos que:

$$c(e_i) \leq \frac{j^* \times c(e_{j^*})}{i},$$

para todo $i = 1, \ldots, s$. Somando todas as desigualdades, concluímos que $j^* \times c(e_{j^*}) \geq \mathcal{T}_G / \ln(s)$. Seja $M$ o sub-emparelhamento de $M_G^{\mathcal{T}}$ definido por suas $j^*$ arestas de maior peso. Finalmente, temos que $\mathcal{F}_G \geq \mathcal{F}(M) \geq \mathcal{T}_G / \ln(s)$. ■

**Proposição 4.2** *Se a (*$\ln(s)$*)-competitividade de* $G$ *é igual a* $K$*, então* $|M_G^{\mathcal{F}}| \geq K$.

**Prova.** Se $|M_G^{\mathcal{F}}| < K$, e temos que $\mathcal{T}(M_G^{\mathcal{F}}) \geq \mathcal{F}(M_G^{\mathcal{F}}) \geq \mathcal{T}_G / \ln(s)$, há uma contradição quanto ao fato de que a $(\ln(s))$-competitividade de $G$ é igual a $K$. ■

A próxima proposição mostra que existe um emparelhamento $M$ que possui valores "altos" para ambos $\mathcal{T}(\cdot)$ e $\mathcal{F}(\cdot)$. A existência deste emparelhamento é fundamental para o nosso mecanismo orientado à eficiência.

**Proposição 4.3** *Para todo grafo* $G$*, existe um emparelhamento* $M$ *tal que* $\mathcal{F}(M) \geq \mathcal{T}_G/(2\ln(s))$ *e* $\mathcal{T}(M) \geq \mathcal{T}_G/2$.

**Prova.** Sejam $e_1, \ldots, e_s$ as arestas de $M_G^{\mathcal{T}}$ arrumadas em ordem não-crescente de pesos e seja $i^*$ o maior número tal que $i^* \times c(e_{i^*}) \geq \mathcal{T}_G/2\ln(s)$. A existência de tal $i^*$ é garantida na prova da Proposição 4.1. Seja $M$ definido como $\cup_{j=1}^{i^*} e_j$. Claramente, $\mathcal{F}(M) \geq \mathcal{T}_G/2\ln(s)$.

Para $j > i^*$, temos que $c(e_j) < \frac{\mathcal{T}_G}{2j \times \ln(s)}$. Somando essas desigualdades, obtemos que:

$$\sum_{j=i^*+1}^{s} c(e_j) \leq \frac{\mathcal{T}_G \times (\ln(s) - \ln(i^*))}{2\ln(s)} \leq \frac{\mathcal{T}_G}{2}$$

Logo, $\mathcal{T}(M) = \sum_{j=1}^{i^*} c(e_j) \geq \mathcal{T}_G/2$ ■

### 4.3.1 Emparelhamentos de Aproximação

Nesta seção apresentamos o conceito de um emparelhamento de aproximação para uma seqüência de emparelhamentos. Utilizaremos este conceito mais adiante como uma ferramenta para limitar a probabilidade de falha de um dos mecanismos de leilão propostos neste trabalho. Em termos simples, dada uma seqüência $\mathcal{S}$ de emparelhamentos de um grafo $G$, o emparelhamento de aproximação $A$ para $\mathcal{S}$ tem a propriedade que para todo emparelhamento $S$ de $\mathcal{S}$ existe um sub-emparelhamento $A'$ de $A$ cujo tamanho está a um fator constante do tamanho de $S$ e, ainda, $\mathcal{F}(A') \geq \min_{S\in\mathcal{S}}\{\mathcal{F}(S)\}/2$ e $\mathcal{T}(A') \geq \min_{S\in\mathcal{S}}\{\mathcal{T}(S)\}$.

Para uma seqüência crescente de números inteiros $J$, seja $min(J) = \min\{j|j \in J\}$, $max(J) = \max\{j|j \in J\}$ e $pred(j)$ o maior elemento de $J$ que é menor que $j$, para todo $j \in J \setminus \{min(J)\}$.

**Definição 4.4** *Seja $(M_j)_{j\in J}$ uma seqüência de emparelhamentos de um grafo $G$, onde $|M_j| = j$, para todo $j \in J$. Definimos a seqüência $(A_j)_{j\in J}$ da seguinte maneira:*

$$A_j = \begin{cases} M_j, \text{ se } j = min(J) \\ A_{pred(j)} \cup \{e|e \in M_j \text{ e } A_{pred(j)} \cup e \text{ é um emparelhamento}\}, \text{ c.c.} \end{cases}$$

*Chamamos $A_{max(J)}$ de emparelhamento de aproximação para a seqüência $(M_j)_{j\in J}$.*

**Exemplo 5** *Seja $G = (V_1 \cup V_2, E)$ um grafo bipartido completo aonde $V_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $V_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Considere a seqüência de emparelhamentos $\{M_2, M_3, M_5\}$, onde $M_2 = \{(1, 2), (3, 6)\}$, $M_3 = \{(1, 2), (3, 8), (4, 10)\}$ e $M_5 = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9, 10)\}$.*

*Temos então $A_2 = \{(1, 2), (3, 6)\}$, $A_3 = \{(1, 2), (3, 6), (4, 10)\}$ e $A_5$, que é o emparelhamento de aproximação para a seqüência de emparelhamentos $\{M_2, M_3, M_5\}$, igual a $\{(1, 2), (3, 6), (4, 10), (7, 8)\}$.*

**Lema 1** *Seja $(M_j)_{j\in J}$ uma seqüência de emparelhamentos de $G$, onde $|M_j| = j$, para todo $j \in J$. Seja também $A$ o emparelhamento de aproximação para a seqüência $(M_j)_{j\in J}$. Então, para todo $j \in J$, existe um sub-emparelhamento $A'$ tal que:*

1. $\max\{\min(J), j/2\} \leq |A'| \leq 2j$;
2. $\mathcal{T}(A') \geq \mathcal{T}(M_{min(J)})$;
3. $\mathcal{F}(A') \geq \min\{\mathcal{F}(M_i)|i \in J\}/2$; *e*
4. *Se $e'$ é a aresta de menor custo em $A'$, então $c(e') \geq c(e)$, para toda aresta $e$ que pertence ao emparelhamento $A \setminus A'$.*

**Prova.** Inicialmente, devemos notar que se obtivermos um sub-emparelhamento $A''$ de $A$ que satisfaça (1) a (3), então podemos definir $A'$ como o sub-emparelhamento de $A$ que contém suas $|A''|$ arestas de maior peso. Nesse caso, $A'$ claramente satisfaz (1) a (4). Portanto, é suficiente demonstrar a existência de um sub-emparelhamento $A''$ de $A$ que satisfaça as afirmações (1) a (3).

A prova consiste em demonstrar a existência de um sub-emparelhamento $A''$ que satisfaz (1), e, então, provar por argumentação que $A''$ também satisfaz (2) e (3).

Fixe um $j \in J$. Primeiro, demonstramos que $|A_j| \geq j/2$: Por contradição, assuma que $|A_j| < j/2$. Nesse caso, teríamos que $A_j \cup e$ é um emparelhamento para alguma aresta $e \in M_j$, o que contradiz a definição de $A_j$. Se também tivermos que $|A_j| \leq 2j$, fixamos $A'' = A_j$. Caso contrário, considere o menor $i$ tal que $|A_i| > 2j$. Claramente, $min(J) < i < j$. Então, $|A_{pred(i)}| \leq 2j$. Além disso, a definição da seqüência $(A_j)_{j \in J}$ sugere que $|A_i| \leq |A_{pred(i)}| + i \leq |A_{pred(i)}| + j$. Como $|A_i| > 2j$, segue que $A_{pred(i)}/geqj$. Neste caso, fixamos $A'' = A_{pred(i)}$.

Agora, vamos mostrar que a afirmação (2) também é verdadeira: Por construção, $M_{min(J)} \subseteq A_j$, para todo $j \in J$. Logo, $\mathcal{T}(A'') \geq \mathcal{T}(M_{min(J)})$.

Finalmente, devemos mostrar que $A''$ também satisfaz a afirmação (3): A prova da afirmação (1) garante que $A'' = A_j$, para algum $j \in J$. Assim, é suficiente mostrar que $\mathcal{F}(A_j) \geq \min\{\mathcal{F}(M_i) | i \in J\}/2$, para todo $j \in J$. Utilizamos indução nos elementos de $J$. Para $j = min(J)$ o resultado vale dado que $A_{min(J)} = M_{min(J)}$. Assumimos que o resultado é válido para $pred(j)$. Seja $e'$ a aresta de menor peso de $A_j$. Temos duas possibilidades: (a) $e' \in A_{pred(j)}$: Como $|A_j| \geq |A_{pred(j)}|$, segue que $\mathcal{F}(A_j) \geq \mathcal{F}(A_{pred(j)}) \geq \min\{\mathcal{F}(M_i) | i \in J\}/2$, aonde a última desigualdade segue da hipótese da indução. (b) $e' \in M_j$: Como $|A_j| \geq |M_j|/2$, temos que $\mathcal{F}(A_j) \geq \mathcal{F}(M_j)/2$. ■



## 4.4 Mecanismos Reveladores para Leilões de Demanda Unitária

Nesta seção apresentamos um conjunto de mecanismos que chamamos de **FMLDU** (Família de Mecanismos de Leilões de Demanda Unitária). O mecanismo $\mathcal{A}_l$ apresentado a seguir é empregado por todos os mecanismos pertencentes à esta família. $\mathcal{A}_l$ é uma variação do mecanismo VCG aonde o parâmetro $l$ limita o número de bens que devem ser vendidos. De fato, o mecanismo VCG para o Leilão de Demanda Unitária é exatamente o mecanismo $\mathcal{A}_s$, onde, mais uma vez $s = \min\{n, k\}$.

**Mecanismo** $\mathcal{A}_l$(H: Grafo):

1. A alocação é definida pelo emparelhamento $M$ de $H$ que maximiza $\mathcal{T}(\cdot)$ dentre todos os emparelhamentos possíveis de $H$ que tenham tamanho $l$; e
2. Se $M$ aloca o item $j$ ao consumidor $i$, então o preço de venda de $j$ é igual a $p_j = v_{i,j} - \mathcal{T}(M) + \mathcal{T}(M_{-i})$, onde $M_{-i}$ é o emparelhamento de $H$ que maximiza $\mathcal{T}(\cdot)$ dentre todos os emparelhamentos possíveis de $H_{-i}$ com cardinalidade $l$.

O próximo lema nos ajuda a limitar a receita de mecanismos de leilão que utilizam $\mathcal{A}_l$.

**Lema 2** *Seja $H$ um grafo bipartido completo para o qual exista um emparelhamento $M'$ com $2l$ arestas ou mais de peso pelo menos $y$. Então, a receita de $\mathcal{A}_l$ quando o grafo de entrada é $H$ é, pelo menos, $l \times y$.*

**Prova.** Seja $M$ o emparelhamento que determina a alocação de $\mathcal{A}_l(H)$. É suficiente demonstrar que $p_j = v_{i,j} - \mathcal{T}(M) + \mathcal{T}(M_{-i}) \geq y$, para todo consumidor $i$ pertencente a $M$.

Dado que $|M'| \geq 2l$, segue que existe uma aresta $e \in M'$ tal que $M \cup e - e_{ij}$ seja um emparelhamento de $H_{-i}$. Logo, $\mathcal{T}(M_{-i}) \geq \mathcal{T}(M \cup e - e_{ij}) \geq \mathcal{T}(M) - v_{i,j} + y$ e, como conseqüência, $p_j = v_{i,j} - \mathcal{T}(M) + \mathcal{T}(M_{-i}) \geq y$. ∎

Todos os mecanismos em FMLDU possuem o pseudo-código apresentado a seguir. Inicialmente os consumidores são aleatoriamente divididos em dois grupos e, em seguida, um dos grupos é utilizado para estimar um valor apropriado de $l$. No fim, $\mathcal{A}_l$ é executado para os consumidores do outro grupo. Cabe ressaltar que apenas os consumidores são divididos em dois grupos, e não os bens, ou seja, todos os bens estão presentes para os consumidores dos dois grupos. O único fator de distinção entre dois mecanismos pertencentes à família FMLDU é a função de estimativa $f$ empregada para determinar o número de itens que devem ser vendidos pelo mecanismo $\mathcal{A}_l$. A definição de $f$ determinará a eficiência econômica, a receita e a complexidade computacional do mecanismo resultante.

**Mecanismo** $FMLDU_f$:

1. Jogue uma moeda não-viciada $n$ vezes para separar os consumidores em dois grupos, o grupo um e o grupo dois. Seja $G_1$ ($G_2$) o grafo bipartido induzido pelos consumidores do grupo um (dois) e o conjunto de todos os itens;
2. Execute $\mathcal{A}_{f(G_1)}$ para o grafo $G_2$.

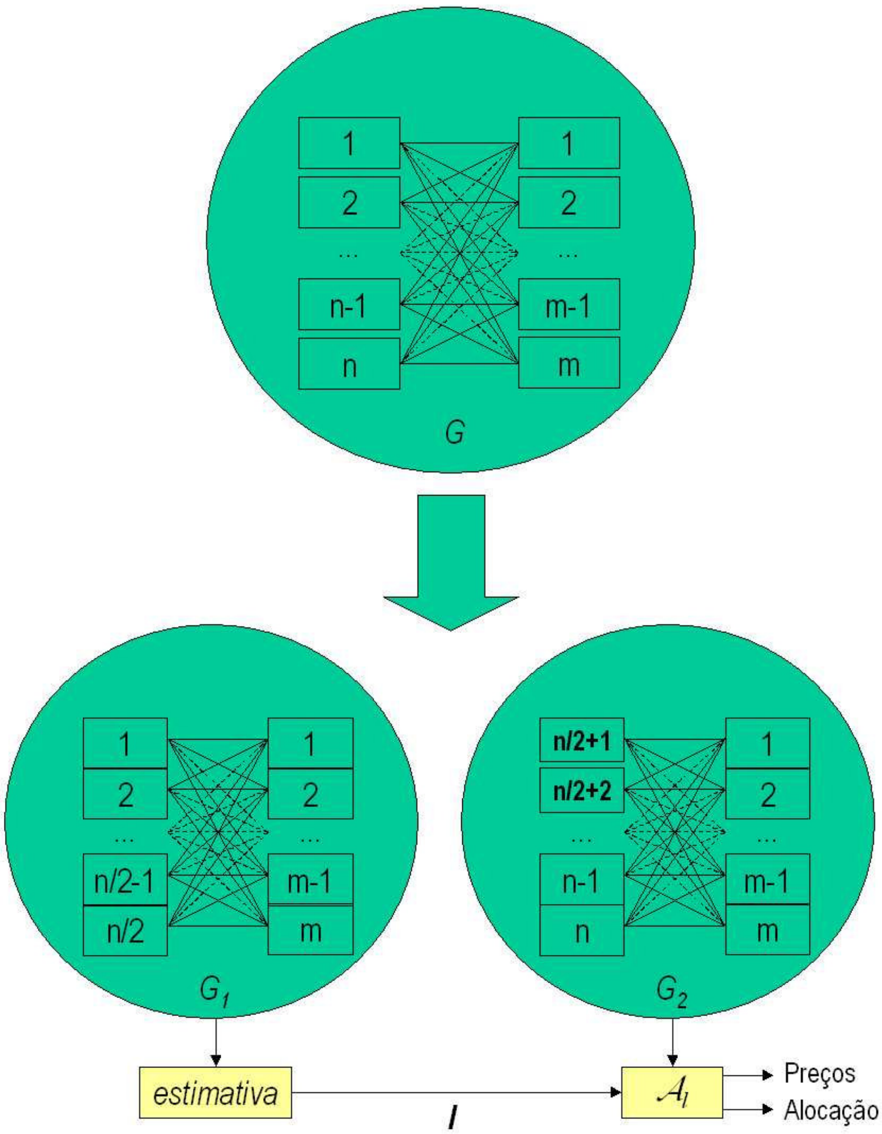


Figura 4.1: Estrutura de FMLDU

**Lema 3** *Seja $f$ uma função que mapeia um grafo bipartido completo em um número inteiro positivo, então $FMLDU_f$ é revelador.*

**Prova.** A prova consiste em verificar que nenhum consumidor pode aumentar seu lucro por fazer lances diferentes das suas avaliações. Para um consumidor qualquer existem duas possibilidades: ele ser sorteado para o grupo de consumidores utilizado para definir o número de bens que devem ser vendidos ou ser sorteado para o grupo de consumidores que podem adquirir um bem no leilão. No primeiro caso, não importa qual seja a estratégia do consumidor, seu lucro será sempre igual a zero e, portanto, nunca é vantajoso para o consumidor mentir sobre suas avaliações. Logo, precisamos analisar agora o segundo caso.

Inicialmente, devemos constatar que o número de bens que serão vendidos não tem nenhuma relação com os lances do consumidor que estamos analisando. Para o consumidor é como se estivesse participando de um leilão com mecanismo VCG onde é fixo o número de bens vendidos. É fácil adaptar a prova do Teorema 2.13 e verificar que neste caso, o consumidor maximiza seu lucro quando oferece lances iguais às suas avaliações, e, portanto, o mecanismo é revelador. Para uma prova mais ampla do fato de que mecanismos derivados do VCG são reveladores, recomenda-se a leitura de (15). ■



Notamos que a idéia de aleatoriamente selecionar um grupo de consumidores para determinar o preço de venda de bens a serem vendidos para os demais consumidores de um leilão apareceu anteriormente no contexto de leilões de bens digitais (com oferta de bens ilimitada) em (05). Enquanto este é um conceito relativamente simples, aplicá-lo com êxito para o Leilão de Demanda Unitária e analisá-lo não são tarefas tão simples quanto possam parecer inicialmente. Como um exemplo, foi necessário desenvolver o conceito de emparelhamentos de aproximação (Lema 1) para nos ajudar a lidar com os detalhes técnicos disto.

### 4.4.1
### Um Mecanismo Orientado à Receita

Investigamos agora $Rev$, uma definição para $f$ que favorece a receita.

**Rev($G_1$:grafo)**
1. Seja $M^1$ o emparelhamento de maior cardinalidade de $G_1$ tal que $\mathcal{F}(M^1) \geq \mathcal{F}_{G_1}/3$.
2. Retorne $\lfloor |M^1|/6 \rfloor$.

O teorema a seguir fornece um limite na receita alcançada por $FMLDU_{Rev}$.

**Teorema 4.5** *Seja $G$ um grafo com $(\ln s)$-competitividade maior que* 500. *Então, $FMLDU_{Rev}$ simultaneamente alcança receita $\Omega(\mathcal{F}_G)$ e eficiência $\Omega(\mathcal{T}_G/\ln s)$ com probabilidade maior ou igual a $1 - \frac{74}{e^{cp/108}}$, onde cp é a $(\ln s)$-competitividade de $G$.*

**Prova.** Para todo $j$, seja $M_j$ um emparelhamento de cardinalidade $j$ de $G$ que maximize $\mathcal{F}(\cdot)$. O emparelhamento $M_j$ é dito *bom* caso $j \geq |M_G^{\mathcal{F}}|/3$ e $\mathcal{F}(M_j) \geq \mathcal{F}_G/9$. Seja $J$ o conjunto de números inteiros definido como $J = \{j | M_j$ é um bom emparelhamento $\}$.

Para todo $j \in J$, seja $C_j$ o conjunto de consumidores do emparelhamento $M_j$. Em relação ao passo 1 do mecanismo FMLDU , definimos o evento $\mathcal{E}_j$ como o evento no qual o número de consumidores de $C_j$ que pertencem ao primeiro grupo é pelo menos $j/3$ e não mais que $2j/3$. Além disso, seja $\mathcal{E} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{E}_j$.

No que segue, fazemos algumas observações sob a hipótese de que $\mathcal{E}$ ocorre. Relembre que $M_G^{\mathcal{F}}$ é utilizado para representar o maior emparelhamento de $G$ que maximiza $\mathcal{F}(\cdot)$. Seja agora $M'$ o sub-emparelhamento de $M_G^{\mathcal{F}}$ induzido pelos consumidores de $M_G^{\mathcal{F}}$ que pertencem ao grafo $G_1$. Então, $M'$ possui pelo menos $|M_G^{\mathcal{F}}|/3$ arestas e $\mathcal{F}(M') \geq \mathcal{F}_G/3 \geq \mathcal{F}_{G_1}/3$. Isto significa que $\mathcal{F}_{G_1} \geq \mathcal{F}_G/3$ e que $|M^1| \geq |M_G^{\mathcal{F}}|/3$.

Dado que $\mathcal{F}(M^1) \geq \mathcal{F}_{G_1}/3$, segue que $\mathcal{F}(M^1) \geq \mathcal{F}_G/9$ e, como conseqüência, $|M^1| \in J$. Por conseguinte, existem pelo menos $\lceil |M^1|/3 \rceil$ consumidores de $C_{|M^1|}$ no segundo grupo, acarretando assim a existência de um emparelhamento de $G_2$, $M^2$, de cardinalidade $\lceil |M^1|/3 \rceil$, no qual toda aresta tem peso maior ou igual a $\mathcal{F}_G/(9|M^1|)$. Logo, de acordo com o Lema 2, a receita de $\mathcal{A}_{\lfloor |M^1|/6 \rfloor}$, para a entrada $G_2$, é pelo menos

$$\lfloor |M^1|/6 \rfloor \times \mathcal{F}_G/(9|M^1|) = \Omega(\mathcal{F}_G).$$

Como a proposição 4.1 garante que $\mathcal{F}_G \geq \mathcal{T}_G/\ln s$, conclui-se que a eficiência deste mecanismo é $\Omega(\mathcal{T}_G/\ln s)$.

Podemos obter um limite para a probabilidade do evento $\mathcal{E}$ de fato ocorrer. Uma aplicação direta do Limite de Chernoff (16) nos garante que a probabilidade do evento $\mathcal{E}_j$ não ocorrer é no máximo $2e^{-j/36}$. Considerando a união dos eventos, obtemos que a probabilidade de falha de $\mathcal{E}$ não é maior que $\sum_{j \in J} 2e^{-j/36}$.

Agora, usamos a condição da competitividade de $G$. Dado que a $(\ln s)$-competitividade de $G$ é *cp* segue da Proposição 4.2 que $|M_G^{\mathcal{F}}| \geq cp$. Isto siginifica que o menor inteiro pertencente a $J$ é pelo menos $\lceil cp/3 \rceil$. Deste modo,

$$\sum_{j \in J} 2e^{-j/36} \leq \sum_{j=\lceil cp/3 \rceil}^{\infty} 2e^{-j/36} \leq \frac{2e^{-cp/108}}{1 - e^{-1/36}} \leq \frac{74}{e^{cp/108}}$$

■

Com relação ao último teorema, percebemos que quanto maior a competitividade de $G$, maior é a probabilidade de alcançarmos os limites previstos para a receita e a eficiência econômica.

Se não nos preocuparmos em provar um limite para a probabilidade de alcançarmos uma certa receita e uma certa eficiência econômica, podemos obter um mecanismo simples que alcança receita esperada de $\Omega(\mathcal{F}_G)$ e eficiência econômica esperada de $\Omega(\mathcal{T}_G)$ para qualquer grafo $G$ com $\ln(s)$-competitividade maior que 1.

**Teorema 4.6** *Seja Mixed o mecanismo de leilão que executa um dos seguintes mecanismos com probabilidade uniforme:*

- $FMLDU_{Rev}$
- $\mathcal{A}_1$
- $VCG$

*Então, para todo grafo $G$ com $\ln(s)$-competitividade maior que 1, Mixed alcança receita esperada de $\Omega(\mathcal{F}_G)$ e eficiência econômica esperada de $\Omega(\mathcal{T}_G)$.*

**Prova.** É bastante conhecido o fato de que o mecanismo VCG alcança a eficiência ótima, que é $\mathcal{T}_G$. Dado que o mecanismo VCG é executado com probabilidade 1/3, então a eficiência econômica esperada é pelo menos $\mathcal{T}_G/3 = \Omega(\mathcal{T}_G)$.

Como a $\ln(s)$-competitividade de $G$ é maior que um, de acordo com a Proposição 4.2 temos que $|M_G^{\mathcal{F}}| \geq 1$. Seja $c$ o consumidor que oferece $h$, o lance de maior valor do leilão, e seja $h_2$ o lance de maior valor do conjunto de lances definidos por $G_{-c}$, isto é, o lance de maior valor do leilão quando não consideramos os lances feitos pelo consumidor $c$. Observe que a receita de $\mathcal{A}_1$ é $h_2$. Caso $|M_G^{\mathcal{F}}| \geq 500$, a prova do Teorema 4.5 garante que $FMLDU_{Rev}$ alcança uma receita esperada de $\Omega(\mathcal{F}_G)$. Por outro lado, se $1 < |M_G^{\mathcal{F}}| < 500$, então $\mathcal{F}_G \leq 500h_2$. Como $\mathcal{A}_1(G)$ é executado com probabilidade 1/3, então a receita esperada é $\Omega(\mathcal{F}_G)$. ■

### 4.4.2
### Favorecendo a Eficiência

Agora investigamos $Eff$, uma definição para $f$ que favorece a eficiência. $Eff$ estima a cardinalidade do emparelhamento de $G$ que satisfaz as condições estabelecidas na Proposição 4.3.

**Eff($G_1$: graph )**

1. Sejam $e_1, \ldots, e_{|M_{G_1}^{\mathcal{T}}|}$ as arestas de $M_{G_1}^{\mathcal{T}}$ ordenadas de modo não-crescente em relação aos seus pesos. Seja $i^*$ o maior inteiro tal que $i^* \times c(e_{i^*}) \geq \mathcal{T}_{G_1}/(2\ln|M_{G_1}^{\mathcal{T}}|)$.
2. Defina $M_b^1 = \bigcup_{j=1}^{i^*} e_j$.
3. Retorne $\lfloor |M_b^1|/12 \rfloor$.

O principal resultado desta seção é o teorema a seguir.

**Teorema 4.7** *Seja $K_1$ a $8-$competitividade de um grafo $G$. Então, para a entrada $G$, $FMLDU_{Eff}$ simultaneamente obtém receita $\Omega(\mathcal{T}_G/\ln s)$ e eficiência econômica $\Omega(\mathcal{T}_G)$ com probabilidade maior ou igual a $1 - \frac{148}{e^{K_1/36}}$.*

A prova deste teorema consiste em demonstrar que com a probabilidade mencionada acima existe um emparelhamento $M^*$ para $G_2$ tal que:

(i) $|M_b^1|/6 \leq |M^*| \leq (4|M_b^1|)/3$;

(ii) $\mathcal{F}(M^*) = \Omega(\mathcal{T}_G/\ln s)$; e

(iii) $\mathcal{T}(M^*) = \Omega(\mathcal{T}_G)$.

O próximo lema mostra que a existência de um tal emparelhamento de fato garante que o mecanismo se comporta como descrito.

**Lema 4** *Se existe um emparelhamento $M^*$ para $G_2$ que satisfaz as três propriedades acima, então, para entrada $G_2$, $\mathcal{A}_{Eff(G_1)}$ possui simultaneamente eficiência econômica $\Omega(\mathcal{T}_G)$ e receita $\Omega(\mathcal{T}_G/\ln s)$.*

**Prova.** Seja $M^2$ o emparelhamento de tamanho $\lfloor |M_b^1|/12 \rfloor$ calculado por $\mathcal{A}_{Eff(G_1)}$ para entrada $(G_2)$. Dado que $M^*$ tem, no máximo, $(4|M_b^1|)/3$ arestas, então a soma dos pesos das $\lfloor |M_b^1|/12 \rfloor$ arestas de maior peso de $M^*$ é maior ou igual a $\lfloor |M_b^1|/12 \rfloor \times 3\mathcal{T}(M^*)/(4|M_b^1|)$. Segue então que $\mathcal{T}(M^2) = \Omega(\mathcal{T}_G)$.

Por outro lado, devido ao fato de que $\mathcal{F}(M^*) = \Omega(\mathcal{T}_G/\ln s)$, então todas as arestas de $M^*$ têm um peso maior ou igual a $K \times \mathcal{T}_G/(|M^*| \ln s)$, onde $K$ é a constante escondida na expressão $\Omega()$. Como $2|M^2| = 2\lfloor |M_b^1|/12 \rfloor \leq |M_b^1|/6 \leq |M^*|$, conclui-se com base no Lema 2 que a receita é no mínimo $\lfloor |M_b^1|/12 \rfloor \times K \times \mathcal{T}_G/(|M^*| \ln s)$.

Utilizando o fato que $|M^*| \leq (4|M_b^1|)/3$, chegamos a conclusão que a receita é $\Omega(\mathcal{T}_G/\ln s)$. ■

Portanto, é suficiente provar a existência de tal emparelhamento. A próxima definição é útil neste sentido.

**Definição 4.8** *Dado um emparelhamento $M$ de $G$, seja $C_j$ o conjunto de consumidores associados às $j$ arestas de maior peso de $M$. Seja também $\mathcal{E}_j$ o evento no qual pelo menos $j/3$ consumidores de $C_j$ pertencem ao grupo um e pelo menos $j/3$ pertencem ao grupo dois. Por último, seja $\mathcal{E}_M = \bigcap_{j=K_1}^{|M|} \mathcal{E}_j$.*

Duas propriedades de $\mathcal{E}_M$ são úteis para as nossas análises: a probabilidade de $\mathcal{E}_M$ não ocorrer decai exponencialmente a medida que $K_1$ cresce e, caso $\mathcal{E}_M$ ocorra, então as arestas de $M$ estão "justamente" distribuídas entre $G_1$ e $G_2$ no sentido que o sub-emparelhamento de $M$ induzido pelos consumidores que pertencem a $G_1$ tem aproximadamente o mesmo custo (em relação às métricas $\mathcal{F}$ e $\mathcal{T}$) daquele induzido pelos consumidores pertencentes a $G_2$. As duas próximas proposições formalizam essas observações.

**Proposição 4.9** *A probabilidade de $\mathcal{E}_M$ não ocorrer é, no máximo,* $74e^{-K_1/36}$

A prova da Proposição 4.9 segue de uma aplicação direta do Limite de Chernoff (16).

**Proposição 4.10** *Seja $M$ um emparelhamento de $G$, com $|M| > K_1$. Se $\mathcal{E}_M$ ocorre, então o sub-emparelhamento $M'$ de $M$ induzido pelos consumidores de $M$ que pertençam ao grafo $G_1$ ($G_2$) satisfaz as seguintes propriedades:*

- $\mathcal{F}(M') \geq \mathcal{F}(M)/3$; *e*
- $\mathcal{T}(M') \geq \mathcal{T}(M)/3 - \mathcal{T}_G/24$

**Prova.** Como $\mathcal{E}_M$ ocorre, então pelo menos $\lceil |M|/3 \rceil$ consumidores de $M$ pertencem a $G_2$. Logo, $\mathcal{F}(M') \geq \mathcal{F}(M)/3$. A prova da segunda propriedade faz uso do lema a seguir.

**Assertiva 1** *Seja $B = (b_i)_{i=1}^t$ uma seqüência não-crescente de $t$ números positivos. Para $p \leq t$, seja $B_p = (b_i)_{i=1}^p$. Além disso, sejam também $K$ um número inteiro e $S'$ um sub-conjunto de $\{1, \ldots, t\}$ que satisfaça a seguinte condição: para $K \leq j \leq t$, pelo menos $j/3$ elementos de $\{1, \ldots, j\}$ pertencem a $S'$. Então*

$$\sum_{i \in S'} b_i \geq \left( \sum_{i=K}^{t} b_i \right) /3$$

**Prova.** Pode-se mostrar que $S' = \{i | 2K/3 < i \leq K\} \cup \{3i | K/3 < i \leq \lfloor t/3 \rfloor\}$ é a escolha viável para $S'$ que minimiza $\sum_{i \in S'} b_i$.

Como $B$ é não-crescente, temos que

$$3 \sum_{i \in S'} b_i \geq 3 \sum_{i=K/3}^{\lfloor t/3 \rfloor} b_{3i} \geq \sum_{i=K}^{t} b_i,$$

o que estabelece o resultado. ■

Finalmente, apresentamos a prova da proposição. Assumimos, sem perda de generalidade que $M'$ é o sub-emparelhamento induzido pelos consumidores de $M$ que pertencem a $G_1$. Definimos $B$ como sendo a seqüência de pesos das arestas de $M$ ordenadas de maneira não-crescente. A ocorrência do evento $\mathcal{E}_M$ infere que as condições da Assertiva 1 são respeitadas. Desta maneira, $\mathcal{T}(M') = (\mathcal{T}(M) - D)/3$, onde $D$ é a soma dos custos das $K_1$ arestas de maior peso de $M$. Posto que $K_1$ é a 8-competitividade de $G$, conclui-se que $D \leq \mathcal{T}_G/8$, o que completa a prova da proposição. ■

Agora, redefinimos o conceito do que é considerado um *bom* emparelhamento. Dizemos que um emparelhamento $M$ de $G$ é *bom* quando $\mathcal{F}(M) \geq \mathcal{T}_G/(7 \ln s)$ e $\mathcal{T}(M) \geq \mathcal{T}_G/7$. A existência de pelo menos um bom emparelhamento é garantida pela Proposição 4.3. Seja $J$ uma seqüência crescente de números inteiros tal que $j \in J$ se e somente se existe um emparelhamento bom de $G$ com cardinalidade $j$. Para todo $j \in J$, seja $M_j$ um emparelhamento bom de $G$, escolhido arbitrariamente, com cardinalidade $j$. Repare que a definição de emparelhamento bom e a hipótese a respeito de $K_1$ no Teorema 4.7 garantem que $min(J) > K_1$.

**Proposição 4.11** *Seja $A$ o emparelhamento de aproximação de $(M_j)_{j \in J}$. Caso o evento $\mathcal{E}_{M_G^{\mathcal{T}}} \cup \mathcal{E}_A$ ocorra, então existe um emparelhamento de $G_2$ que atende às condições (i)-(iii).*

**Prova.** Inicialmente, mostramos que se $\mathcal{E}_{M_G^{\mathcal{T}}}$ ocorre, então existe um emparelhamento bom de $G$ com cardinalidade $|M_b^1|$. Seja $M'$ o sub-emparelhamento de $M_G^{\mathcal{T}}$ induzido pelos consumidores de $M_G^{\mathcal{T}}$ que pertençam ao grafo $G_1$. De acordo com a Proposição 4.10, temos que $\mathcal{T}(M') \geq \mathcal{T}_G/3 - \mathcal{T}_G/8 \geq 7 \times \mathcal{T}_G/24$. Desta forma, $\mathcal{T}(M_{G_1}^{\mathcal{T}}) \geq \mathcal{T}(M') \geq 7 \times \mathcal{T}_G/24$. A definição de $M_b^1$ e a Proposição 4.3 garantem que $\mathcal{T}(M_b^1) \geq 7 \times \mathcal{T}_G/48$ e $\mathcal{F}(M_b^1) \geq 7 \times \mathcal{T}_G/(48 \ln s)$. Assim, podemos concluir que $M_b^1$ é um bom emparelhamento de $G$.

Posto que existe um bom emparelhamento de $G$ com cardinalidade $|M_b^1|$, a partir do Lema 1 pode-se inferir que existe um sub-emparelhamento $A'$ do emparelhamento de aproximação $A$ tal que:

- $\max\{min(J), |M_b^1|/2\} \leq |A'| \leq 2|M_b^1|$;
- $\mathcal{T}(A') \geq \mathcal{T}_G/7$; e
- $\mathcal{F}(A') \geq \mathcal{T}_G/14 \ln s$.

Como $\mathcal{E}_A$ ocorre e $|A'| \geq min(J) > K_1$, então $\mathcal{E}_{A'}$ também ocorre. Seja $A''$ o sub-emparelhamento de $A'$ induzido pelos consumidores de $A'$ que pertençam ao grafo $G_2$. Segue da Proposição 4.10 e da observação anterior sobre $A'$ que:

- $|M_b^1|/6 \leq |A''| \leq (4|M_b^1|)/3$;
- $\mathcal{T}(A'') \geq \mathcal{T}_G/168$; e
- $\mathcal{F}(A'') \geq \mathcal{T}_G/42 \ln s$.

Logo, $A''$ atende às condições (i)-(iii), provando, assim, a proposição. ■

Apresentamos agora a prova para o Teorema 4.7.

**Prova.** Se o evento $\mathcal{E}_{M_G^{\mathcal{T}}} \cup \mathcal{E}_A$ ocorre, então, de acordo com a Proposição 4.11 e o Lema 4 temos que, para entrada $G_2$, $\mathcal{A}_{Eff(G_1)}$ simultaneamente obtém eficiência econômica $\Omega(\mathcal{T}_G)$ e receita $\Omega(\mathcal{T}_G/\ln s)$.

Por outro lado, temos pela Proposição 4.9 que o evento $\mathcal{E}_{M_G^{\mathcal{T}}} \cup \mathcal{E}_A$ falha com probabilidade menor ou igual a $148e^{-K_1/36}$. Conclui-se, portanto, que este evento ocorre com probabilidade maior ou igual a $1 - 148 \times e^{-K_1/36}$. ■

Reparamos que modificando a escolha de $i^*$ na função $Eff$, obtemos uma troca entre a eficiência econômica e a receita. Por exemplo, caso selecionemos $i^*$ como sendo o maior inteiro tal que $i^* \times c(e_{i^*}) \geq \mathcal{F}_{\mathcal{T}_{G_1}}/12$ obtemos um mecanismo de leilão para o qual podemos provar limites para a sua receita e eficiência econômica muito semelhantes àqueles dados pelo Teorema 4.5, porém não nos aprofundaremos neste tema.