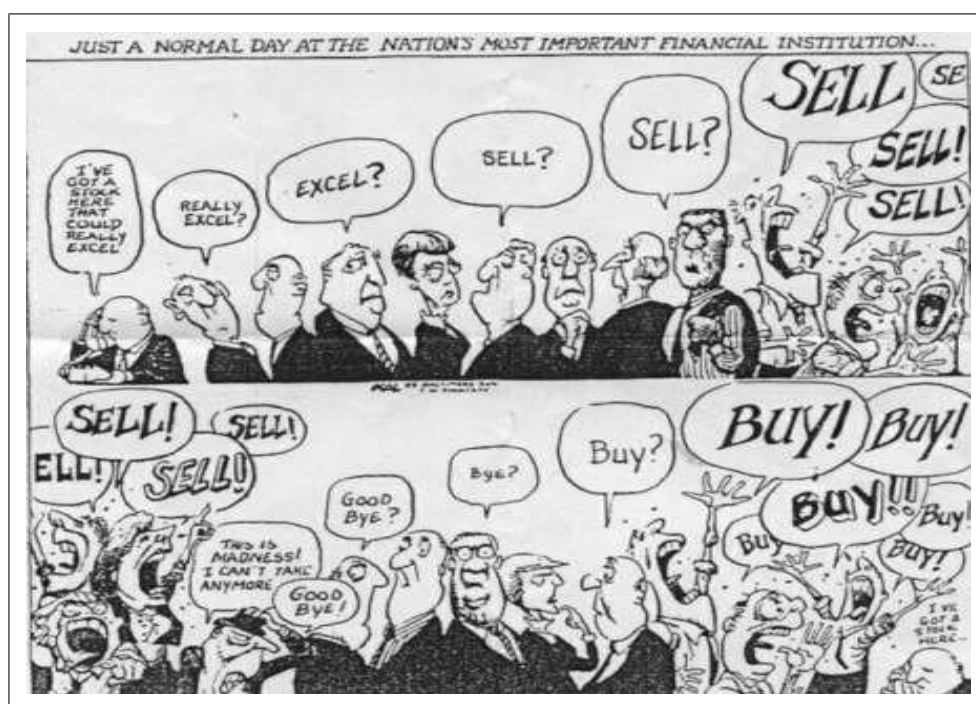


1 Introdução



O mercado financeiro pode ser caracterizado como um dos mais fascinantes e desafiadores arquétipos de sistemas complexos reais devido ao grande número e heterogeneidade dos agentes envolvidos, e à diversidade de interações entre os mesmos, que podem ser tanto de natureza cooperativa quanto competitiva. O preço de um título financeiro (que pode ser uma ação, uma *commodity* ou moeda estrangeira) emerge a partir dessa constante atividade de negociação do mercado, através de mecanismos internos de regulação. Dessa forma, podemos considerar os preços como uma observável macroscópica resultante das interações microscópicas entre os agentes.

Os preços dos ativos financeiros possuem caráter estocástico devido a principalmente dois fatores. O primeiro decorre de que o mercado está sujeito a um constante fluxo de informações externas, que são imprevisíveis. O segundo reside no fato de que a tomada de decisão de compra ou venda dos

¹International Herald Tribune, 27/10/1989. Kal, Sindicato de Cartunistas e Escritores, 1989.

agentes possui um grande grau de incerteza devido à capacidade limitada de processamento das informações disponíveis.

Modelos matemáticos e estatísticos provenientes da descrição de sistemas físicos tem sido cada vez mais utilizados para realizar previsões sobre a dinâmica dos sistemas financeiros, obtendo leis para descrever seu comportamento esperado (médio) assim como as flutuações em torno deste comportamento padrão. Há um grande e crescente interesse econômico e científico em tentar prever a dinâmica do mercado e, em última análise, avaliar os riscos envolvidos nesta atividade econômica.

Um dos principais problemas na Física Estatística consiste no estudo das propriedades macroscópicas de sistemas complexos nos quais flutuações desempenham um papel central, por exemplo, na difusão e transições induzidas por ruído. Por essas características, as grandezas observáveis financeiras podem ser descritas com as ferramentas da Física Estatística.

De fato, algumas observáveis financeiras, como as flutuações de preços, tem sido recentemente estudadas em analogia com processos de difusão anômala [1], turbulência [2], intermitência [3] e outros fenômenos físicos. Reciprocamente, a análise da dinâmica de preços pode ajudar a esclarecer processos físicos mais gerais.

A descrição dos dados financeiros por processos estocásticos é de grande importância teórica, devido à dinâmica fortemente complexa das flutuações das séries temporais financeiras, que impõe novos desafios às tentativas de modelagem das leis dinâmicas responsáveis pelas propriedades estatísticas observadas.

1.1

Grandezas Observáveis Financeiras

Nesta tese, analisaremos duas grandezas observáveis financeiras importantes: o retorno de preços de índices de mercados e o volume de negociação. A nossa expectativa é que, ao analisar estas séries financeiras, possamos identificar os mecanismos determinísticos e estocásticos que governam a dinâmica do mercado financeiro.

As séries financeiras são coletadas e organizadas pelas Bolsas de Valores. Estas entidades financeiras divulgam um conjunto de informações sobre os negócios realizados ao longo do dia. Os principais indicadores referem-se a preços e volumes das ações negociadas. Para retratar o comportamento médio dos preços das ações e servir de parâmetro para identificar as tendências gerais do mercado de um país ou de segmentos específicos da economia, foram desenvolvidos os índices do mercado acionário, que hoje são considerados como

autênticos termômetros das expectativas dos investidores em relação ao futuro desempenho da economia.

Assim, os índices de mercado são formados por uma média dos preços das ações mais negociadas, ponderadas pelo volume da transação de cada uma. Dessa forma, podem ser efetivamente caracterizados como a medida da performance dos respectivos mercados. No Brasil, o índice que acompanha a evolução média das cotações das ações brasileiras, e que foi um dos índices analisados nesta tese, é o IBOVESPA. Além dele, existem diversos índices internacionais importantes. Abordaremos no nosso trabalho, índices que abrangem todas as regiões do mundo, bem como mercados desenvolvidos e emergentes.

Preços e índices relacionados à moeda possuem flutuações no tempo que são inerentes ao processo econômico. A unidade monetária analisada pode sofrer alterações devido a diversos fatores, como, por exemplo, crescimento ou recessão da economia, influência de outros mercados devido à globalização e inflação.

Entre as observáveis financeiras, as mais importantes são aquelas que determinam ganhos e perdas, e que podem ser estimadas a partir da estatística das flutuações das séries de preço em diferentes escalas de tempo Δt .

Há muitas formas de se definir a variável que avalia lucro e prejuízo. As mais utilizadas na literatura são os incrementos e os retornos logarítmicos, ou simplesmente retornos, de preços de índices.

A primeira e mais simples definição consiste em representar os incrementos de preço

$$\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t). \quad (1.1)$$

Contudo, variações no preço ao longo do tempo, como ajustes de moeda e inflação, afetam significativamente os incrementos. Essa observável é adequada apenas em períodos no qual a economia de determinado mercado se mantenha muito estável.

A segunda definição, mais utilizada na literatura, é o retorno logarítmico

$$r(t) = \log x(t + \Delta t) - \log x(t) = \log \frac{x(t + \Delta t)}{x(t)}. \quad (1.2)$$

Esta definição fornece uma medida em escala logarítmica da variação dos preços. Essa definição tem a vantagem de fornecer o lucro ou prejuízo percentual, informação mais adequada para os investidores, pois fornece o retorno do investimento relativo ao capital empregado.

Em economias com níveis de inflação históricos significantes (como a brasileira antes do Plano Real), é importante realizar um tratamento nas observáveis de preço visando descontar a inflação do período por um fator deflacionário $D(t)$. Com essa aproximação, os preços passam a refletir apenas a variação de seu valor intrínseco.

Todas as séries de preço do IBOVESPA utilizadas nesta tese foram deflacionadas pelo IGP-DI², tendo como referência o mês de agosto de 1994. O índice diário de deflação foi calculado a partir do índice mensal acumulado da data de referência até o dia em questão.

A seguir, na Fig. 1.1, apresentamos a série temporal diária do IBOVESPA nominal e a deflacionada pelo IGP-DI, que foi a utilizada nesta tese.

É importante ressaltar que a análise apresentada neste estudo não é designada para capturar valores extremos e seus efeitos, como *booms* ou *crashes* econômicos.



Figura 1.1: Série do IBOVESPA entre 1991 e 2006 (período analisado nesta tese) com valores históricos e com preços deflacionados pelo IGP-DI conforme indicado em legenda.

Apresentamos, como exemplo, na Fig. 1.2, a série de retorno diário do IBOVESPA deflacionado no período indicado na figura. Podemos perceber

²Índice Geral de Preços. É calculado mensalmente pela Fundação Getúlio Vargas. O IGP-DI/FGV foi instituído em 1944 com a finalidade de medir o comportamento de preços em geral da economia brasileira. É uma média aritmética, ponderada dos índices: Índice de Preços no Atacado (60%), Índice de Preços ao Consumidor (30%) e Índice Nacional da Construção Civil (10%). DI ou Disponibilidade Interna é a consideração das variações de preços que afetam diretamente as atividades econômicas localizadas no território brasileiro.

que após a implantação do Plano Real em 1994, a amplitude dos retornos gradualmente diminuiu em relação ao período anterior, com exceção de algumas épocas de crises internacionais, como por exemplo as crises dos Tigres Asiáticos em 1997 e do Brasil em 1999.

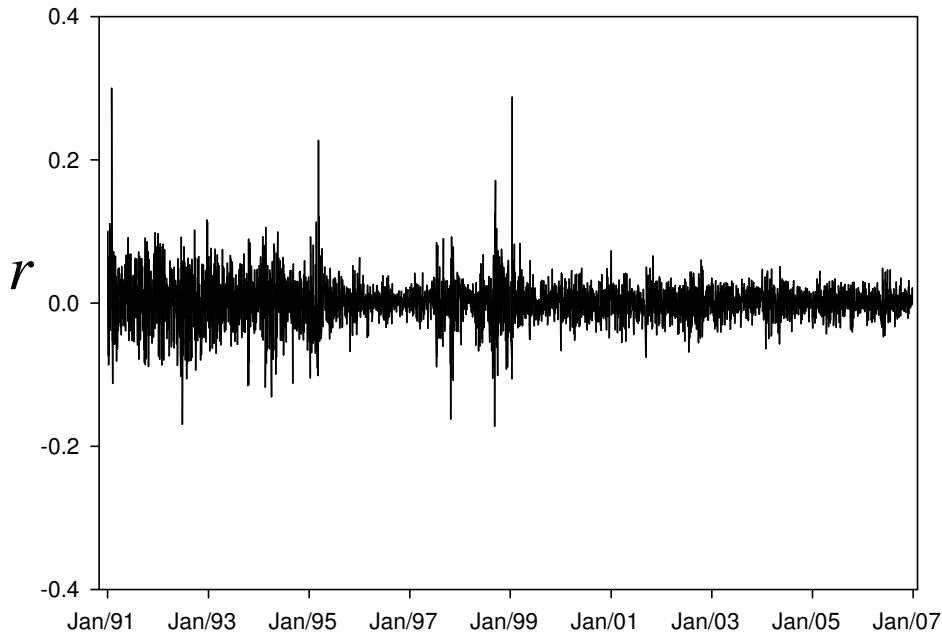


Figura 1.2: Série dos retornos diários do IBOVESPA entre 1991 e 2006.

A segunda observável que será estudada nesta tese é o volume de negociação, que pode ser definido como o número de ações ou então, alternativamente, de contratos negociados entre vendedores e compradores durante um determinado período de tempo. Nesse estudo, utilizamos a primeira definição. O volume é um indicador importante na análise do mercado pois ele mede o valor de uma jogada de negociação, e serve como medida da atividade financeira. Se os mercados fizerem uma forte pressão para os preços moverem-se para cima ou para baixo, a percepção dessa força depende do volume para esse período. Quanto maior o volume de negociação que gerou o movimento do preço, mais significativo é este movimento.

O volume de negociação nas Bolsas de Valores é uma medida da liquidez das ações e também pode fornecer informações úteis para a realização de estratégias de negociação [4].

Tomamos como exemplo representativo nesta tese, o volume negociado intradiário da BOVESPA, de 3 de janeiro de 2005 a 13 de setembro de 2007. Os dados foram obtidos em intervalos de 30 minutos. A série original de volume de negociação, $V(t)$, foi reescalada pelo valor empírico médio $\langle V \rangle$ e é

apresentada na Fig. 1.3, para o período estudado nesta tese. Podemos perceber o padrão intermitente da atividade de negociação.

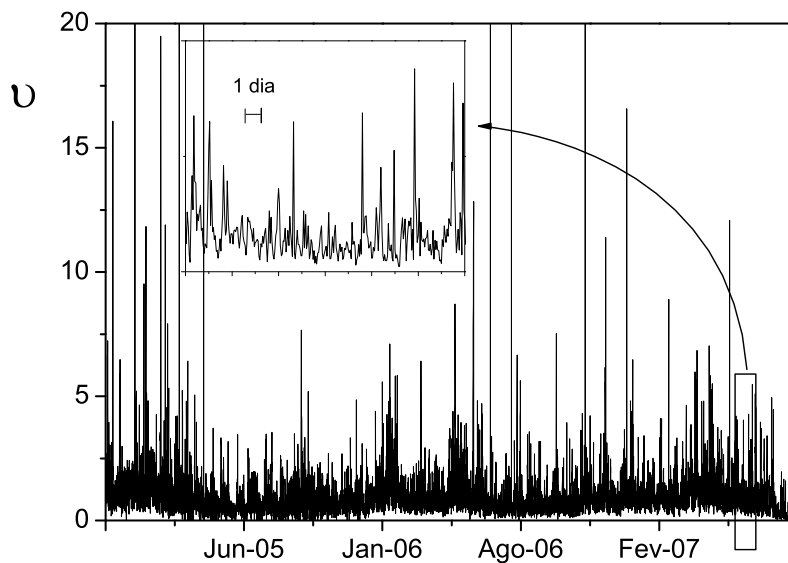


Figura 1.3: Série temporal dos volumes negociados na BOVESPA no período de 3/01/05 a 13/09/07. Os valores representam o volume negociado em intervalos $\Delta t = 30$ minutos, normalizados pelo valor médio em todo o período ($v = V/\langle V \rangle$).

1.2

Resultados na Literatura

A maioria dos modelos matemáticos utilizados em Econofísica tem sua origem na tese de doutorado de Louis Bachelier sobre a Teoria da Especulação na Bolsa de Paris em 1900, na qual ele propôs um modelo para o processo estocástico dos preços, descrito por uma caminhada aleatória, ou *random walk*, com flutuações regidas por uma distribuição gaussiana [5].

Mais recentemente, uma explicação importante da hipótese de random walk foi apresentada por Fama e Samuelson [6] na década de 70, que consiste na formulação da Hipótese do Mercado Eficiente, e que se tornou um paradigma utilizado até hoje.

A Hipótese do Mercado Eficiente estabelece que o preço atual da ação reflete todas as informações e expectativas dos participantes do mercado. Conseqüentemente, nenhum lucro pode ser obtido a partir de negociações baseadas em informações do mercado, pois estas já foram absorvidas no preço. Assim, o retorno esperado de investimento futuro é nulo. Baseado nesta hipótese, o movimento da cotação de uma ação seria completamente imprevisível a partir de informações tais como preço e volume de transação passados.

Assim, segundo essa teoria, a propriedade de ajustamento instantâneo dos preços das ações devido às informações públicas implica na independência entre variações sucessivas de preços na seqüência das negociações. Um mercado que apresenta tal comportamento é, por definição, um mercado random walk, onde a série de mudanças de preços não tem memória, isto é, a história passada da série não pode ser usada para prever o futuro. Neste mercado informacionalmente eficiente, onde todos os participantes detêm o mesmo nível de informação e agem racionalmente, ajustando os preços imediatamente, não haveria espaço para que os fundamentalistas obtivessem lucros acima da média do mercado. Da mesma forma, os grafistas também não poderiam antecipar nenhuma nova tendência ou movimento de preços em formação. Neste caso, somente restariam os fatos imprevisíveis a comandar as quebras de expectativas.

No entanto, no mercado real, a atualização dos preços não é instantânea e as negociações tem custo. O grau de ineficiência do mercado é o que permite oportunidades de lucro que compensam os investidores dos custos das transações e da obtenção de informação. O mercado real segue portanto apenas aproximadamente o mercado eficiente, pois caso contrário, qualquer esforço de previsão baseada em análise da série histórica seria inútil. Apesar da Hipótese do Mercado Eficiente ser uma idealização economicamente irrealizável, ele serve como referência para outras modelagens do processo estocástico dos preços.

Nessa mesma época, na década de 60, Mandelbrot [7], ao analisar o mercado americano de algodão, verificou que as distribuições de retornos de preços se comportavam segundo as chamadas distribuições de Lévy, com caudas mais longas que as distribuições gaussianas. A partir de então, numerosas observações nos mercados por todo o mundo mostraram que as caudas das distribuições de diversos ativos, tais como *commodities*, taxas de câmbio e retorno de preços de ações, decaíam mais devagar do que a distribuição gaussiana predizia. Muitos modelos foram propostos na literatura para caracterizar a distribuição de retornos de preços nestes mercados, para várias escalas de tempo e com especial interesse para as distribuições leptocúrticas³ - assim chamadas as distribuições com caudas mais acentuadas do que a da distribuição normal.

A Fig. 1.4 apresenta a distribuição empírica para os retornos normalizados do IBOVESPA na escala de tempo de $\Delta t=1$ minuto e a sua comparação com a distribuição gaussiana. O período de observação considerado neste exemplo foi de 4 anos, entre Novembro de 2002 e Julho de 2006. Verifica-

³Distribuições leptocúrticas são aquelas que possuem curtose maior do que a da distribuição normal, igual a 3. Comparando-se duas distribuições com mesmo desvio padrão, a distribuição com maior curtose possui caudas mais longas.

se que a distribuição gaussiana é inadequada para descrever a distribuição empírica.

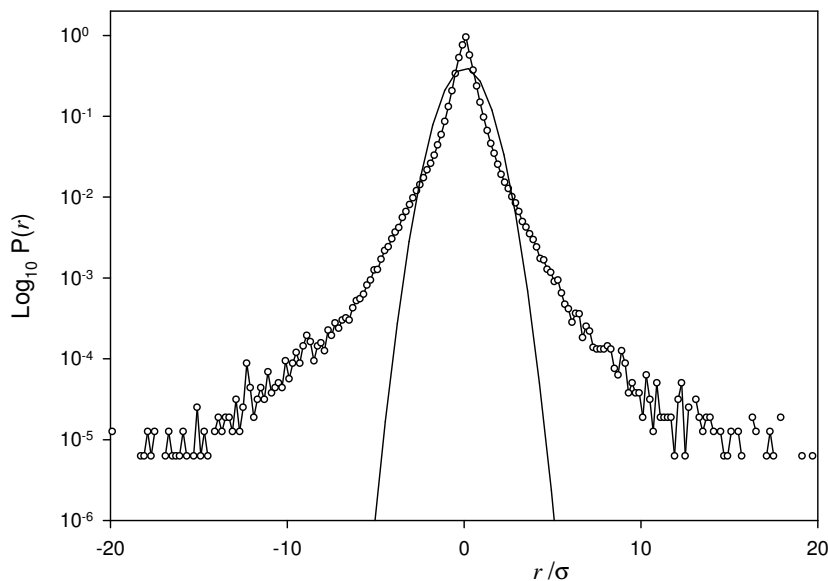


Figura 1.4: Comparação dos histogramas de retornos normalizados para $\Delta t = 1$ minuto do IBOVESPA (símbolos), de novembro de 2002 a julho de 2006, com a distribuição gaussiana (linha cheia), em gráfico semi-logarítmico.

A análise de vários tipos de títulos financeiros em diferentes mercados tem fornecido distribuições com caudas em lei de potência com expoente de decaimento tipicamente na faixa de $2 < \alpha < 5$, fora do domínio das distribuições de Lévy. Distribuições com caudas exponenciais também tem sido reportadas para alguns mercados mundiais [8, 9].

Recentemente foi apresentada uma modelagem para os dados de alta frequência do mercado americano utilizando distribuições q -gaussianas [10, 11], uma generalização da distribuição gaussiana, que será descrita com mais detalhes no Capítulo 2. A Fig. 1.5 mostra respectivamente as distribuições empíricas para o NYSE e para a Bolsa eletrônica NASDAQ em 2001. As distribuições são bem descritas por q -gaussianas com parâmetro ótimo $q \cong 1.4$, como verificado na Fig. 1.5 [12].

Por outro lado, sabe-se que a dinâmica de preço em escalas de tempo longas (regime mensal), é regida por distribuições gaussianas. Os dois regimes de escalas longas e curtas tem sido modelados na literatura como dois regimes separados. Um dos objetivos desta tese é o de prover um caminho possível para conectar estes dois regimes através de uma descrição única.

O volume de negociações financeiras foi objeto de análise estatística apenas recentemente. Mostrou-se primeiramente que a função de densidade

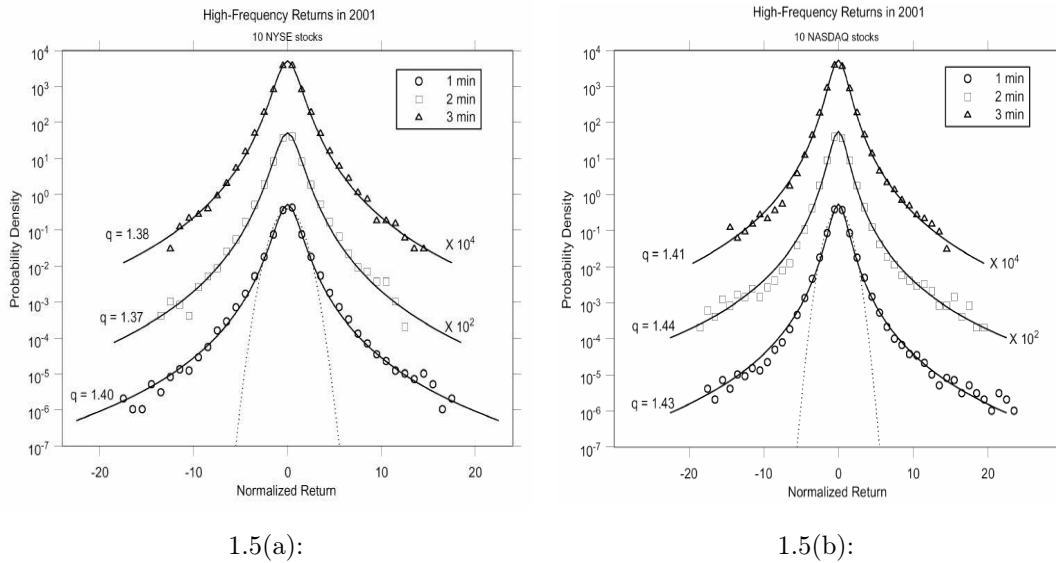


Figura 1.5: Distribuições empíricas (símbolos) e q -gaussianas (linhas cheias) para retornos normalizados das 10 empresas com maior volume de negociação na (a) NYSE e (b) Nasdaq em 2001. A linha pontilhada representa a distribuição gaussiana [9].

de probabilidade (FDP) dos volumes de ações individuais, negociadas em alta-frequência, tem decaimento em lei de potência [13, 14]. A forma da distribuição q -Gama [15], uma generalização da função Gama, que será descrita com mais detalhes no Capítulo 2, foi proposta para a descrição da FDP dos volumes de negociação de alta frequência em diversos mercados: para as 10 ações de maior volume no NYSE e no Nasdaq em 2001, com *ticks*⁴ de 1, 2 e 3 minutos [12, 15]; para as 30 ações do Dow Jones Industrial Average em 2004, com ticks de 1 minuto [16, 17, 18]; e para as ações do Citigroup no NYSE em 2004 [19], com ticks de 1 minuto, conforme apresentado na Fig. 1.6 [12].

1.3 Motivação e Objetivos

Uma característica típica dos sistemas complexos é a existência de estruturas não-triviais em diferentes escalas de tempo. No mercado financeiro, em particular, as flutuações de preço em escalas longas e curtas, são caracterizadas por FDPs gaussianas e com cauda longa, respectivamente.

Para a descrição de ambos os regimes, assim como da transição entre eles, vamos adotar o procedimento proposto por Friedrich e colaboradores [20], que explora uma correspondência entre a dinâmica do mercado financeiro e a turbulência hidrodinâmica [2], assumindo a existência de um fluxo de informação em cascata em uma hierarquia de escalas temporais longas e curtas.

⁴Marcadores de registro de dados financeiros.

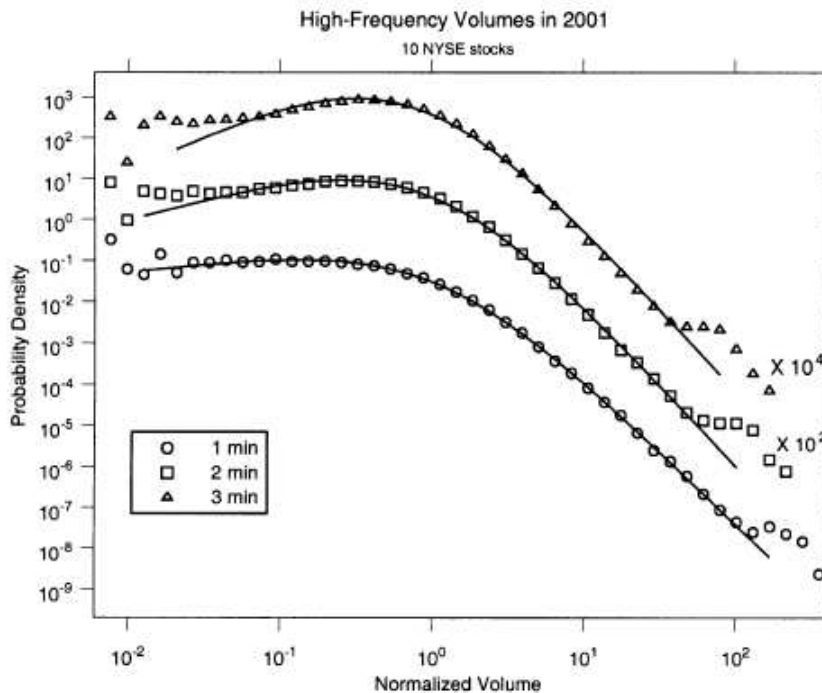


Figura 1.6: Distribuições empíricas (pontos) e ajustes q -exponenciais (linhas) para volumes normalizados das 10 ações de maior volume na NYSE em 2001 [9].

Para tal, computamos diretamente das séries temporais empíricas de retorno, os coeficientes da expansão de Kramers-Moyal (KM) que governam a evolução temporal das FDPs ao longo de diversas escalas de tempo. Reproduzimos a plena evolução dos histogramas empíricos dos retornos do IBOVESPA, abraçando a transição de FDPs gaussianas às com caudas longas, quando se passa de escalas de tempo longas para curtas.

Apresentamos também soluções analíticas consistentes com a família das FDPs que emergem da equação de evolução temporal. Mostramos que estas distribuições pertencem à classe de distribuições q -gaussianas, que compreendem as famílias de FDPs invariantes e não-estacionárias observadas em ambos os limites temporais assintóticos.

Em seguida, estendemos nossa análise a diversos mercados ao redor do mundo. Por um lado, a detecção de padrões universais entre esses mercados é importante para identificar os mecanismos fundamentais que governam a dinâmica dos preços. Por outro lado, é também importante quantificar e distinguir os mercados, de acordo com algumas propriedades, tais como eficiência, resistência a pressões externas, à especulação internacional, ou o tempo de relaxação para que os efeitos provocados por choques macroeconômicos se dissipem.

Neste cenário, a obtenção dos coeficientes de KM diretamente das

séries temporais empíricas, pode ser considerada uma técnica alternativa para comparar as dinâmicas dos índices de mercado, uma vez que o conhecimento destes coeficientes permite acessar quantitativamente as leis determinísticas e estocásticas que governam a dinâmica dos preços.

Para este fim, foi realizada uma análise extensiva, obtendo e comparando os coeficientes de 24 índices diários de mercados ao redor do mundo, englobando desde mercados desenvolvidos até os considerados emergentes.

Nossa análise revela a existência de padrões universais dos coeficientes de KM, e que estes são descritos em termos de um pequeno número de parâmetros microscópicos.

Esses parâmetros permitem quantificar características, tais como desvios da gaussianidade ou da eficiência, fornecendo uma ferramenta útil para discriminar os diversos mercados. Esta abordagem permite ainda ranquear ou segregar os mercados, de acordo com os parâmetros microscópicos que caracterizam os coeficientes de KM.

No caso dos volumes financeiros, também podemos identificar processos caracterizados por diferentes escalas temporais. Por um lado, o volume de ações negociadas ao longo do pregão é o resultado de um processo de negociação caracterizado por várias etapas: a chegada de ordens de compra, de venda e de ajuste entre essas ordens. Este processo determina uma escala microscópica de formação de preços e de volume negociados. Por outro lado, as flutuações no ambiente do mercado tais como fluxo não estacionário de notícias e rumores, afetam o volume global de negociação, implicando na existência de inomogeneidades na atividade do mercado. A flutuação desta atividade, de acordo com a época de observação, por sua vez possui uma escala temporal característica mais longa do que os tempos característicos de formação do preço.

Para a análise dos volumes, vamos caracterizar sua FDP tendo como base processos de Poisson microscópicos de diferentes escalas misturadas, no qual a atividade do mercado é também um parâmetro flutuante.

Na literatura, as tentativas de modelagem, tanto da dinâmica de preços como a de volumes, são geralmente construídas fenomenologicamente a partir de modelos propostos *a priori*.

Um dos objetivos desta tese é desvendar a dinâmica estocástica subjacente das flutuações dos preços e dos volumes, através de medidas diretas das séries temporais, identificado os fatores determinísticos e estocásticos.