



**Anderson Alexander Gomes Cortines**

**Fatores determinísticos e estocásticos das  
grandezas observáveis financeiras**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do  
Departamento de Física da PUC-Rio como requisito parcial para  
obtenção do título de Doutor em Física

Orientadoras : Prof. Celia Beatriz Anteneodo  
Prof. Rosane Riera Freire

Rio de Janeiro  
março de 2009



**Anderson Alexander Gomes Cortines**

**Fatores determinísticos e estocásticos das  
grandezas observáveis financeiras**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Departamento de Física do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Celia Beatriz Anteneodo**  
Orientadora  
Departamento de Física — PUC-Rio

**Prof. Rosane Riera Freire**  
Co-Orientadora  
Departamento de Física — PUC-Rio

**Prof. Giovani Lopes Vasconcelos**  
Departamento de Física - UFPE

**Prof. Jürgen Fritz Stilck**  
Instituto de Física - UFF

**Prof. Luca Moriconi**  
Instituto de Física - UFRJ

**Prof. Helio Cortes Vieira Lopes**  
Departamento de Matemática - PUC-Rio

**Prof. José Eugênio Leal**  
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 20 de março de 2009

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Anderson Alexander Gomes Cortines**

Graduou-se em Física na UFRRJ (Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro) em 1999. Mestre em Física da Matéria Condensada Teórica com ênfase em Econofísica pela PUC-Rio em 2005. Pesquisa o comportamento do mercado financeiro, em especial a Bolsa de Valores de São Paulo.

#### Ficha Catalográfica

Cortines, Anderson Alexander Gomes

Fatores determinísticos e estocásticos das grandezas observáveis financeiras / Anderson Alexander Gomes Cortines; Orientadoras: Celia Beatriz Anteneodo e Rosane Riera Freire — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Física, 2009.

120 f.: il. (color.); 30 cm

1. Tese (Doutorado em Física) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Física, Rio de Janeiro, 2009.

Inclui referências bibliográficas.

1. Física – Tese. 2. Econofísica. 3. Equação de Fokker-Planck. 4. Equação de Langevin. 5. Índices de Mercado. 6. Volume de negociação. 7. Misturas Estatísticas. I. Anteneodo, Celia Beatriz. II. Freire, Rosane Riera. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Física. IV. Título.

CDD: 530

## Agradecimentos

Às minhas orientadoras, Celia Anteneodo e Rosane Riera Freire, pela paciência, atenção, simpatia e estímulo para a realização deste trabalho;

À minha esposa Lílian, amor de minha vida, pelo apoio em todos os momentos;

À minha mãe Albina que me deu a sabedoria;

Às minhas filhas Rafaela e Mariana que me deram a inspiração;

À minha família pelo lazer salutar proporcionado nos finais de semana;

Ao CNPq e à PUC-Rio pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado;

Em especial à equipe de professores da PUC-Rio pelos ensinamentos, profissionalismo, integridade e atenção dispensada;

Aos professores que integram a banca de qualificação pela generosidade em participar desta defesa de tese;

Aos colegas de curso pela convivência e companheirismo, e que me fizeram adorar esse lugar, em especial aos residentes ou viajantes da sala 656 da última meia década: Vernek, Marcelo Apel, Diego, Petche, Felipe, Adriano, Laércio, Thiesen, Cintia, Wilson, Fábio, Thiago, Alexander, Mary, Mariana, Christian, Paulina, Jefferson, Lucas, Clara, Ricardo, Nei e Fernando Vilhena;

Ao pessoal do departamento de Física da PUC-Rio pelo constante apoio, em particular à Márcia, Giza, Majô e ao Julinho.

## Resumo

Cortines, Anderson Alexander Gomes; Anteneodo, Celia Beatriz; Freire, Rosane Riera. **Fatores determinísticos e estocásticos das grandezas observáveis financeiras**. Rio de Janeiro, 2009. 120p. Tese de Doutorado — Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

As flutuações de preços e de outras grandezas observáveis nos mercados financeiros apresentam comportamentos não triviais, tais como longas correlações temporais, não gaussianidade ou leis de escala, cuja origem não é ainda bem compreendida. Neste trabalho investigamos possíveis mecanismos determinísticos e estocásticos responsáveis pelas distribuições de probabilidade anômalas observadas para os índices de mercado e para os volumes de ações comercializadas. No primeiro caso, consideramos a expansão de Kramers-Moyal como ponto de partida para descrever a evolução das densidades de probabilidade. Para a modelagem dos volumes negociados, consideramos misturas estatísticas que surgem das flutuações em escalas longas dos parâmetros internos que descrevem a dinâmica em escalas mais curtas. Este estudo provê uma demonstração consistente, a partir de análise empírica de séries temporais reais, de como funções de densidade de probabilidade com caudas em lei de potência podem emergir através de mecanismos diversos, tais como processos estocásticos com flutuações aditivo-multiplicativas, ou como resultado de misturas estatísticas.

## Palavras-chave

Econofísica. Equação de Fokker-Planck. Equação de Langevin. Índices de Mercado. Volume de negociação. Misturas Estatísticas.

## Abstract

Cortines, Anderson Alexander Gomes; Anteneodo, Celia Beatriz; Freire, Rosane Riera. **Deterministic and stochastic factors of financial observables**. Rio de Janeiro, 2009. 120p. DSc Thesis — Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The fluctuations of prices and other observables in financial markets have non-trivial behaviors, such as long temporal correlations, non-Gaussianity or scaling laws, whose origin is not well understood so far. In this work we have investigated possible deterministic and stochastic mechanisms responsible for the anomalous probability distributions observed for market indexes and volumes of traded shares. In the first case, we consider the Kramers-Moyal expansion as a starting point to describe the evolution of probability densities. For the modelling of trading volumes, we consider the mixed statistics that emerges from the long-scale fluctuations of inner parameters that describe the dynamics on shorter scales. This study provides a consistent demonstration, from empirical analysis of real time series, on how probability density functions with power laws tails may emerge through various mechanisms, such as stochastic processes with additive-multiplicative fluctuations or as a result of mixed statistics.

## Keywords

Econophysics. Fokker Planck equation. Langevin equation. Market Index. Traded Volume. Statistical mixture.

# Sumário

1	Introdução	16
1.1	Grandezas Observáveis Financeiras	17
1.2	Resultados na Literatura	21
1.3	Motivação e Objetivos	24
2	Referencial Teórico	27
2.1	Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade	27
2.1.1	FDPs usuais	28
2.1.2	FDPs generalizadas	29
2.2	Processos Estocásticos	30
2.2.1	Classes de processos estocásticos	31
2.2.2	Processos markovianos	33
2.2.3	Expansão de Kramers-Moyal	34
2.2.4	Equação de Fokker-Planck	35
2.2.5	Equação de Itô-Langevin	36
2.2.6	Processos de Poisson	37
2.3	Misturas Estatísticas	38
3	Análise do Índice Acionário Brasileiro	39
3.1	Introdução	39
3.2	Análise de Kramers-Moyal	40
3.3	Dependência temporal dos parâmetros	44
3.4	Evolução temporal	47
3.5	Considerações finais	52
4	Análise Comparativa dos Índices de Mercados Mundiais	53
4.1	Introdução	53
4.2	Índices de Mercados Mundiais	53
4.3	Análise Preliminar	55
4.4	Análise de Kramers-Moyal	58
4.5	Análise Comparativa	61
4.6	Mais exemplos do cálculo dos coeficientes de KM para os mercados mundiais	66
4.7	Considerações finais	68
5	Análise do Volume de Ações Negociadas	69
5.1	Introdução	69
5.2	Estatística descritiva dos volumes negociados	69
5.3	Modelagem	72
5.4	Considerações finais	79
6	Reconstrução de Séries Financeiras	80
6.1	Introdução	80
6.2	Cálculo dos coeficientes de KM	80

6.3	Correção dos coeficientes de KM	82
6.4	Conclusões preliminares	87
7	Conclusões	<b>89</b>
7.1	Índice do Mercado Brasileiro	89
7.2	Índices de Mercados Mundiais	90
7.3	Volumes Negociados no Mercado Brasileiro	91
7.4	Conclusões Gerais	92
7.5	Perspectivas futuras	93
A	Apêndices	<b>100</b>
A.1	Considerações Teóricas Complementares	100
A.1.1	Sobre a solução invariante da EFP	100
A.1.2	Influência do reescalonamento no cálculo dos coeficientes de KM	102
A.1.3	Expansão de Itô-Taylor para coeficientes de KM[61]	103
A.1.4	Testes estatísticos de estacionaridade	107
A.2	Análises Complementares sobre o IBOVESPA	109
A.2.1	Limite para escalas curtas	109
A.2.2	Informações sobre as séries de dados utilizadas	110
A.2.3	Comparação dos resultados para retornos logarítmicos e incrementos	113
A.3	Séries Temporais dos Índices dos Mercados Mundiais	114
A.4	Análise Estatística da Quantidade de Transações	117
A.5	Lista de abreviaturas	120



## Lista de figuras

- 1.1 Série do IBOVESPA entre 1991 e 2006 (período analisado nesta tese) com valores históricos e com preços deflacionados pelo IGP-DI conforme indicado em legenda. 19
- 1.2 Série dos retornos diários do IBOVESPA entre 1991 e 2006. 20
- 1.3 Série temporal dos volumes negociados na BOVESPA no período de 3/01/05 a 13/09/07. Os valores representam o volume negociado em intervalos  $\Delta t = 30$  minutos, normalizados pelo valor médio em todo o período ( $v = V/\langle V \rangle$ ). 21
- 1.4 Comparação dos histogramas de retornos normalizados para  $\Delta t = 1$  minuto do IBOVESPA (símbolos), de novembro de 2002 a julho de 2006, com a distribuição gaussiana (linha cheia), em gráfico semi-logarítmico. 23
- 1.5 Distribuições empíricas (símbolos) e  $q$ -gaussianas (linhas cheias) para retornos normalizados das 10 empresas com maior volume de negociação na (a) NYSE e (b) Nasdaq em 2001. A linha pontilhada representa a distribuição gaussiana [9]. 24
- 1.6 Distribuições empíricas (pontos) e ajustes  $q$ -exponenciais (linhas) para volumes normalizados das 10 ações de maior volume na NYSE em 2001 [9]. 25
  
- 3.1 Representação das séries diária e intradiárias do IBOVESPA analisadas. Série intradiária de 15 minutos compreende período entre 21/01/98 e 31/03/03 (em vermelho) e série intradiária de 30 segundos relativa ao período entre 01/11/02 e 19/07/06 (em azul). Todas as séries estão deflacionadas pelo índice diário do IGP-DI. 40
- 3.2 Curvas de nível típicas da FDP conjunta para retornos obtida a partir de dados diários do IBOVESPA para  $\Delta t_1 = 16$  dias e  $\Delta t_2 = 8$  dias. Níveis das curvas correspondem a  $\log_{10} = -1,5; -2,0; -2,5; -3,0; -3,5$  do centro até a borda. 41
- 3.3 Distribuição conjunta típica para retornos obtida para  $\tau_2 = 6,88$  ( $\Delta t_2 = 120$  min) e  $\tau_1 = 6,18$  ( $\Delta t_1 = 195$  min). 42
- 3.4 Corte de  $P(r_2, \tau_2 | r_1, \tau_1)$  em  $r_1 = 3\sigma_{\tau_2}$  obtido para  $\tau_2 = 11,75$  ( $\Delta t_2 = 4$  min),  $\tau' = 10,75$  ( $\Delta t' = 8$  min) e  $\tau_1 = 9,75$  ( $\Delta t_1 = 16$  min). Os símbolos cheios correspondem à FDP condicional calculada diretamente e os símbolos abertos à FDP integrada. Gráfico inserido: representação log-linear dos mesmos dados. 43
- 3.5 Coeficientes  $\tilde{D}^{(1)}$  (a) e  $\tilde{D}^{(2)}$  (b) em função de  $r$ , calculados em  $\Delta t_2 = 109$  min e  $\Delta t_1 = 125$  min (logo  $\tau = 6,9$  e  $\Delta\tau = 0,2$ ). As linhas cheias correspondem aos intervalos utilizados nos ajustes. 43
- 3.6 Coeficiente  $\tilde{D}^{(4)}$  em função de  $r$ , calculado em  $\tau = 8,35$  e diferentes valores de  $\Delta\tau$ , indicados na figura. Linhas sólidas correspondem a ajustes polinomiais de quarta ordem nos dados. 44

- 3.7 Dependência dos parâmetros  $a_1$  e  $a_0$  do coeficiente de tendência  $D^{(1)}(r, \tau)$  com a escala temporal  $\tau$ . A análise foi realizada com dados de séries diárias (círculos), de 15 minutos (quadrados) e de 30 segundos (triângulos). 45
- 3.8 Dependência dos parâmetros  $b_2, b_1$  e  $b_0$  do coeficiente de difusão  $D^{(2)}(r, \tau)$  com a escala temporal  $\tau$ . Símbolos como na Fig. 3.7. Em (c), incluímos para comparação  $\sigma^2(\tau) = \sigma_\tau^2 / \sigma_{32}^2$  (símbolos pequenos) junto com seu comportamento assintótico (linhas finas) para escalas de tempo longas e curtas como previsto pela Eq. (3.14), com  $\gamma = 1$  e  $1, 17$ , respectivamente. 46
- 3.9 FDPs dos retornos normalizados. Comparação entre as soluções numéricas da EFP (3.9) (linhas cheias) e os dados empíricos (símbolos). As escalas temporais correspondem de  $\tau = -2$  a  $\tau \approx 15$ . As FDPs estão deslocadas verticalmente, para melhor visualização. A condição inicial foi um ajuste gaussiano aos dados para  $\tau = -2$  ( $\Delta t = 128$  dias). As escalas  $\tau$  apresentadas são informadas na tabela A.5 (apêndice). 47
- 3.10 FDPs empíricas dos retornos normalizados (símbolos), soluções numéricas da EFP (3.9) (linhas pretas) e ajustes  $q$ -gaussianos aos dados empíricos (linhas vermelhas). 50
- 3.11 Dependência do expoente  $\mu$  em relação às escalas temporais  $\tau$ . Símbolos correspondem ao ajuste da Eq. (3.12) aos histogramas empíricos, linhas pontilhadas representam os valores assintóticos dados pela Eq. (3.13). 51
- 4.1 Séries de retorno de preço dos índices mundiais apresentados em legenda. Linha vertical representa o início do ano de 1997. As séries foram deslocados verticalmente para melhor visualização. 56
- 4.2 Séries de retornos diários dos índices de mercado mundiais (apresentados ao lado do respectivo índice) no período utilizado nesta tese. As séries foram deslocadas verticalmente para melhor visualização. 57
- 4.3 Cortes de nível através de  $P(r_2, \tau_2 | r_1, \tau_1)$  em  $r_1 = -2, 0, 0,5$  e  $3,0$  (da esquerda para a direita) para  $\tau_2 = 0, 24, \tau' = 0, 14$  e  $\tau_1 = 0, 04$ , para o índice de Cingapura STI. Os histogramas foram deslocados horizontalmente para melhor visualização. Os símbolos preenchidos correspondem às FDPs condicionais calculadas diretamente e os símbolos abertos às FDPs integradas de acordo com a Eq. (3.2). 57
- 4.4 Coeficientes  $\tilde{D}^{(1)}$  (a),  $\tilde{D}^{(2)}$  (b) e  $\tilde{D}^{(4)}$  (c), em função de  $r$ , calculados em  $\tau = 1, 2$  (escala temporal semanal) e  $\Delta\tau = 0, 2$  para o índice alemão DAX. As linhas cheias correspondem às curvas ajustadas e as mais espessas aos intervalos utilizados para os ajustes. 58
- 4.5 Dependência dos parâmetros  $\tilde{a}_1$  (a),  $\tilde{b}_2$  (b) e  $\tilde{b}_0$  (c) nas escalas temporais  $\tau$ , para diferentes valores de  $\Delta\tau$  indicados em (c), para o índice Mexicano IPC. As linhas cheias correspondem aos intervalos utilizados para a estimativa dos parâmetros  $a_1^s, b_2^s, A$  e  $\gamma$ , como explicado no texto, usando o resultado para  $\Delta\tau = 0, 2$ . 59

- 4.6 Parâmetro  $a_1^s$  medido para todos os mercados listados na tabela 4.1, de acordo com seus rótulos. O erro de  $a_1^s$  é de cerca de 10%. A linha cheia corresponde ao valor médio 0,57. 61
- 4.7 Parâmetro  $b_2^s$  medido para todos os mercados listados na tabela 4.1, de acordo com seus rótulos. 62
- 4.8 Inclinação  $\gamma$  (a) e nível  $A$  (b) do parâmetro  $b_0$  medido para todos os mercados listados na tabela 4.1, de acordo com seus rótulos. 62
- 4.9 Representação dos mercados no plano de parâmetros  $(\gamma, A)$ , de acordo com os rótulos numéricos da tabela 4.1. Os símbolos mais escuros representam os mercados desenvolvidos. Os erros são de cerca de 5%. As linhas pontilhadas representam uma regressão linear como guia visual. 63
- 4.10 Representação dos mercados de acordo com a medida de  $2H$  em [49] e  $\gamma$  (este trabalho). Símbolos são como os da Fig. 4.9. O erro de  $\gamma$  é de cerca de 5%. As fronteiras pontilhadas ( $\gamma = 1$ ,  $2H = 1$  e  $\gamma = 2H$ ) estão desenhadas para comparação. 64
- 4.11 FDPs padronizadas para retornos diários para o índice argentino Merval (a) e índice americano Dow Jones (b). Os símbolos correspondem aos histogramas empíricos e as linhas sólidas aos ajustes de mínimos quadrados utilizando a forma padronizada da Eq. (2.10). 65
- 4.12 Mercados representados no plano  $(\mu_{emp}, b_2^s/A)$ . Símbolos são como os da Fig. 4.9. Mercados desenvolvidos representados com símbolos mais escuros. A linha pontilhada é a localização dos pontos dados pela Eq. (4.1). 66
- 4.13 Parâmetros (i)  $\tilde{b}_0$ , (ii)  $\tilde{b}_2$  e (iii)  $\tilde{a}_1$  calculados para o período de jul.1997 a jul.2007, para os índices (a) BSE30 (Índia) e (b) CMA (Egito). 67
- 4.14 Parâmetros (i)  $\tilde{b}_0$ , (ii)  $\tilde{b}_2$  e (iii)  $\tilde{a}_1$  calculados para o período de jan.1997 a jul.2007, para os índices (a) BEL20 (Bélgica) e (b) Nikkei (Japão). 67
- 4.15 Parâmetros (i)  $\tilde{b}_0$ , (ii)  $\tilde{b}_2$  e (iii)  $\tilde{a}_1$  calculados para o período de jan.1997 a jul.2007, para os índices (a) FTSE100 (Reino Unido) e (b) DJIA (Estados Unidos). 67
- 5.1 Gráfico log-log da FDP dos volumes negociados a cada 30 minutos na BOVESPA no período entre 3/01/05 a 13/09/07. Os símbolos representam o histograma empírico e a linha sólida o ajuste por mínimos quadrados da Eq. (2.15) com parâmetros mostrados na Fig. 5.2. A linha pontilhada corresponde ao ajuste da Eq. (2.15) com  $q = 1$ , representado para comparação. Os gráficos inseridos correspondem às representações do gráfico principal em escalas linear-linear e log-linear. 70
- 5.2 Parâmetros de ajuste da distribuição  $q$ -Gama,  $\beta$  (a),  $q$  (b) e  $\theta$  (c), para a FDP dos volumes normalizados entre 3/01/05 e 13/09/07, em função de  $\Delta t$  (triângulos). Os círculos correspondem aos valores teóricos obtidos das Eqs. (5.3). As linhas pontilhadas são um guia visual. As linhas cheias em (a) correspondem a um ajuste linear. 71

- 5.3 Função de autocorrelação para os dados de volume de negociação analisados nesta tese. 72
- 5.4 Número de ticks de 30 minutos em função do volume acumulado  $v_c$  na BOVESPA durante o período entre 3/01/05 e 13/09/07. Gráfico inserido: ampliação da curva. 74
- 5.5 Série temporal de  $\sigma$  em função de  $v_c$  para diferentes números de pontos por janela  $\Delta v_c$  (indicado na figura). 75
- 5.6 Histograma dos declives locais do gráfico mostrado na Fig. 5.4, calculados em janelas de 30 ticks (símbolos). Linhas sólidas correspondem ao melhor ajuste de mínimos quadrados de uma FDP Gama. Gráfico inserido: o mesmo gráfico em escala linear. 75
- 5.7 Ajustes da função  $q$ -Gama obtidos para as FDPs dos volumes de negociação para diferentes escalas para a BOVESPA no período de 3/01/05 a 13/09/07: 60min(a), 90min(b), 120min(c), 180min(d). A  $q$ -Gama ajustada foi calculada com peso estatístico e desconsiderando volumes  $\leq 10^{-1}$ . 76
- 6.1 Coeficientes  $\tilde{D}^{(1)}$  e  $\tilde{D}^{(2)}$  dos dados numéricos para  $\tau = 1$ . Linhas correspondem aos melhores ajustes, linear e quadrático respectivamente, por mínimos quadrados aos dados. 81
- 6.2 FDPs dos retornos normalizados. Símbolos correspondem aos histogramas empíricos. FDPs teóricas dadas pela Eq. (3.12) com  $(\tilde{a}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_0) = (0, 85; 0, 45; 0, 40)$  obtidas do cálculo dos coeficientes de tendência e difusão de acordo com as Eqs. (6.3) e (6.4) (linhas pontilhadas), e  $(a_1, b_2, b_0) = (1, 9; 1, 10; 0, 81)$  obtidos da Eqs. (6.15) e (6.16) (linhas cheias). 82
- 6.3 Séries temporais de retornos: empírica (a), artificiais geradas com parâmetros  $(\tilde{a}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_0) = (0, 85; 0, 45; 0, 40)$  (b) e  $(a_1, b_2, b_0) = (1, 9; 1, 10; 0, 81)$  (c). 83
- 6.4 Função de autocorrelação linear  $C(t)$  em função do tempo. Os símbolos correspondem aos dados empíricos, as linhas correspondem aos processos artificiais gerados com parâmetros  $(\tilde{a}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_0) = (0, 85; 0, 45; 0, 40)$  (linhas pontilhadas) e  $(a_1, b_2, b_0) = (1, 9; 1, 10; 0, 81)$  (linhas cheias). 84
- 6.5 (a) Dependência de  $a_1^{(n)}$  em função da ordem de aproximação  $n$  dada na Eq. (6.10), para diferentes valores de  $\tilde{a}_1$ . (b) Ordem na qual o valor limite é atingido em função de  $\tilde{a}_1$ , com erro de 5%. 86
- 6.6 FDPs conjuntas para retornos consecutivos, construídos a partir de: (a) dados empíricos, (b) processo artificial gerado com parâmetros  $(\tilde{a}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_0) = (0, 85; 0, 45; 0, 40)$ , (c)  $(a_1, b_2, b_0) = (1, 9; 1, 10; 0, 81)$  e (d) dados empíricos misturados. 88
- A.1 Parâmetro  $\tilde{a}_1$  calculado para diversos  $\Delta\tau$  a partir das séries de 15 minutos (a) e de 30 segundos (b) apresentadas nesta tese para o IBOVESPA. 109
- A.2 Parâmetro  $\tilde{b}_0$  calculado para diversos  $\Delta\tau$  a partir das séries de 15 minutos (a) e de 30 segundos (b) apresentadas nesta tese para o IBOVESPA. 110

A.3	Coeficientes $a_1$ e $b_2$ (a) e $b_0$ (b) calculados a partir de séries de retornos e incrementos diários. Eles foram calculados em uma região de $\sigma = 1,75$ e com $\Delta\tau = 0,2$ .	113
A.4	Séries de preço dos índices mundiais apresentados.	116
A.5	Séries temporais de volume e de quantidade de transações em um trecho (para melhor visualização do intervalo relativo a 1 dia) no ano de 2006 para a escala de 30 minutos.	117
A.6	Ajustes da função Gama obtidos para as FDPs da quantidade de transações para diferentes escalas para a BOVESPA no ano de 2006: 30min(a), 60min(b), 90min(c), 120min(d). A FDP Gama ajustada foi calculada com peso estatístico e para todo o intervalo de dados.	118
A.7	Número de ticks de 30 minutos em função da quantidade de transações acumulada $Q_{T_c}$ na BOVESPA durante o ano de 2006.	118

## Lista de tabelas

- 4.1 Índices mundiais e seus correspondentes rótulo, abreviatura, país e número de dias de negociação entre 1997 e 2007. 55
- 5.1 Parâmetros de ajuste da função  $q$ -Gama obtidos para as FDPs dos volumes de negociação em diferentes escalas de agregação para a BOVESPA no período entre 3.jan.05 e 13.set.2007. Incluímos também os valores médios  $\langle V \rangle$  das séries originais. A  $P(v)$  ajustada foi calculada com peso estatístico e descartando volumes ( $v \leq 10^{-1}$ ). 72
- 5.2 Parâmetros obtidos para o ajuste da distribuição Gama para os histogramas das taxas em diferentes escalas para a BOVESPA no período de 3/01/05 a 13/09/07. A  $P(\sigma)$  foi ajustada utilizando toda a região dos dados. Para comparação, incluímos os valores teóricos dos parâmetros da FDP  $q$ -Gama, obtidos a partir da Eq. (5.3). 77
- A.1 Teste ADF para séries de preços, incrementos e retornos logarítmicos para os índices Merval, IBOVESPA e AOX e série de volumes para o BOVESPA, respectivamente. 108
- A.2 Teste PP para séries de preços, incrementos e retornos logarítmicos para os índices Merval, BOVESPA e AOX e série de volumes para o BOVESPA, respectivamente. 109
- A.3 Número médio de horas/dia de pregão da série de preços catalogadas a cada 15 minutos para o período entre 01/1998 e 06/2003 no IBOVESPA. 111
- A.4 Número médio de min/dia de pregão da série de preços catalogados a cada 30 segundos para o período entre 01/11/02 e 19/07/06 do IBOVESPA. 111
- A.5 Valores de  $\tau$  segundo a Eq. (3.1) utilizados nas FDPs teóricas e empíricas apresentadas na Fig. 3.9 (de baixo para cima). As cores representam as séries de dados utilizadas para a construção do histograma empírico: preto - diária, vermelho - 15 minutos, azul - 30 segundos. 112
- A.6 Parâmetros das FDPs Gamas ajustadas para as distribuições de  $Q_T$  em diversas escalas. 119

*"Como regra geral, o homem mais bem sucedido na vida é aquele que possui a melhor informação." Benjamin Disraeli*