

## Referências Bibliográficas

- [1] P. Richard, *Nature Materials* **4**, 121 (2005). 1.1
- [2] H.J. Herrmann *Physica A* **313**, 188 (2002). (document), 1.1, 1.1
- [3] X.-Z. Kong, M.-B. Hu, Q.-S. Wu e Y.-H. Wu, *Phys. Lett. A* **341**, 278 (2005). 1.1
- [4] O. Reynolds, *Phil. Mag.* **20**, 469 (1885). 1.2
- [5] M. Otto, J.-P. Bouchaud, P. Claudin, e J.E.S. Socolar, *Phys. Rev. E* **67**, 031302 (2003). 1.2, 2.1
- [6] J. Duran, *Sands, Powders and Grains - An Introduction to the Physics of Granular Materials*, (Springer, 1999). (document), 1.2, 1.3, 2.1, 2.2
- [7] A.D. Rosato, K.J. Strandburg, F. Prinz e R.H. Swendsen, *Physical Review Letters* **58**, 1038 (1987). 1.2, 3.1.2
- [8] B.D. Lubachevsky, *J. Comp. Phys.* **94**, 255 (1991). 1.2
- [9] B.D. Lubachevsky, *Int. J. Comp. Simulation* **2**, 373 (1992). (document), 1.2, 1.5
- [10] R.A. Bagnold, *The Physics of Blown Sand and Desert Dunes* (London: Methuen, 1941). 1.3, 1.4, 2.1
- [11] J.J. Alonso, J.-P. Hovi e H.J. Hermann, *Phys. Rev. E* **58**, 672 (1998). (document), 1.3, 1.6
- [12] H.M. Jaeger, S.R. Nagel e R.P. Behringer, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 1259 (1996). 1.3, 3.1.3
- [13] J.T. Jenkins e S.B. Savage, *J. Fluid Mech.* **130**, 187 (1983). 1.4
- [14] G.M. Gutt e P.K. Haff, *Int. J. Multiphase Flow* **17**, 621 (1991). 1.4
- [15] K. Feitosa e N. Menon, *Physical Review Letters* **88**, 198301 (2002). 1.4
- [16] H.J. Herrmann, *J. Phys. II France* **3**, 427 (1993). 1.4

- [17] K. Feitosa e N. Menon, *Physical Review Letters* **92**, 164301 (2004). 1.4
- [18] G. Gallavotti e E.G.D. Cohen, *Physical Review Letters* **74**, 2694 (1995). 1.4
- [19] S. McNamara e W.R. Young, *Phys. Rev. E* **53**, 5089 (1996). 1.4
- [20] I. Goldhirsch e G. Zanetti, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1619 (1999). 1.4
- [21] S.A. Balbus, *ASP Conference Series* **80**, 328 (1995). 1.4
- [22] J. Schmidt, H. Salo, O. Petzschmann e F. Spahn, *Astronomy and Astrophysics* **345**, 646 (1999). 1.4
- [23] J.S. Olafsen e J.S. Urbach, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4369 (1999). 1.5
- [24] I.S. Aranson e L.S. Tsimring, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 641 (2006). 1.5, 3.1.2
- [25] S. Douady, S. Fauve e C. Laroche, *Europhys. Lett.* **8**, 621 (1989). 1.5
- [26] P.B. Umbanhowar, F. Melo e H.L. Swinney, *Nature (london)* **382**, 793 (1996). (document), 1.7, 1.5, 1.8
- [27] T. Mullin, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4741 (2000). (document), 1.9
- [28] T. Mullin, *Science* **295**, 1851 (2002). (document), 1.9
- [29] T. Aste e D. Weaire, *The Pursuit Of Perfect Packing* (Taylor and Francis) 2000. 1.6
- [30] K. Rietma, *The Dynamics Of Fine Powders* (Amsterdam: Elsevier Applied Science) 1991. (document), 1.10
- [31] J.D. Bernal e J. Mason, *Nature* **385**, 910 (1960). 1.6
- [32] H.M. Jaeger e S.R. Nagel, *Science* **255**, 1523 (1992). 1.6
- [33] H.M. Jaeger, S.R. Nagel e R.P. Behringer *Phys. Today* **49**, 32 (1996). 1.6
- [34] S.F. Edwards, *J. Stat. Phys* **62**, 889 (1991). 1.6
- [35] A. Mehta e S.F. Edwards, *Physica A* **157**, 1091 (1989). 1.6
- [36] H.A. Janssen, *Z. Vereins Deutsch Ing.* **39**, 1045 (1895). 1.7, 2.2, 2.6.1
- [37] E.F. del Peloso, A. Wiermann e W.A.M. Morgado, Trabalho desenvolvido para empresa SIMMETRY (2007). (document), 1.12
- [38] R. Resnick e D. Halliday, *Física 2* (John Wiley et Sons, 1981). 1.7, 3.1.1

- [39] F. Radjai, cond-mat.soft/0801.4722v1 (2008). 1.7
- [40] H.C. Marques Fernandes, J.J. Arenzon, Y. Levin e M. Sellitto, *Physica A* **327**, 94 (2003). 1.8
- [41] O. Pouliquen *Phys. Fluids* **11**, 542 (1999). 1.8, 3.1.3
- [42] L.E. Silbert, D. Ertaş, G.S. Grest, T.C. Halsey, D. Levine e S.J. Plimpton, *Phys. Rev. E* **64**, 051302 (2001). 1.8, 3.1.3, 3.1.3
- [43] D. Bonamy, F. Daviaud, L. Laurent, M. Bonetti e J.P. Bouchaud, *Physical Review Letters* **89**, 034301 (2002). 1.8, 3.1.3
- [44] O. Pouliquen, *Physical Review Letters* **93**, 248001 (2004). 1.8, 3.1.3, 3.1.3
- [45] D. Ertaş e T.C. Halsey, *Europhys. Letters* **60**, 931 (2002). 1.8, 3.1.3
- [46] M.Y. Louge, *Phys. Rev. E* **67**, 061303 (2003). 1.8, 3.1.3
- [47] T.C. Halsey e D. Ertaş, cond-mat/0506170 (2005). 1.8, 3.1.3, 3.1.3, 3.4
- [48] P. Jop, Y. Forterre e O. Pouliquen, *Nature* **441**, 727 (2006). 1.9, 2.5.1, 3.1.3
- [49] O. Baran, D. Ertaş, T.C. Halsey, G.S. Grest e J.B. Lechman, cond-mat/0608641 (2006). (document), 1.9, 3.1.3, 3.1.3, 3.5
- [50] R. Brewster, G.S. Grest, J.W. Landry e A.J. Levine, cond-mat/0509122 (2005). 1.9
- [51] L. Landau e E.M. Lifshitz, *Theory of Elasticity* (3rd Edition, Butterworth, Heinemann, Oxford UK, 1998). 2.1, 2.1
- [52] Y. Jiang and M. Liu, *Physical Review Letters* **91**, 144301 (2003). 2.1
- [53] Y. Jiang and M. Liu, *Physical Review Letters* **91**, 105501 (2007). 2.1
- [54] Y. Jiang and M. Liu, cond-mat: 0807.1883v1 (2008). 2.1
- [55] D. Fenistein e M. van Heck, *Nature (london)* **425**, 256 (2003). (document), 2.2, 2.5.1, 2.6.1, 2.11, 2.12, 2.6.3, 2.15, 3, A.1
- [56] D. Fenistein, J.W. van de Meent e M. van Heck, *Physical Review Letters* **92**, 094301 (2004). (document), 2.2, 2.6.1, 2.11, 2.12, 2.6.3, 3, A.1, A.1, A.2
- [57] T. Unger, J. Török, J. Kertész e D.E. Wolf, *Physical Review Letters* **92**, 214301 (2004). (document), 2.2, 2.2, 2.6.1, 2.6.1, 2.6.1, 2.12, 2.6.3, 2.14, 2.6.3, 2.15, 2.16, 4, 4, A.2

- [58] J. Török, T. Unger, J. Kertész e D.E. Wolf, *Phys. Rev. E* **75**, 011305 (2007). (document), 2.2, 2.6.1, 2.6.1, 2.12, 2.6.3, 2.16, 4, 4, A.2
- [59] X. Nie, E. Ben-Naim, e S. Chen, *Physical Review Letters* **89**, 204301 (2002). 2.2
- [60] L. Onsager, *Physical Review* **35**, 405 (1931). 2.2, 2.6.1, 2.6.3, A.2
- [61] L. Onsager, *Physical Review* **38**, 2265 (1931). 2.2, 2.6.1, 2.6.3, A.2
- [62] A.L. Bordignon, L. Sigaud, G. Tavares, H. Lopes, T. Lewiner e W.A.M. Morgado, *Physica A* **388**, 2099 (2009). (document), 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.7, 2
- [63] M. Vergeles, A. Maritan e J.R. Banavar, *Phys. Rev. E* **55**, 1998 (1997). 2.6.3
- [64] A. Giacometti, A. Maritan, F. Toigo e J.R. Banavar, *J. Stat. Phys.* **82**, 1669 (1996). 2.6.3
- [65] A.W. Williamson, *Nature* **1**, 20 (1869). 3.1.1
- [66] A. Fick, *Phil. Mag. S.4* **10**, 30 (1855). 3.1.1
- [67] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentos da Física 3 - 4a. Edição* (John Wiley et Sons, 1993). 3.1.1
- [68] J. Philibert, *Diffusion Fundamentals* **2**, 1 (2005). 3.1.1, 3.1.1
- [69] R. Brown, *Phil. Mag.* **4**, 161 (1828). 3.1.1
- [70] G. Gamow, *One, Two, Three...Infinity* (Dover Publications, 1988). (document), 3.1
- [71] A. Einstein (edited by R. Fürth), *Investigations on the Theory of the Brownian Movement* (Dover Publications, 1956). 3.1.1
- [72] S. Chandrasekhar *Rev. Mod. Phys.* **15**, 1 (1943). 3.1.1
- [73] P. Hänggi e F. Marchesoni *Chaos* **15**, 026101 (2005). 3.1.1
- [74] T. Bickel, *Physica A* **377**, 24 (2007). 3.1.1
- [75] T.S. Ursell, *The Diffusion Equation - A Multi-Dimensional Tutorial* (C.I.T., 2007). 3.1.1, 3.1.1
- [76] H. Westfahl, A.O. Caldeira, G. Medeiros-Ribeiro e M. Cerro, *Phys. Rev. B* **70**, 195320 (2004). 3.1.1

- [77] A. Rosas, A.H. Romero, V.F. Nesterenko e K. Lindenberg *Physical Review Letters* **98**, 164301 (2007). 3.1.1
- [78] A. Rosas e K. Lindenberg, *Phys. Rev. E* **68**, 041304 (2003). 3.1.1
- [79] N.C. van Kampen, *Stochastic Processes In Physics And Chemistry* (North Holland, Amsterdam, 1992). 3.1.1, 3.1.1
- [80] J. Gollub, *Physics Today* **56**, 10 (2002). 3.1.2
- [81] I.S. Aranson e L.S. Tsimring, *Phys. Rev. E* **64**, 020301 (2001). 3.1.2
- [82] L. Bocquet, W. Losert, D. Schalk, T.C. Lubensky e J.P. Gollub, *Phys. Rev. E* **65**, 011307 (2002). 3.1.2
- [83] A. Lemaître, *Physical Review Letters* **89**, 064303 (2002). 3.1.2
- [84] J.T. Jenkins e D.K. Yoon, *Physical Review Letters* **88**, 194301 (1985). 3.1.2
- [85] J.B. Knight, H.M. Jaeger e S.R. Nagel, *Physical Review Letters* **70**, 3728 (1993). 3.1.2
- [86] A.H. Makse, S. Havlin, P.R. King e H.E. Stanley, *Nature* **386**, 379 (1997). (document), 3.1.2, 3.2
- [87] A. Samadani, A. Pradhan e A. Kudrolli, *Phys. Rev. E* **62**, 1059 (1999). 3.1.2
- [88] A. Samadani e A. Kudrolli, *Phys. Rev. E* **64**, 051301 (2001). 3.1.2
- [89] K. Choo, T.C.A. Molteno e S.W. Morris, *Phys. Rev. E* **79**, 2975 (1997). (document), 3.1.2, 3.3, 3.4
- [90] O. Zik, D. Levine, S.G. Lipson, S. Shtrichman e J. Stavans, *Physical Review Letters* **73**, 644 (1994). 3.1.2
- [91] C. Catuto e U.M.B. Marconi, *Physical Review Letters* **92**, 174502 (2004). 3.1.2
- [92] I. Aranson e L. Tsimring, *Physical Review Letters* **82**, 4643 (1999). (document), 3.1.2, 3.4
- [93] J.M. Ottino e D.V. Khakhar, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32**, 55 (2000). 3.1.2
- [94] Z. Khan, W.A. Toraruk e S.W. Morris, *Europhys. Lett.* **66**, 212 (2004). 3.1.2
- [95] Z. Khan e S.W. Morris, *Physical Review Letters* **94**, 048002 (2005). 3.1.2
- [96] L.E. Silbert, *Physical Review Letters* **94**, 098002 (2005). 3.1.3

- [97] P.-A. Lemieux e D.J. Durian, *Physical Review Letters* **85**, 4273 (2000). 3.1.3
- [98] G.D.R. Midi, *Euro. Phys. Journal E* **14**, 341 (2004). 3.1.3
- [99] F. da Cruz, S. Emam, M. Prochnow, J.-N. Roux e F. Chevoir, *Phys. Rev. E* **72**, 021309 (2005). 3.1.3
- [100] L. Sigaud e W.A.M. Morgado, em preparação. 3.2.1, 3.2.2, 3.2.4, 3.2.5, 6
- [101] J. Török, S. Krishnamurthy, J. Kertész e S. Roux, *Physical Review Letters* **84**, 3851 (2000). A.2

## A

### Modelo Teórico de Török *et al.*

#### A.1

##### O Experimento

Em 2003, Fenistein *et al.* observaram comportamentos interessante de formação de bandas de cisalhamento em experimentos com cilindros com um disco girante na base (55, 56), nos quais Török *et al.* se basearam para desenvolver seu modelo.

O arranjo experimental consistia de um recipiente cilíndrico preenchido com grãos até uma altura  $H$ . A sua base era dividida entre um anel externo girante conjuntamente com as paredes do cilindro e um disco interno estático de raio  $R_S$  (ver Figura 2.11). Dessa forma, a parte interna e externa do material granular eram rotacionadas uma em relação à outra, criando uma banda de cisalhamento com simetria cilíndrica, começando no perímetro do disco estacionário da base e se estendendo através do material até a superfície livre. Ali a velocidade angular do material granular foi medida como uma função do raio, seguindo com alta precisão uma função erro caracterizada por dois parâmetros: a espessura  $W$  e a posição  $R_C$  da zona cisalhada. A espessura cresce com  $H$  enquanto  $R_C$  diminui. Interessantemente, a posição de  $R_C$  na superfície provou ser muito robusta - ela depende apenas dos parâmetros de comprimento  $H$  e  $R_S$ , mas não das propriedades das partículas ou da taxa de cisalhamento, o que não ocorre com a espessura da banda, que é afetada pelo tamanho e formato dos grãos, mas insensível a mudanças em  $R_S$ . O fato que  $R_C$  e  $W$  dependem de parâmetros de controle diferentes sugere que as duas quantidades podem ser estudadas separadamente.

Neste trabalho, o foco será apenas em  $R_C$ . Através de uma escolha conveniente de parâmetros como tamanho e formato dos grãos, a espessura pode ser arbitrariamente pequena em comparação com  $H$  e  $R_S$ . Isso justifica a modelagem da banda de cisalhamento como uma camada infinitamente fina, a qual representa o limite entre os dois blocos de material dentro do qual nenhum fluxo ocorre.

Foi observado (56), nos experimentos, que a posição  $R_C(R_S, H)$  na

superfície obedece a seguinte lei de escala:

$$R_C(R_S, H) = R_S \left[ 1 - \left( \frac{H}{R_S} \right)^\alpha \right], \quad (\text{A-1})$$

com  $\alpha \approx 2.5$  para valores experimentais de  $H/R_S$ . É muito mais difícil obter experimentalmente medidas para a posição da banda de cisalhamento no meio do material,  $r(h)$ , para  $H$  e  $R_S$  fixos. Mesmo assim, os dados experimentais mostram claramente que o perfil da banda no interior do material seguem uma forma diferente daquela para  $R_C(R_S, H)$ , e que o raio a uma altura  $h$  depende de  $H$ , como mostrado na Figura A.1.

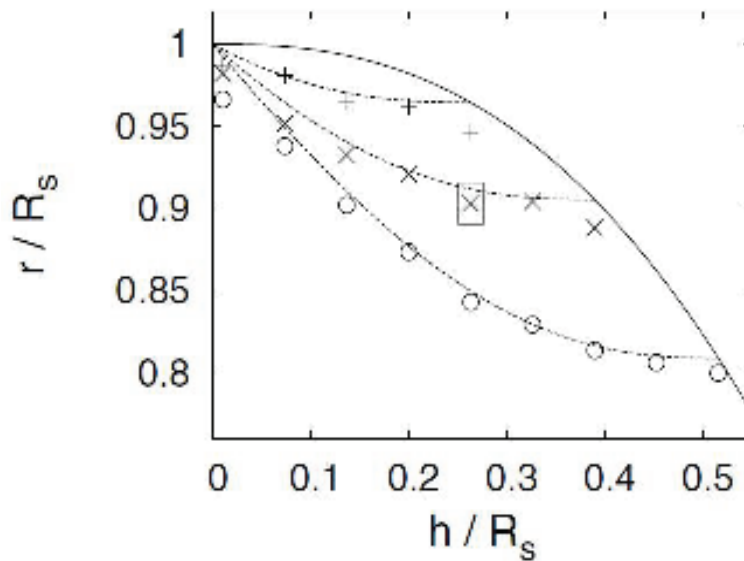


Figura A.1: Os símbolos representam dados experimentais mostrando o raio  $r$  da banda de cisalhamento a altura  $h$  (56), para alturas  $H$  diferentes. O retângulo no meio representa o erro estimado em todas as direções. A linha cheia é a curva de ajuste encontrada para as posições na superfície, enquanto as pontilhadas são as posições calculadas com base na linha cheia.

## A.2 Modelagem Teórica

Török *et al.* (57, 58) se baseiam em um princípio variacional para derivar o formato da banda de cisalhamento para toda altura  $h$ , uma vez que já haviam se utilizado de um princípio de otimização anteriormente para descrever a formação de bandas de cisalhamento em outro contexto (101).

Aqui eles mostram que o perfil da banda para toda altura  $h$  pode ser determinado sabendo-se  $R_C(R_S, H)$ . Pegando-se um sistema com altura total  $H$  e achando a posição  $r$  da banda de cisalhamento a uma altura  $h < H$ , o subsistema acima de  $h$  pode ser considerado como um sistema menor com



altura  $(H - h)$  e base com disco girante de raio  $r$ . Pressão e condições de contorno são as mesmas, e a diferença na espessura é desprezada. Assim, conclui-se que

$$R_C(R_S, H) = R_C(r, H - h). \quad (\text{A-2})$$

Logo, sabendo-se a função  $R_C(R_S, H)$ , pode-se calcular o formato  $r(h)$  de toda a banda. Substituindo a relação empírica (A-1) em ambos os lados da relação (A-2), chega-se a:

$$h = H - r \left[ 1 - \frac{R_S}{r} \left[ 1 - \left( \frac{H}{R_S} \right)^\alpha \right] \right]^{1/\alpha}, \quad (\text{A-3})$$

cujas curvas resultantes estão dispostas no gráfico da Figura A.1, e mostram boa concordância com o experimento.

Para descrever a forma da banda de cisalhamento, a idéia de Török et al. é de simplesmente aplicar o princípio de mínima dissipação (60, 61). Conseqüentemente, o requisito é um fluxo estável que siga os vínculos externos mas que forneça a menor taxa de dissipação de energia.

Aplicando isso à geometria cilíndrica dentro da aproximação de banda fina, a questão do formato torna-se um problema variacional entre as funções  $r(h)$  (onde  $H$  e  $R_S$  são mantidos fixos), com a condição  $r(0) = R_S$ , enquanto a condição de contorno em  $H$  é livre. A taxa de dissipação é dada pela velocidade de deslizamento  $r(h)\omega$  entre os dois lados da banda vezes o estresse de cisalhamento  $\sigma_{tn}$  integrado ao longo de toda a banda. A menos de uma constante, a expressão a ser minimizada é

$$\int_0^H r^2 \sqrt{1 + \left( \frac{dr}{dh} \right)^2} \sigma_{tn} dh = \min. \quad (\text{A-4})$$

Essa quantidade representa não apenas a taxa de dissipação mas também o torque mecânico que as partes antes e depois da banda exercem uma sobre a outra. Assim, a mínima dissipação para esta geometria específica equivale ao torque mínimo, o que justifica esta forma de tratar o problema, uma vez que é plausível que a superfície resultante é estabelecida onde a resistência é menor.

Para o estresse de cisalhamento na Equação (A-4) o modelo feito é bem simples, análogo à fricção coulombiana entre dois corpos sólidos: contra a direção de deslizamento, com magnitude proporcional à pressão normal de um lado no outro, independente da velocidade, e com a suposição de pressão hidrostática (isto é, proporcional à profundidade - negligenciando o efeito Janssen e anisotropias do sistema). Com isso, a Equação (A-4) pode ser reescrita como

$$\int_0^H r^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dh}\right)^2} (H - h) dh = \min. \quad (\text{A-5})$$

Convém frisar que as soluções que minimizam a integral acima automaticamente têm a propriedade de escala dada por

$$\frac{r}{R_S} = f\left(\frac{H}{R_S}, \frac{h}{R_S}\right),$$

que é obtida através da Relação (A-2) e da escala obtida experimentalmente de que o raio na superfície  $R_C/R_S$  depende apenas de  $H/R_S$  (56). Isso quer dizer que tomar um sistema  $\lambda$  vezes maior (ou seja, com  $\lambda R_S$ ,  $\lambda H$  e  $\lambda r(h/\lambda)$ ) implica apenas em mudar o valor da integral por um fator constante ( $\lambda^4$ ), representando o mesmo problema variacional.

A partir daqui,  $r(h)$  é discretizado e a minimização é feita numericamente, baseado em otimização genética:  $r(h)$  é variado aleatoriamente, mas apenas as variações que diminuam o valor do lado esquerdo da Equação (A-5) são aceitos.

Os valores finais obtidos para  $r(h)$  são dispostos nas curvas do gráfico da Figura 2.12, descrevendo o perfil das bandas de cisalhamento ao longo do material granular no interior do cilindro, em concordância com os resultados experimentais.