



**Lucas Mauricio Sigaud**

**Estudos da Dinâmica de Materiais Granulares  
Densos**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Departamento de Física da PUC–Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física

Orientador : Prof. Welles Antonio Martinez Morgado

Co–Orientador: Prof. Geovan Tavares dos Santos

Rio de Janeiro  
Junho de 2009



**Lucas Mauricio Sigaud**

**Estudos da Dinâmica de Materiais Granulares  
Densos**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Departamento de Física do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Welles Antonio Martinez Morgado**

Orientador

Departamento de Física — PUC-Rio

**Prof. Geovan Tavares dos Santos**

Co-Orientador

Departamento de Matemática - PUC-Rio

**Prof. Luca Moriconi**

UFRJ

**Prof. Marcio Argollo Ferreira de Menezes**

UFF

**Prof. Hélio Cortes Vieira Lopes**

Departamento de Matemática - PUC-Rio

**Prof. Thomas Lewiner**

Departamento de Matemática - PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 16 de Junho de 2009

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### Lucas Mauricio Sigaud

Possui graduação em Física pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2002) e mestrado em Física pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2005). Tem experiência na área de Física, com ênfase nas áreas de Física Atômica e Molecular e de Materiais Granulares, atuando principalmente nos seguintes temas: atmosfera, íons, colisões atômicas, materiais granulares e física estatística.

#### Ficha Catalográfica

Sigaud, Lucas Mauricio

Estudos da Dinâmica de Materiais Granulares Densos / Lucas Mauricio Sigaud; orientador: Welles Antonio Martinez Morgado; co-orientador: Geovan Tavares dos Santos. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Física, 2009.

v., 113 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Física.

Inclui referências bibliográficas.

1. Física – Tese. 2. Sistemas Granulares Densos. 3. Difusão Correlacionada. 4. Segregação Granular. 5. Bandas de Cisalhamento. 6. Arcos. 7. Processos Estocásticos. I. Morgado, Welles Antonio Martinez. II. Santos, Geovan Tavares dos. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Física. IV. Título.

CDD: 530

Aos Fiorentinos.  
Aos meus irmãos, pais, avós, tios e amigos.  
E especialmente à Tabitha, por tudo.

## Agradecimentos

Em primeiro lugar, à Tabitha por todo o amor, carinho, apoio, compreensão e, principalmente, paciência durante os últimos quatro anos, e por estar sempre ao meu lado - no matter what.

Ao meu orientador, Professor Welles Morgado, pela confiança e pelos ensinamentos. Pelas discussões, de Langevin a Kasparov, de Barack Obama a Halsey-Ertaş. Pelo exemplo.

Aos colaboradores do Departamento de Matemática da PUC-Rio, o doutorando Alex Laier Bordignon e os professores Hélio Lopes, Thomas Lewiner e Geovan Tavares, pelo trabalho e companheirismo.

Agradeço a toda a minha família, em especial meus pais, Glória e Geraldo, meus avós, Aldyr, Raimundo, Thereza e Vilma, e meus irmãos André e Marcelo.

À “ganguê”, que sempre levarei comigo e que fazem de mim quem eu sou: Vini, Ju, Kmila, Julio, Troço, Lua, João, Bob, Rodrigo, Cadu, Mariana, Phils, Carol, Carlos, Natalia, Ian, Bruno e Touch.

Aos grandes amigos que me ajudaram a trilhar esse caminho: Flávia, Clara, Pedro, Ana, Renato, Diogo, Renata, Márcio, Samantha, Gabriel, Thiesen, Gustão, Cíntia, Dani, Bernardo, Bedois, Raíle, Dennis, Carina, Maria Fernanda, Pedro, Ricardo, Rodrigo Maier, Paulo, Rafael Coutinho, Rafael Fino, Leila, Paulinha, Fábio, César, FH, Thiago, Vanessa, Kelly, Mary, Eric, Jutta, Denis, Pat, Billy, Dipanwita, Christian, Jimena, Elisa, Buddhika, Ileana, Susanta, Marco, André Tavares, Luiza, Carol, Henrique, Mari, Thiago PES, Esther, Fernanda, Luana, Valéria, Jô, Zé, Homero...

Aos amigos e colaboradores do grupo de pesquisa do Laboratório de Colisões de Elétrons, da UFRJ: Natalia, Vitor, Ana, Faella, Toni, Wania, Hugo, Lúcia, Mansukh e, em especial, Eduardo Montenegro.

Aos Fiorentinos, pela constante inspiração e estímulo.

A todo o pessoal do OutraCoisa, principalmente os queridos Bruno, Eduardo e Sissi.

Aos Nicolettis e von Krügers, especialmente Marília e Pto, que me acolheram e se tornaram família.

A todos os colegas, professores, secretárias e funcionários do Departamento de Física, que contribuíram para o meu crescimento acadêmico.

Mais uma vez ao grande amigo Renato, pela disponibilização do computador no qual este trabalho foi redigido.

À FAPERJ e ao CNPq, pelas bolsas de estudo concedidas.

E, finalmente, a Sonia Rocha - simplesmente por existir.

## Resumo

Sigaud, Lucas Mauricio; Morgado, Welles Antonio Martinez; Santos, Geovan Tavares dos. **Estudos da Dinâmica de Materiais Granulares Densos**. Rio de Janeiro, 2009. 113p. Tese de Doutorado — Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Materiais granulares, por sua enorme gama de aplicações industriais (da indústria alimentícia à astrofísica), vêm sendo cada vez mais estudados durante as últimas duas décadas. No entanto, muito da descrição física inerente ao comportamento deste tipo de material ainda elude os cientistas, tornando este um campo particularmente rico de investigação. Dentre as questões insolutas, estão algumas de crescente interesse, como os mecanismos de fluxo e transporte de grãos, que descrevem fenômenos como a difusão correlacionada e a formação de bandas de cisalhamento, por exemplo. Através de modelos fenomenológicos e matemáticos, este trabalho visa melhorar a compreensão destes fenômenos e dos mecanismos por trás deles, em especial a participação fundamental dos arcos de forças formados pelos grãos. Através de um modelo fenomenológico razoavelmente simples e de simulações computacionais, o papel dos arcos fica evidente ao se observar, nas simulações, o comportamento característico da formação de bandas de cisalhamento, reproduzindo resultados experimentais e previsões de modelos teóricos encontrados na literatura. Concomitantemente, foi desenvolvido um modelo matemático teórico para se descrever a difusão correlacionada de grãos, fenômeno que acreditamos estar baseado no mesmo princípio de transporte através dos arcos, reproduzindo o comportamento qualitativo de simulações computacionais.

## Palavras-chave

Sistemas Granulares Densos. Difusão Correlacionada. Segregação Granular. Bandas de Cisalhamento. Arcos. Processos Estocásticos.

## Abstract

Sigaud, Lucas Mauricio; Morgado, Welles Antonio Martinez(Advisor); Santos, Geovan Tavares dos(Coadvisor). **Studies on the Dynamics of Dense Granular Systems**. Rio de Janeiro, 2009. 113p. Doctoral Thesis — Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Granular materials, due to their huge amount of industrial applications (from food industry to astrophysics), have been the object of an increasing number of studies throughout the last couple of decades. Much of the physical description concerning the behaviour of this kind of material, however, still eludes scientists, turning this field of research into a particularly rich one. Among the unsolved questions in this area there are some of growing interest, such as the mechanisms of grains transport and flux, which describe phenomena like correlated diffusion and the formation of shear bands, for example. By means of phenomenological and mathematical models, this work tries to improve the understanding of these phenomena and the mechanisms behind them, particularly the fundamental role of arches of forces created by the grains. Using a relatively simple phenomenological model and computer simulations, the role of arches becomes evident when it is observed, in the simulations, the characteristic behaviour of shear bands formation, reproducing experimental results and the predictions of theoretical models found in the literature. Simultaneously, a theoretical mathematical model was developed to describe granular correlated diffusion, a phenomenon we believe is based on the same principle of transportation by means of arches, reproducing the qualitative behaviour of computer simulations.

## Keywords

Dense Granular Systems. Correlated Diffusion. Granular Segregation. Shear Bands. Arches. Stochastic Processes.

## Sumário

1	Introdução	<b>15</b>
1.1	Materiais Granulares	15
1.2	Densidade Granular	17
1.3	Superfícies Granulares	19
1.4	Areia Fluida	21
1.5	Padrões formados por camadas vibrantes	24
1.6	Acondicionamentos Granulares	28
1.7	Arcos de Grãos	29
1.8	Difusão Granular	33
1.9	Este Trabalho	34
2	Arcos em Meios Granulares Densos	<b>36</b>
2.1	Introdução: Estresses	36
2.2	O Efeito do Estresse	39
2.3	Dinâmica Estocástica para Arcos	43
2.4	Arcos Ramificados	45
2.5	Modelo Computacional Bidimensional	47
2.6	Modelo Computacional Tridimensional	61
2.7	Sumário	69
3	Difusão Correlacionada	<b>72</b>
3.1	Introdução: Difusão	72
3.2	A Equação de Difusão Correlacionada	83
3.3	Simulações	93
3.4	Discussão	97
4	Conclusão	<b>101</b>
A	Modelo Teórico de Török <i>et al.</i>	<b>110</b>
A.1	O Experimento	110
A.2	Modelagem Teórica	111



## Lista de figuras

- 1.1 Exemplo real de uma distribuição de tamanhos granulares retirado de uma aplicação industrial (2). 16
- 1.2 Reprodução da experiência proposta por Reynolds: uma garrafa plástica, cheia de areia e água, é deformada, fazendo o nível da água baixar. Quando a garrafa volta ao normal, o nível da água sobe novamente. 18
- 1.3 Modelo simples para dilatância (6). 19
- 1.4 Representação do Efeito Castanha-do-Pará. As imagens acima estão em ordem cronológica, da esquerda para direita, demonstrando que o grão maior (a esfera de isopor, indicada pela seta vermelha) “sobe” após o recipiente ser submetido a vibrações verticais. 20
- 1.5 Sistema de discos de mesmo tamanho a frações volumétricas (a)  $\rho = 0.5628$ , (b)  $\rho = \rho_R = 0.7394$  e (c)  $\rho = 0.8681$ , obtidas por simulação numérica (9). 21
- 1.6 Perfil de uma pilha de grãos de açúcar. Nota-se claramente a concordância com o modelo teórico de Alonso *et al.* (11), particularmente com o arredondamento próximo à base do cone. 22
- 1.7 Padrões representativos em camadas granulares sob vibração vertical para várias frequências e amplitudes de vibração diferentes: (a) linhas, (b) quadrados, (c) hexágonos, (d) espirais, (e) interfaces e (f) “oscillons” (26). 25
- 1.8 “Oscillon” obtido em uma plataforma vibrando verticalmente por Umbanhowar *et al.* (26). 26
- 1.9 Seqüência de fotos de uma camada de mistura de bolinhas de cobre e sementes de papoula em uma cavidade sob vibrações horizontais (frequência de 12,5 Hz e amplitude de 2mm), nos instantes  $t = 5, 10, 15, 30, 60$  e 360 minutos, em ordem da esquerda para direita, de cima para baixo (27, 28). 27
- 1.10 O mesmo conjunto de moedas confinado entre duas paredes de vidro paralelas sob diferentes  $\Psi$ 's (30). 28
- 1.11 Representação ilustrativa da transmissão desigual e, principalmente, não-linear de forças em uma pequena pilha de grãos, devido à formação de arcos. 29
- 1.12 Esquema de forças em um silo repleto de grãos. Pode ser observado na figura que as forças originadas acima de uma certa altura tendem a ser aplicadas nas paredes do silo, em vez de em sua base (37). 31

- 1.13 Experiência demonstrando o Efeito Janssen: em ordem cronológica, de cima para baixo, pode-se ver na coluna da esquerda o recipiente (que não encosta na balança) sendo preenchido por areia, enquanto a balança continua marcando o mesmo valor, pois o peso dos grãos é transmitido por meio de arcos de força para as laterais do recipiente. Na coluna da direita, após o recipiente ser retirado, permitindo que toda a areia se espalhe na balança, pode-se ver o medidor marcando o peso real da pilha de grãos. 32
- 1.14 Ilustração de como os grãos seriam transportados em um meio granular denso: cunhas de arcos, movendo-se com velocidade  $v$ , arrastariam o material granular enquanto as forças transmitidas fossem fortes o suficiente para mover os grãos e manter o arco intacto. 34
- 2.1 Uma ilustração do nosso arranjo experimental modelado. Dois cilindros concêntricos, de raios diferentes, entre os quais preenchemos de grãos, giram com velocidades fixas em sentidos opostos, induzindo o aparecimento de um cisalhamento no material granular em seu interior. 40
- 2.2 Esquema ilustrativo da banda de cisalhamento. Regiões com velocidades opostas, gerando uma região de velocidade zero no meio (hachurada na figura). 41
- 2.3 Foto da estrada A6187, na Inglaterra, próximo a Castleton. Cisalhamento do solo tornou-a destruída e impossível de se trafegar. 42
- 2.4 Ilustração do modelo computacional 2D. O espaço entre as células é apenas um recurso gráfico para facilitar a visualização das forças ao longo das bordas - ele não existe na simulação. 45
- 2.5 Um diagrama simples da ramificação dos arcos e suas forças ( $T$ ) a intervalos regulares ( $L$ ). 46
- 2.6 Imagens da simulação computacional. **a**, **b** e **c** mostram três estágios diferentes da simulação, respectivamente: nos estágios iniciais, onde as velocidades (representadas por flechas) estão todas distribuídas aleatoriamente ao longo do meio, à exceção das paredes (flechas vermelhas); em um estágio intermediário, onde podem ser vistas várias fileiras de células com velocidades orientadas da mesma forma; e no estado de equilíbrio, com quase metade dos grãos se movendo para um lado, e metade para o outro, com a banda de cisalhamento formada no centro. **d** mostra um zoom desta área central, onde a velocidade é distribuída aleatoriamente e o seu módulo é praticamente zero, resultando em uma banda de cisalhamento (62). 54
- 2.7 Gráficos dos perfis de velocidade (em módulo) e densidade para três configurações diferentes do modelo computacional simplificado:  $F_1 = F_2$  (vermelho),  $F_1 > F_2$  (verde) e  $F_2 = 0$  (azul). É fácil ver a formação análoga a uma banda de cisalhamento no primeiro gráfico (de velocidade), enquanto o segundo mostra que a densidade dos grãos no interior das células se mantém razoavelmente constante em todo o sistema (62). 56

- 2.8 Gráficos dos perfis de magnitude da velocidade (primeira coluna) e densidade (segunda coluna) para três diferentes configurações do modelo computacional completo, de cima para baixo, respectivamente:  $F_1 = F_2$ ,  $F_1 = 2F_2$  e  $F_2 = 0$ . As linhas coloridas diferentes representam configurações diferentes dos parâmetros das equações do modelo (62). 58
- 2.9 Gráficos dos perfis de velocidade (em módulo) média e densidade média (primeira e segunda colunas, respectivamente) para três diferentes configurações do nosso modelo computacional completo, respectivamente de cima para baixo:  $F_1 = F_2$ ,  $F_1 = 2F_2$  e  $F_2 = 0$ . Os perfis acima representam médias feitas sobre todas as configurações de parâmetros testadas. É fácil perceber a formação da banda de cisalhamento - em todos os três casos - na primeira coluna, enquanto a segunda mostra que não há formação de aglomerado e que a densidade das células se mantém constante através do meio (62). 59
- 2.10 Representação da formação da banda de cisalhamento e dos arcos de forças responsáveis pela mesma, respectivamente da esquerda para a direita:  $F_1 = F_2$ ,  $F_1 = 2F_2$  e  $F_2 = 0$ . A intensidade dos atritos gerados primeiramente pela parede e depois pelos arcos de força na formação de novos arcos fazem com que as forças que promovem o movimento empurrem mais grãos nos casos com  $F_1 > F_2$ , deslocando a banda de cisalhamento. 60
- 2.11 Acima, representação do experimento a ser simulado, em 3 dimensões. Abaixo, ilustração do experimento conduzido por Fenistein *et al.* (55, 56). É bastante similar ao experimento modelado, como pode ser visto acima, mas com alturas menores do cilindro e com grãos o preenchendo completamente.  $R_s$  representa aqui o raio do disco girante da base. 63
- 2.12 Gráficos obtidos por Török *et al.* (57, 58) para modelar os experimentos realizados por Fenistein *et al.* (55, 56). Nele está disposta a variação do raio da banda de cisalhamento com a sua altura. Abaixo, olhando o gráfico original de lado (tomando  $r/R_s$  como base), pode-se ver o formato do perfil da banda de cisalhamento sendo delineado pelas linhas do mesmo. 64
- 2.13 Célula 3D cúbica. Cada borda é identificada por um código de duas letras. 65
- 2.14 Imagens da simulação com o sistema em equilíbrio. Nota-se claramente o domo colapsado nas imagens de cima (onde as setas representam a velocidade dos grãos), conforme modelo de Török (57). As imagens inferiores mostram o diagrama de forças horizontais com dois cortes em alturas diferentes, onde percebe-se a formação de vórtices. 68

- 2.15 Resultados observados para preenchimentos  $H$  rasos (com  $H < R$ ) e profundos (com  $H > R$ ). Os resultados obtidos por Fenistein (55) são reproduzidos para o cilindro raso, bem com as previsões teóricas de Török (57) para os dois casos. Nota-se claramente na comparação entre as áreas coloridas a diferença do formato da banda de cisalhamento de um caso para outro. 69
- 2.16 Imagem do sistema em equilíbrio para o caso  $r > R/2$ , onde em vez de colapsar para o centro do cilindro, o colapso da banda de cisalhamento ocorre em direção às paredes, onde os coeficientes de atrito cinético e estático são nulos, o que é coerente com a mínima dissipação (57, 58). 70
- 3.1 Descrição satírica do movimento browniano como o andar de um cavalheiro bêbado (70). 74
- 3.2 Segregação granular em um fluxo inclinado gerado pela gravidade (86), em instantes diferentes de tempo (consecutivos de  $a$  a  $d$ ). 79
- 3.3 Diagrama espaço-tempo de segregação granular em um longo cilindro girante, demonstrando segregação oscilatória por tamanho. No experimento acima,  $2400s$  equivalem a 1850 revoluções. As bandas negras correspondem a areia preta ( $45 - 250\mu m$ ) e as brancas a sal de cozinha ( $300 - 850\mu m$ ) (89). 80
- 3.4 Diagramas espaço-tempo demonstrando oscilações de bandas iniciais e o engrossamento das mesmas com o tempo (92), modelando o experimento de Choo (89). 81
- 3.5 Exemplos de campos de velocidades obtidos por Baran *et al.* (49) no plano  $xy$  para as camadas de superfície a ângulos de 21 e 23 graus (figura da esquerda e direita, respectivamente), com  $h/d = 20$  e  $\delta t/\tau_0 = 1$  (onde  $\delta t$  é o *time-step* e  $\tau_0$  é o tempo característico  $\tau_0 = \sqrt{d/g}$ ). O movimento correlacionado é claramente observado, em especial a  $\theta = 21$ . 83
- 3.6 Ilustração do mapeamento desempenhado pela função correlacionadora  $f(u, t)$ . Pode-se perceber que, a fim de se manter uma normalização constante, a Equação (3-23) tem de ser obedecida. 84
- 3.7 Gráfico da transformada de Fourier da distribuição escolhida para o modelo-teste, com os três picos indicados pelas setas. Nota-se também a evolução com o tempo, mostrando que o pico central permanece constante enquanto os laterais diminuem, em processo difusivo. 92
- 3.8 Gráfico da distribuição granular, a partir de uma distribuição inicial delta, para passos sucessivos de tempo, representado pela numeração da seqüência, à direita. É evidente que o centro da distribuição não permanece em zero, mas varia com o tempo, demonstrando uma influência clara da correlação, enquanto o pico da distribuição vai diminuindo e alargando, indicando um processo difusivo. 95

- 3.9 Gráfico da evolução temporal da média para uma realização da simulação, a partir de uma distribuição inicial delta - o deslocamento, independente do número de partículas, em relação ao zero demonstra que este não é um processo difusivo usual. 96
- 3.10 Gráfico da evolução temporal da variância, a partir de uma distribuição inicial delta, incluindo um ajuste linear - o crescimento linear com o tempo é típico de um processo difusivo, verificando a validade da simulação. Convém observar que o coeficiente linear da equação exibida é diferente de zero por um efeito do ajuste utilizado. O valor exato da variância no ponto  $t = 0$  é zero, obviamente. 97
- 3.11 Gráfico da variação do módulo da transformada de Fourier em  $q = \pm k$  com o tempo, que apresenta um decaimento linear. Está disposto também ajuste linear razoável para o decaimento linear ( $R^2 = 0,9955$ ). 98
- 3.12 Gráfico da variação do módulo da transformada de Fourier em  $q = \pm k$  com o tempo, mas com um passo de tempo maior que na Figura 3.11. O ajuste linear neste caso mostra maior precisão ( $R^2 = 0,9995$ ), mostrando que as oscilações em torno da reta de ajuste tornam-se desprezíveis com a passagem do tempo. 99
- 3.13 Gráfico da variação do módulo da transformada de Fourier em  $q = \pm k$  com o tempo, para dois valores diferentes da razão  $\frac{\psi_0}{\psi_{10}}$ , com  $\psi_0^B = \psi_0^A$  e  $\psi_{10}^B = \frac{1}{2}\psi_{10}^A$ . Pelos ajustes para  $A$  ( $y = -0,008x + 0,988$ ) e para  $B$  ( $y = -0,016x + 0,948$ ), nota-se claramente que o ajuste linear denota processos difusivos correlacionados, ao contrário do esperado para uma difusão usual, onde não deveria haver variação. 100
- A.1 Os símbolos representam dados experimentais mostrando o raio  $r$  da banda de cisalhamento a altura  $h$  (56), para alturas  $H$  diferentes. O retângulo no meio representa o erro estimado em todas as direções. A linha cheia é a curva de ajuste encontrada para as posições na superfície, enquanto as pontilhadas são as posições calculadas com base na linha cheia. 111

*The time will come when diligent research over long periods will bring to light things which now lie hidden. A single lifetime, even though entirely devoted to it, would not be enough for the investigation of so vast a subject... And so this knowledge will be unfolded only through long successive ages. There will come a time when our descendants will be amazed that we did not know things that are so plain to them... Many discoveries are reserved for ages still to come, when memory of us will have been effaced. Our universe is a sorry little affair unless it has in it something for every age to investigate...  
Nature does not reveal her mysteries once and for all.*

**Seneca, *Natural Questions* - Book VII.**