2
Revisão da Literatura

2.1
Introdução aos Problemas de Roteamento

O problema é específico do CECAN e do COMAER. Na literatura acadêmica, do melhor do conhecimento, ainda não existem estudos ou artigos direcionados aos problemas experimentados pelo COMAER e o CECAN. Porém, o problema de estoque e roteirização e problema clássico de roteirização já foram amplamente estudados, incluindo várias variáveis e restrições.

Os Problemas de Roteamento de Veículos (PRVs) têm sido estudados com muito interesse nas últimas décadas. O foco no estudo desta classe de problema se deve à necessidade da diminuição de gastos em todo o processo que engloba desde a produção de uma mercadoria até sua distribuição e venda. Pesquisas indicam que um considerável percentual do custo da mercadoria que chega aos clientes é de exclusiva responsabilidade dos gastos decorrentes de sua distribuição física. O objetivo das pesquisas em torno dos PRVs é reduzir este percentual de gastos com transporte a um nível mais satisfatório, possibilitando reduções de preço nos produtos finais.

Existe uma grande variedade de tipos de problemas PRV. Existem extensões ao PRV, como é o caso do VRP com Janela de Tempo (PRVJT). Este também considera o tempo para o atendimento dos consumidores. Cada consumidor *c* possui uma janela de tempo que o mesmo pode ser atendido (*ac*,*bc*). Além da informação da janela de tempo, o PRVJT possui um tempo de atendimento para cada consumidor (*STc*). Existem também problemas correlatos dentre os quais se incluem: Problema de Roteamento de Veículos (PRV), Problema de Estoque e Roteirização (*IRP*), Problema do Caixeiro Viajante (*TSP*), Problema do Carteiro Chinês (PCC) e o Problema da Roteirização de Veículos com Retiradas e Entregas *(VRPPD)*.

Basicamente, estes problemas se resumem ao atendimento de uma demanda, que pode se apresentar na forma de coleta e/ou entrega de pessoas ou mercadorias em uma determinada região geográfica ou espacial. A maioria das aplicações do PRV são geográficas e representadas por consumidores distribuídos em uma área de atendimento. Desta forma, o objetivo dos pesquisadores é desenvolver metodologias para atender as demandas do PRV de forma otimizada, visando a redução dos gastos com veículos e com o deslocamento dos mesmos.

A função objetivo depende da tipologia e das características do problema. Os objetivos mais comuns são: minimizar a frota de veículos, minimizar o custo total da operação, minimizar o tempo total de transporte, minimizar a distância total percorrida, minimizar o tempo de espera, maximizar o benefício, maximizar o serviço ao cliente, minimizar a utilização de veículos, equilibrar a utilização dos recursos etc.

O Problema de Roteamento de Veículos (PRV) é um dos tipos mais estudados problemas na área da otimização combinatória. Consiste no atendimento de um conjunto de consumidores por intermédio de uma frota de veículos, que parte de um ou mais pontos denominados *depósitos*. A restrição presente no PRV é que cada veículo *v* possui uma capacidade *Cv* e o somatório de todas as demandas dos consumidores atendidos por um veículo *v* deve respeitar sua capacidade.

Os problemas de Percurso em Arcos são dos mais antigos relacionados a grafos. A primeira referência que se conhece sobre eles vem do famoso problema estudado por Euler, das sete pontes de Königsberg. Buscava-se saber se havia um caminho fechado que atravessasse exatamente uma vez sete pontes sobre o rio Pregel em Köningsberg, hoje Kaliningrad. O problema foi abordado pelo matemático suíço Leonhard Euler, que encontrou as condições para a existência de uma rota fechada (grafo euleriano), e mostrou que não havia solução que satisfizesse aquele caso particular, [Euler, 1736]. A preocupação de Euler foi exclusivamente sobre do caminho fechado.

Muitos anos mais tarde, em 1962, um matemático da Universidade Normal de Shangtun, Kwan Mei-Ko, quando de sua passagem como funcionário dos correios durante a revolução cultural chinesa, preocupou-se com uma situação semelhante à de Euler, porém relacionada ao percurso dos carteiros que atenderiam ruas de sua cidade. Neste caso, Kwan mostrou-se interessado em definir, além da travessia, a forma mais fácil de fazê-la, percorrendo a menor distância possível. Kwan, definiu assim o problema: *Um carteiro tem que cobrir* *seu local de trabalho, antes de retornar ao posto. O problema é encontrar a menor distância de percurso para o carteiro.*

A princípio, a notação considera um grafo G como um conjunto formado por vértices V e ligações L, $G=(V,L)$. O conjunto das ligações pode ser ampliado para uma dupla de conjuntos, $L=(E,A)$, onde E são denominadas as ligações não orientadas entre vértices de G, e A é o conjunto das ligações orientadas entre vértices de G.

A classificação variada dos diversos tipos de problemas de percursos em arcos abrevia-se, no interesse deste trabalho, nos três principais tipos de abordagens do Problema do Carteiro Chinês. São elas: Caso Simétrico, Caso Dirigido e Caso Misto. A principal diferença entre elas está na orientação do grafo.

O grafo original é transformado em um grafo euleriano para cada uma das versões dos problemas acima, porém, para que seja garantido que o grafo final seja euleriano, este deve gozar da propriedade da Unicursalidade, assim descrita abaixo.

Seja G um grafo *f-conexo*. G é dito *unicursal* ou *euleriano* se existe um caminho fechado em G contendo cada aresta apenas uma vez e cada vértice pelo menos uma vez. As condições necessárias e suficientes para que um grafo *f-conexo* seja euleriano são dadas como segue:

1. Se G é não orientado (simétrico), todo vértice deve ter grau par, ou seja, um número par de elos incidentes – Teorema de Euler.
2. Se G é orientado, o número de arcos entrando e saindo de cada vértice é igual – Teorema de Ford & Fulkerson;
3. Se G é misto, todo vértice em S deve conter um número par de arcos orientados a ele ligados; além disso, para todo conjunto G $\subseteq$ V, a diferença entre o número de arcos de S para V-S e o número de arcos de V-S para S deve ser menor do que ou igual ao número de elos ligando G e V- G – Condições de balanceamento.

O Problema de Estoque e Roteirização (*IRP*) trata da distribuição periódica de um ou mais produtos, a partir de um ou mais depósitos, para um conjunto de clientes geograficamente dispersos dentro de um horizonte de planejamento finito ou não. Um cliente tem uma freqüência (volume por dia) e tem capacidade de manter um estoque de produtos de capacidade limitada. Um conjunto de veículos, com capacidade também limitada**,** faz o serviço de distribuição e pode realizar várias viagens por dia. O objetivo é minimizar a média diária do custo de distribuição durante o planejamento sem causar problemas de estoques para os clientes. Em linhas gerais, pode-se dizer que a resolução do problema envolve três decisões inter-relacionadas: quando entregar aos clientes; quanto de mercadoria deve ser entregue; e qual a melhor rota a ser utilizada para realizar a entrega. O IRP é um problema estocástico. Nenhum cliente gerencia os produtos da mesma maneira. Contudo, é relativamente simples realizar uma previsão da quantidade consumida por cada cliente em cada dia se for tomado como base o consumo total diário.

Vale ainda lembrar que modelos estocásticos em geral requerem grande quantidade de dados históricos e um adequado tratamento estatístico, que nem sempre estão disponíveis. Sob essa ótica, modelos de demanda determinística apresentam grande aplicabilidade prática, como se pode verificar pelo sucesso de seu emprego em problemas reais descritos por Bell *et al.* (1983) e Blumenfeld *et al.* (1987). Uma classificação específica para os problemas de estoque e roteirização foi proposta por Baita *et al.* (1998) e reproduzida na Tabela 1.

Tabela 1: Elementos de classificação para problemas de estoque e roteirização. Fonte: Adaptado de Baita *et al.* (1998) e Cunha (2003)

Elemento	Atributo	Alternativas		
Topologia da rede de atendimento	Pontos de abastecimento ou distribuição	Um-para-um	Um-para-muitos	Muitos-para-muitos
Itens a ser entregues	Número	Um	Muitos	
Demanda	Tipo	Conhecida	Desconhecida	
	Comportamento	Constante	Variável	
	Distribuição entre clientes	Uniforme	Não uniforme	
Decisões	Domínio	Freqüência de atendimento	Instante de atendimento	
Restrições	Capacidade dos veículos	Igual	Diferente	
	Capacidade de estocagem			
	Capacidade de abastecimento			
	Número de veículos	Fornecido	Variável de decisão	Não restritivo
Custos	Estoque	Manutenção	Falta	Pedido
	Distribuição	Fixo	Proporcional à distância	Proporcional ao número de clientes
Estratégia de solução	Decomposição	Tempo	Agrupa-Roteiriza	
	Agregação	Tempo	Freqüência	Distância
	Algoritmo	Exato	Aproximado	
	Programação matemática	Linear	Inteira	Não-linear

Embora detalhada, essa classificação não abrange alguns aspectos comuns em problemas de roteirização, e que podem efetivamente ocorrer em problemas de estoque e roteirização. Como exemplo, pode-se citar o caso de janelas de atendimento, restrições de precedência ou restrições de alocação de cliente a veículo, no caso de frota heterogênea. É fácil constatar que o elevado número de combinações dos diversos elementos de classificação torna a enumeração dos diversos tipos de problemas virtualmente impossível. Porém, da classificação proposta pelos autores, fica claro que algumas classes se destacam, em função da importância e influência de suas características. É o caso da categoria tipo da demanda, que pode ser classificada como conhecida ou desconhecida. O primeiro caso, também denominado determinístico, corresponde ao objetivo do presente trabalho. Pode-se argumentar que, em última instância, problemas de estoque e roteirização são eminentemente estocásticos, uma vez que o conhecimento preciso do consumo que gera a demanda a ser atendida em cada cliente é a exceção, e não a regra em casos reais de distribuição. Entretanto, modelos com demanda determinística não são irreais, visto que o comportamento estocástico pode ser absorvido, por exemplo, pela introdução de um estoque de segurança e a sazonalidade incorporada a um modelo de previsão de demanda.

É interessante notar as diferenças entre o problema de estoque e roteirização e o problema clássico de roteirização de veículos. Nesse último, as demandas são conhecidas, e a roteirização corresponde a um único período, compatível com a duração das viagens e a jornada de trabalho dos veículos, não fazendo sentido se falar em horizonte de planejamento. Em outras palavras, o problema de roteirização de veículos não considera as questões de quando atender os clientes, nem quanto fornecer ao cliente quando esse é atendido, concentrando-se apenas nas rotas para atendimento dos clientes. Além disso, tais modelos consideram apenas custos associados à distribuição propriamente dita, sejam eles custos variáveis correspondentes às distâncias percorridas ou aos tempos de atendimento, ou mesmo custos fixos decorrentes da utilização dos veículos em alguns casos, principalmente no caso de serem utilizados veículos de terceiros; custos de estoque não são considerados.

Os problemas de roteirização de veículos (*Vehicle Routing Problems* - VRPs), que são de natureza combinatória, pertencem a uma categoria ampla de problemas de pesquisa operacional conhecida como problemas de otimização de rede (Golden; Ball; Bodin, 1981).

O termo *roteirização* de veículos, embora não encontrado nos dicionários de língua portuguesa, é a forma que vem sendo utilizada como equivalente ao inglês *"routing"* (ou *"routeing"*) para designar o processo para a determinação de um ou mais roteiros ou seqüências de paradas a serem cumpridos por veículos de uma frota, objetivando visitar um conjunto de pontos geograficamente dispersos, em locais pré-determinados, que necessitam de atendimento. O termo *roteamento* de veículos também é utilizado alternativamente por alguns autores (Cunha, 1997).

Segundo Laporte *et al.* (2000),o problema de roteirização de veículos consiste em definir roteiros de veículos que minimizem o custo total de atendimento, cada um dos quais iniciando e terminando no depósito ou base dos veículos, assegurando que cada ponto seja visitado exatamente uma vez e a demanda em qualquer rota não exceda a capacidade do veículo que a atende. Quando a definição dos roteiros envolve não só aspectos espaciais ou geográficos, mas também temporais, tais como restrições de horários de atendimento nos pontos a serem visitados, os problemas são então denominados roteirização e programação de veículos (Cunha, 1997).

O primeiro problema de roteirização a ser estudado foi o do caixeiro viajante (em inglês *"traveling salesman problem"* ou TSP), que consiste em encontrar o roteiro ou seqüência de cidades a serem visitadas que minimize a distância total percorrida e assegure que cada cidade seja visitada exatamente uma vez.

Problemas de roteamento aparecem em uma série de serviços, como entrega bancária, entrega postal, entrega de mercadorias, rotas de ônibus escolar, coleta de lixo, serviço de entregas noturnas, operações de frete, dentre outros. A solução destes problemas pode diminuir bastante o custo de distribuição, causando uma grande economia tanto para o setor público como para o setor privado. No entanto, muitos destes problemas são difíceis de resolver. Estas duas características fazem com que haja uma extensa literatura sobre problemas de roteamento (Christofides *et al*., 1979; Bodin *et al*., 1983; Gendreau *et al*., 1997).

Problemas do tipo caixeiro viajante também são encontrados em outras áreas que não a logística ou operação de frotas, tais como em linhas de montagem de componentes eletrônicos, onde se busca encontrar, por exemplo, o roteiro de mínima distância para um equipamento cuja tarefa é soldar todos os componentes de uma placa eletrônica. O menor percurso total do equipamento para percorrer todos os pontos da placa está diretamente associado ao desempenho da linha (Souza, 1993).

Progressivamente, novas restrições vêm sendo incorporadas ao problema do caixeiro viajante, de modo a melhor representar os diferentes tipos de problemas que envolvem roteiros de pessoas e veículos, entre as quais: restrições de horário de atendimento (conhecidas na literatura como janelas de tempo ou janelas horárias); capacidades dos veículos; frota composta de veículos de diferentes tamanhos; duração máxima dos roteiros dos veículos (tempo ou distância); e restrições de tipos de veículos que podem atender determinados clientes.

Sob a ótica de otimização, os problemas de roteirização de veículos, incluindo o caso particular do caixeiro viajante, pertencem à categoria conhecida como *NP*-difícil, pois possuem ordem de complexidade exponencial. Em outras palavras, o esforço computacional para a sua resolução cresce, no mínimo, exponencialmente com o tamanho do problema (dado pelo número de pontos a serem atendidos). A título de ilustração, até hoje não são conhecidas as respectivas soluções ótimas para algumas instâncias de problemas de roteirização com restrições de janelas de tempo com apenas 100 nós, propostos por Solomon (1986) e que vêm sendo utilizadas para a avaliação comparativa de novos algoritmos de solução propostos na literatura (Cunha, 1997).

Essa complexidade matemática dos problemas de roteirização, assim como a sua relevância no contexto logístico atual, explicam o constante interesse em busca de novas estratégias de solução, que vem sendo observado desde a década de 60, resultando em um número muito expressivo de artigos publicados na literatura especializada.

Isto decorre do fato de que, sendo as estratégias de solução heurísticas, muitas vezes se apóiam em uma abordagem intuitiva, na qual a estrutura particular do problema possa ser considerada e explorada de forma inteligente, para a obtenção de uma solução adequada (Cunha, 1997). Assim, na maioria dos casos, as heurísticas propostas são bastante específicas e particulares, e carecem de robustez, isto é, não conseguem obter boas soluções para problemas com características, condicionantes ou restrições às vezes um pouco diferentes daquelas para as quais foram desenvolvidas.

Por outro lado, o interesse e a demanda pela aplicação de modelos de roteirização para problema reais, através de *softwares* comerciais disponíveis no mercado, têm crescido muito nos últimos anos, em particular no Brasil, principalmente após a estabilização da economia, conforme discutido em detalhes por Cunha (1997). Entre as razões pode-se destacar as exigências dos clientes com relação a prazos, datas e horários de atendimento (principalmente entregas); o agravamento dos problemas de trânsito, acesso, circulação e estacionamento de veículos nos centro urbanos, em particular caminhões; o aumento da competição pelo mercado e a busca de eficiência trazida pela eliminação da inflação; o menor custo de capital, levando à redução de estoques e ao aumento da freqüência de entregas.

A roteirização de veículos envolve um conjunto muito grande de diferentes tipos de problemas. Nesta seção serão apresentadas algumas propostas encontradas na literatura que tentam caracterizar o universo de problemas de roteirização. Bodin *et al.* (1983) apresentaram o primeiro trabalho abrangente que retratava o estado-da-arte da modelagem de problemas de roteirização e programação de veículos e tripulações. Ainda hoje é considerada uma das importantes referências sobre o assunto, pois são considerados inúmeros tipos de problemas. Para os autores os problemas de roteirização podem ser do tipo roteirização pura ou combinados de roteirização e programação.

Nos problemas de roteirização pura, condicionantes temporais não são importantes para a definição dos roteiros e das seqüências de atendimentos (coletas ou entregas). As estratégias de solução são direcionadas aos aspectos espaciais da localização dos pontos a serem atendidos. Os principais tipos de problemas de roteirização pura são relacionados no Quadro 1.

Quadro 1: Classificação dos problemas de roteirização pura.

Denominação	*número de roteiros*	*localização dos clientes*	*limite de capacidade nos veículos*	*número de bases*	*demandas*
Problema do caixeiro viajante	um	nós	não	uma	determinísticas
Problema do carteiro chinês	um	arcos	não	uma	determinísticas
Problema de múltiplos caixeiros viajantes	múltiplos	nós	não	uma	determinísticas
Problema de roteirização em nós com uma única base	múltiplos	nós	sim	uma	determinísticas
Problema de roteirização em nós com múltiplas bases	Múltiplos	nós	sim	múltiplas	determinísticas
Problema de roteirização em nós com demandas incertas	Múltiplos	nós	sim	uma	estocásticas
Problema de roteirização em arcos com limite de capacidade	Múltiplos	arcos	sim	uma	determinísticas

Fonte: Adaptado de Bodin *et al*. (1983)

Deve-se observar que os problemas listados no Quadro 1 derivam-se do problema clássico do caixeiro viajante, com exceção do problema do carteiro chinês, em que a demanda se localiza nos arcos ao invés de nós e a otimização envolve soluções dos percursos ociosos, já que o veículo precisa passar em todos os arcos uma vez para atendimento.

Segundo Bodin *et al*. (1983), a maioria dos problemas *combinados de roteirização e programação*, ou simplesmente problemas de roteirização e programação, ocorrem em situações em que estão presentes restrições de janelas de tempo (horário de atendimento) e de precedência entre tarefas (coleta deve preceder a entrega e ambas devem estar alocadas ao mesmo veículo). Os principais problemas típicos apontados pelos autores são os seguintes:

- o problema de roteirização e programação de ônibus escolares para atendimento de um conjunto de escolas;
- o problema de roteirização e programação de cavalos mecânicos tracionando carretas com carga completa: cada carreta é tracionada individualmente de um ponto de origem para um ponto de destino.
- o problema de definição de roteiros e programação de serviços de coleta de resíduos domiciliares e de varrição de ruas, semelhante ao problema do carteiro chinês, porém com restrições de capacidade dos veículos, de duração máxima da jornada e de janelas de tempo associadas aos horários de proibição de estacionamento, de forma a possibilitar a execução do serviço de varrição.
- o problema de roteirização e programação de serviços de transporte de pessoas, conhecidos como “dial-a-ride”, em geral para o transporte porta-a-porta de idosos e deficientes; cada usuário possui locais de origem e de destino distintos e eventualmente janelas de tempo; a precedência entre tarefas é uma restrição fundamental a ser considerada.

Ronen (1988) propôs uma classificação dos diversos problemas de roteamento e programação de veículos baseada nos ambientes operacionais e objetivos a serem alcançados:

- problemas relativos ao transporte de passageiros: programação de linhas de ônibus; de sistemas de táxi; de sistemas de transporte de pessoas, em geral idosos e deficientes, conhecidos como “dial-a-ride”; de transporte de escolares por ônibus, entre outros;
- problemas de prestação de serviços: roteirização e programação de equipes de reparos ou de serviços públicos, tais como de coleta de lixo, entrega postal, varrição de ruas e leitura de parquímetros, entre outros;
- problemas relativos ao transporte de carga (coleta e distribuição).

Todos os tipos de problemas citados acima são de natureza essencialmente operacional, ou seja, fazem parte das tarefas rotineiras de programação da frota, realizadas regularmente com periodicidade de curto prazo, em geral diária ou semanal.

Além destes, são encontrados na literatura problemas de roteirização de natureza mais tática ou estratégica do que operacional, tais como: problemas integrados de localização e roteirização; problemas integrados de estoque e roteirização, nos quais a programação dos atendimentos deve levar em consideração não só aspectos espaciais e os custos dos roteiros, como também questões como o nível de estoque; problemas de faturamento e roteirização, nos quais é preciso definir simultaneamente quem vai ser atendido a cada dia de um período de tempo pré-determinado; entre outros.

2.2
O Problema Clássico

No problema clássico de roteamento de veículos, consideram-se *n* clientes espacialmente distribuídos, cada um com uma demanda de mercadorias. As mercadorias são entregues a partir de um depósito por uma frota de veículos homogêneos. Cada veículo realiza um percurso saindo do depósito e entregando as mercadorias para um subconjunto de clientes, satisfazendo as necessidades de demanda de cada um e retornando ao depósito. A rota de cada veículo deve obedecer a algumas restrições como: a quantidade de mercadoria entregue não deve exceder a capacidade do veículo e o tempo limite para realizar uma rota não deve ser ultrapassado. O problema de roteamento de veículos pretende traçar rotas para os veículos, determinando para quais clientes deve-se fornecer a mercadoria, de forma a não violar as restrições e otimizar alguma função-objetivo. Normalmente, três funções-objetivo podem ser consideradas:

- minimizar a distância total percorrida (ou o tempo gasto) por todos os veículos;
- minimizar o número de veículos;
- minimizar uma combinação de custo de veículos e distância percorrida.

O objetivo então, é minimizar o "custo total" de transporte no atendimento aos clientes, isto é, minimizar custos fixos, custos operacionais e o número de veículos envolvidos no transporte.

Dado um conjunto de n cidades (ou consumidores), cada qual com uma demanda qi por um produto, e um depósito com k veículos de capacidade Q, deseja-se encontrar as rotas para os veículos, minimizando os custos de transporte e obedecendo as restrições de capacidade de cada veículo.

Matematicamente, o VRP pode ser formulado como sendo um grafo $G = (V, A)$, não direcionado, onde $V = \{v0, v1, ..., vn\}$ é o conjunto dos vértices, representando as cidades ou consumidores e $A = \{(vi, vj): vi, vj$ ¸ $V, i < j\}$ é o conjunto de arestas ou arcos que ligam duas cidades. O vértice $v0$ representa o depósito, sendo este a base de uma frota de veículos idênticos de capacidade Q. Cada consumidor v tem uma demanda não negativa qi por um determinado produto e, $q0 = 0$. À cada aresta (vi, vj) está associada uma distância não negativa cij ,que representa a distância entre os consumidores.

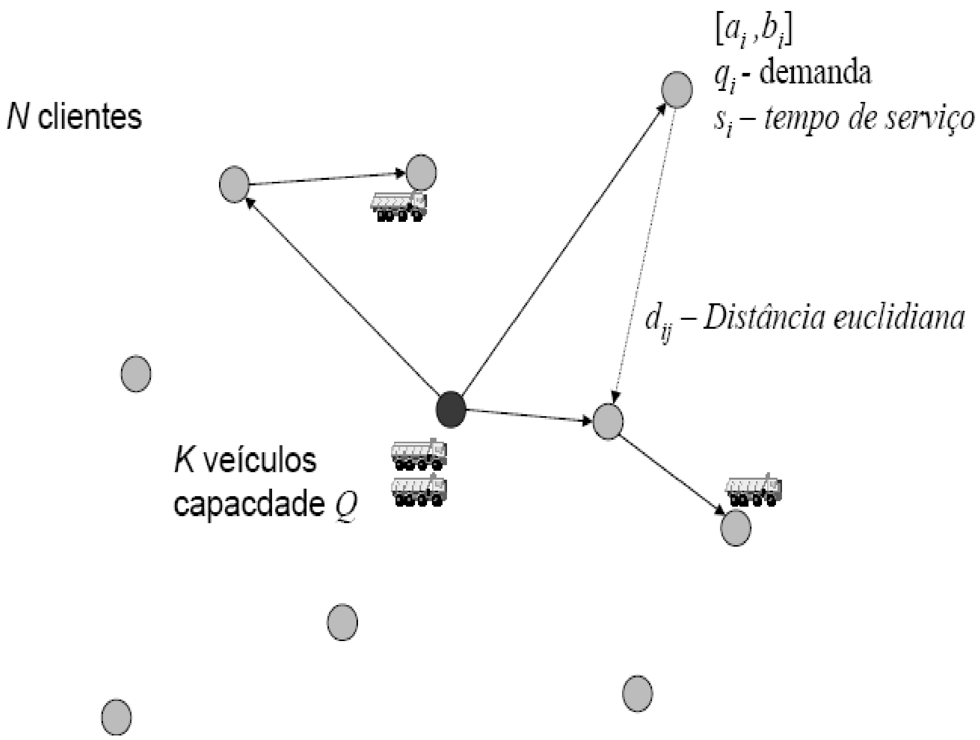


Figura 1: Exemplo VRP

Restrições do VRP

- Cada rota começa e termina no depósito;
- Toda cidade de V - $\{v0\}$ é visitada somente uma vez por somente um veículo;
- A demanda total de qualquer rota não deve superar a capacidade Q de um veículo

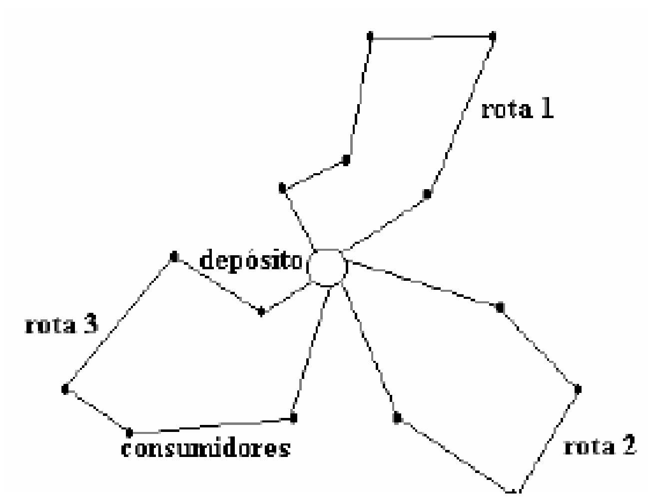


Figura 2: Rotas traçadas

Objetivos

- Distância total percorrida
- Tempo total espera
- Número de veículos

Um tipo particular de TSP é aquele em que o grafo é **completamente conectado**, ou seja, é possível ir diretamente de qualquer nó para outro qualquer nó do grafo, usualmente, sem passar por outro no meio do percurso. Admite-se ainda que o grafo satisfaz a **desigualdade triangular**, ou seja, $d(i,j)<d(i,k)+d(k,j)$, para quaisquer 3 nós i, j e k, e que a matriz de distâncias é simétrica.

Resumindo, essa versão do TSP inclui completa conectividade no grafo, desigualdade triangular e simetria da matriz de distâncias. Essa versão do TSP (Traveling Salesman Problem) será conhecida por **TSP1**. Existem **(n-1)!/2** diferentes soluções para este problema (divide-se por 2 pois cada ciclo pode ser seguido em dois sentidos). Por exemplo, para grafos com apenas 10 e 20 nós, respectivamente 1,814,400 e $1.2*10^{18}$ soluções possíveis.

Diante desse crescimento fatorial, o problema de decisão do Caixeiro Viajante é considerado pelos matemáticos e cientistas da computação como sendo parte de uma classe de equivalência chamada **NP-Completo** de problemas difíceis, em que não se conhecem algoritmos que fornecem respostas em tempo polinomial.

2.3
Árvore Geradora Mínima

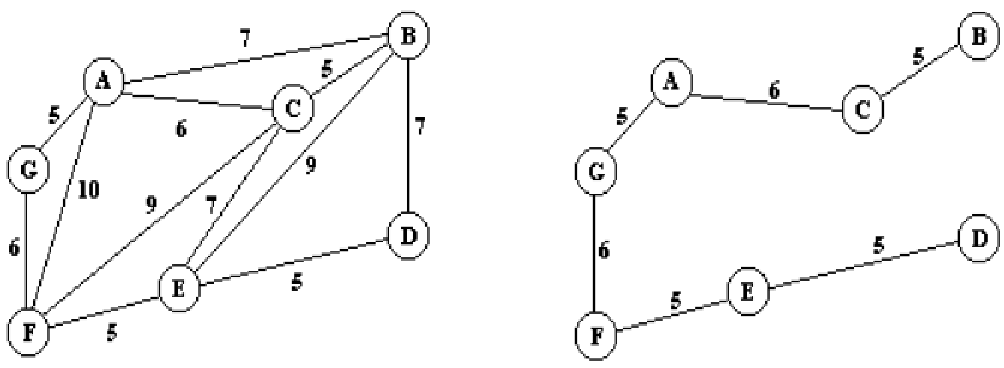
O Problema da Árvore Geradora Mínima (AGM), ou em inglês: The Spanning Tree, consistem em encontrar uma entre todas as possíveis árvores geradoras de um grafo G(V,A) com soma total de comprimentos de arcos mínima. Se o número de nós do conjunto V é n, todas as spannings trees de G conterão n-1 arcos. A AGM é a árvore com menor custo dentre todas as árvores geradoras de G. Este problema aparece, por exemplo, em aplicações para Rede rodoviária, Rede de comunicação, Rede elétrica. Outro contexto importante seria para auxiliar na decisão de onde se localizar postos de emergência ou delegacias de polícia em uma cidade.

Além de aplicações como estas, a solução desse problema é de grande utilidade para a solução de problemas combinatoriais em grafos mais complexos, tais como o do caixeiro viajante (Traveling Salesman Problem). É portanto de enorme importância o seu estudo, solução e melhorias.

Uma solução para o problema AGM assiciado a um garfo G(V,A))pode ser derivada, por exemplo, de uma idéia básica: escolhendo um nó arbitrário inicialmente, visite todos os nós do grafo escolhendo como próximo a ser visitado o nó mais "**perto**" de um dos vértices já visitados (**n**>1 é o número de elementos do conjunto V de retirar nós do grafo G). Serão seguidos então os seguintes passos:

- PASSO 1: Inicie a construção da Spanning Tree mínima, escolhendo um nó arbitrário, digamos i. Conecte i ao nó "mais próximo" dele, digamos j.
- PASSO 2: Se todos os nós do grafo foram conectados, PARE. Se existem nós isolados, vá ao PASSO 3.
- PASSO 3: Encontre o arco de menor tamanho que ligue um dos nós já conectados a um dos nós ainda não conectados. Introduza o arco na Spanning Tree mínima que está sendo construída, tornando já conectado um nó ainda não conectado. Volte ao PASSO 2.

Como exemplo de execução desses passos, a Figura 3(a) representa o grafo G e a figura 3(b) representa sua spanning tree mínima:



(a) **Grafo G** *(b)* **Spanning Tree mínima de G**

Figura 3: O grafo G e a spanning tree mínima para exemplificar algoritmo

Seguindo os passos do algoritmo e escolhendo o nó A como inicial:

ARCOS INTRODUZIDOS	NÓS JÁ CONECTADOS	NÓS AINDA NÃO CONECTADOS
-	A	B - C - D - E - F - G
(A,G)	A - G	B - C - D - E - F
(A,C)	A - C - G	B - D - E - F
(C,B)	A - B - C - G	D - E - F
(G,F)	A - B - C - F - G	D - E
(F,E)	A - B - C - E - F - G	D
(E,D)	A - B - C - D - E - F - G	-

Será apresentado a seguir um algoritmo heurístico para o TSP1, desenvolvido por Christofides em 1976, e baseado na AGM.

Algoritmo Heurístico para o TSP (Para grafos com completa conectividade, com a propriedade de desigualdade triangular e simetria da matriz de distâncias):

- PASSO 1: Encontre a Spanning Tree mínima que passe por todos os **n** pontos. Chame essa árvore de **T**.
- PASSO 2: Seja **n0** o número de nós de grau ímpar dos **n** nós de **T** (**n0** é sempre um número par). Encontre o comprimento mínimo da combinação de pares (pairwise matching) desses **n0** nós, utilizando o algoritmo de matching; com os arcos do grafo dado inicialmente o qual respeita as condições do TSP1. Seja **M** o grafo (conexo ou não) dos arcos da solução ótima do matching. Seja **H** um grafo consistindo da união entre **M** e **T**, ou seja, **H=MUT**. Note que se um ou mais arcos existem tanto em T como em M, então ele aparecerá duas vezes em H.
- PASSO 3: O grafo **H** é Euleriano pois não contém nós de grau ímpar. Desenhe um Ciclo Euleriano sobre **H**, iniciando e terminando no nó especificado para ser o nó inicial do TSP1. Esse Ciclo Euleriano é a solução aproximada do problema do Caixeiro Viajante.

Suponhando que a rota apresentada na figura 4 seja a solução obtida pelo algoritmo de Christofides para o TSP. Observe como o nó A abaixo aparece 2 (duas) vezes na rota gerada. É possível se aproveitar da desigualdade triangular e eliminá-lo em uma de suas aparições (X-A-C ou Z-A-Y), gerando 2 (duas) novas rotas possíveis (XC eliminando XA e AC, ou ZY eliminando ZA e AY) que serão obviamente menores que o da figura. Basta apenas escolher a menor dessas 2 (duas) novas rotas (no caso, ZY).

Outra característica interessante de ser observada é: os arcos AC e BD fazem parte da solução, mas o custo total da rota seria minimizado se fossem trocados pelos arcos AB e CD. É possível fazer o seguinte: se AC+BD>AB+CD, então trocar AC e BD por AB e CD. A essa melhoria chamamos OPT **2**, pois a troca é de 2 em 2 arcos. À melhoria feita de 3 em 3 arcos é chamada OPT **3** e assim por diante.

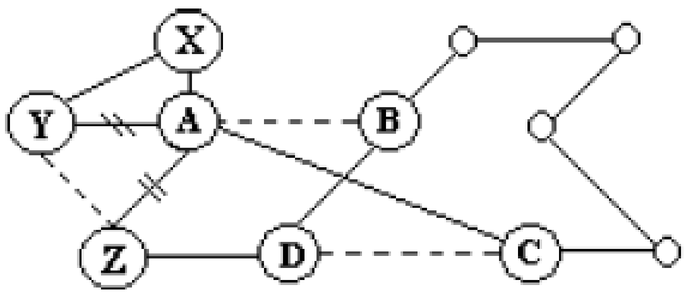


Figura 4: Grafo para exemplificar otimizações no TSP

Com essas observações, foram incluídos mais três passos ao algoritmo de Christofides para resolução do TSP.

- PASSO 4: Observe os nós de H que são visitados mais de uma vez no ciclo euleriano e melhore o caminho do caixeiro viajante aproveitando-se da desigualdade triangular. O ciclo resultante desse passo conterá apenas nós visitados uma única vez.
- PASSO 5: Compare dois a dois os arcos do ciclo gerado no passo 4. Sejam os dois arcos observados, digamos, (A,C) e (B,D), conforme o exemplo da Figura 3. Verifique se **d(A,C)+d(B,D)>d(A,B)+d(C,D)**. Caso seja, troque os arcos (A,C) e (B,D) por (A,B) e (C,D) no percurso do caixeiro viajante.

- PASSO 6: Comparar três a três arcos do ciclo gerado no passo 5. Sejam os arcos considerados (A,B), (G,H) e (R,S). Observar qual das seguintes somas é a menor **d(A,B)+d(G,H)+d(R,S), d(A,G)+d(B,R)+d(H,S)** ou **d(A,R)+d(H,B)+d(G,S)**. A configuração dos arcos tomada inicialmente será trocada pela combinação de arcos cuja soma for a menor.

Com isso, é possível ter uma excelente melhoria para o percurso do caixeiro viajante, conforme observado no exemplo a seguir baseado no texto de Odoni & Larson (1981). Como exemplo da resolução do problema do caixeiro viajante seguindo-se os passos do algoritmo de Christofides para o TSP, de acordo com o seguinte problema:

De acordo com o método anterior (Christofides, 1976), a partir do nó 1, fazer entregas nos nove pontos restantes realizando o mínimo percurso possível, e sabendo que existem caminhos diretos entre todos os pontos, segundo a seguinte matriz simétrica de distâncias:

Tabela 2: Matriz das distâncias para o problema do Caixeiro Viajante (grafo da figura 3)

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	0	25	43	57	43	61	29	41	48	71
2	25	0	29	34	43	68	49	66	72	91
3	43	29	0	52	72	96	72	81	89	114
4	57	34	52	0	45	71	71	95	99	108
5	43	43	72	45	0	27	36	65	65	65
6	61	68	96	71	27	0	40	66	62	46
7	29	49	72	71	36	40	0	31	31	43
8	41	66	81	95	65	66	31	0	11	46
9	48	72	89	99	65	62	31	11	0	36
10	71	91	114	108	65	46	43	46	36	0

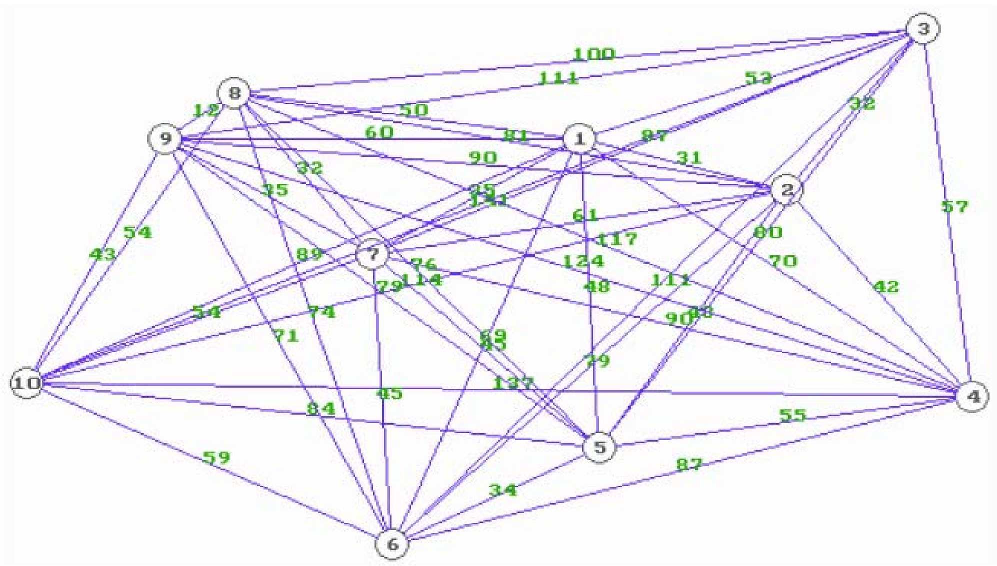


Figura 5: Distribuição de pontos para problema do caixeiro viajante

Executando o passo 1 do algoritmo, tem-se a spanning tree mínima **T** apresentada na Figura 5. Executando o passo 2, serão identificados os 6 pontos de grau ímpar indicados por um asterisco (*) no grafo e os arcos resultantes do matching em **M** indicados em pontilhado. Logo **H=T**U**M** é a união dos arcos cheios com os pontilhados.

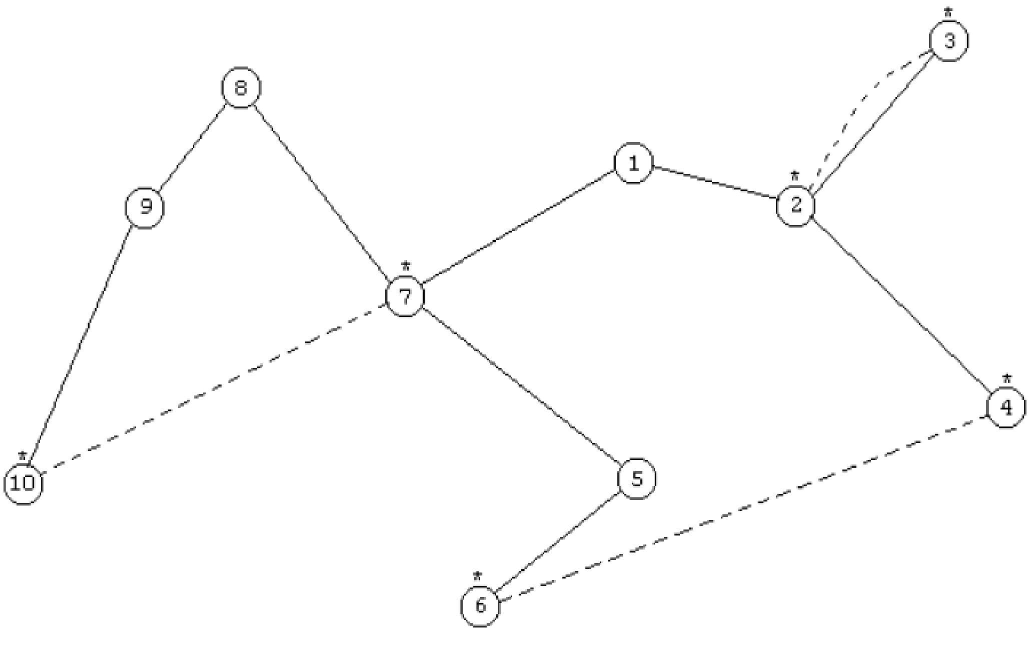


Figura 6: Spanning Tree mínima (em arcos cheios), nós de grau ímpar (identificados com *) e os arcos obtidos do Matching (em tracejado).

No passo 3, tem-se o desenho do ciclo euleriano sobre **H**. No passo 4, os nós 2 e 7 aparecem duas vezes em H. As opções para eliminar uma das ocorrências de 7, por exemplo, é eliminar os arcos (8,7) e (7,1) adicionando o arco por (8,1) ou eliminar os arcos (10,7) e (7,5) adicionando o arco (10,5). Observando a figura, será possível notar que a melhor opção é a primeira. Efetuando o passo 5, obtém-se a solução ótima do problema mostrada na figura 7. Seria desnecessário executar o passo 6 neste caso.

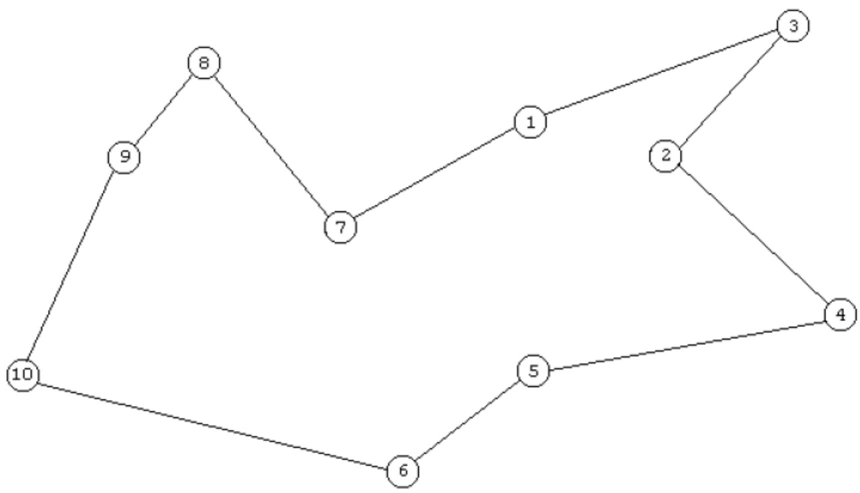


Figura 7: Solução ótima do problema do caixeiro viajante conseguida no passo 5 do algoritmo desenvolvido para o TSP1.

Portanto, como se pode observar, o algoritmo heurístico desenvolvido para o TSP1 conseguiu realizar uma excelente aproximação para a solução ótima (na verdade, neste exemplo, obteve a ótima). A heurística desenvolvida resolve muito bem problemas com mais de 50 nós. Em casos práticos, obtiveram-se soluções com no máximo 10% de erro em relação ao ótimo.

O problema do caixeiro viajante admite que um veículo que vai efetuar o roteiro não seja limitado por restrições de tempo e de capacidade. Na prática, essa simplificação não é acessível em muitos casos de aplicação. Por exemplo, um veículo que efetua entrega de produtos durante o dia tem seu tempo de ciclo limitado pela jornada de trabalho do condutor. Da mesma forma, é possível que a capacidade de carga do veículo seja atingida, fazendo com que se aloquem menor número de paradas por veículo.

2.4
O Método de Clarke e Wright

Para resolver este problema de roteirização a partir de um único depósito, com restrições múltiplas, pode-se utilizar o método de Clarke e Wright bastante engenhoso e eficaz. Este método se baseia no conceito de “ganho” que pode ser obtido ao se ligar dois nós de forma sucessiva num roteiro.

Supondo que existam n pontos a serem visitados (coleta, entrega), partindo o veículo do depósito D e retornando ao mesmo após um ciclo. Supondo que a solução preliminar do problema de roteirização, consiste em se ter n veículos, sendo que cada um visita um único ponto e retorna ao depósito, então o percurso total da frota para realizar esse tipo de serviço é dado por:

$$L = 2 \quad 1\sum_{i=1}^{n})_{,i}$$

Supondo, agora, que o veículo, ao atender o ponto i visita também o ponto j, antes de retornar à origem, na mesma viagem. O “ganho” assim obtido, em termos de percurso, é dado por:

$$s_{i,j} = L_a - L_b = 2\ d_{D,i} + 2\ d_{D,j} - (d_{D,i} + d_{i,j} + d_{D,j}) = d_{D,i} + d_{D,j} - d_{i,i}\ d_{D,i}$$

Na escolha de dois pontos i e j para constituir a seqüência de um roteiro, procura-se selecionar o par com maior valor de ganho $s_{i,j}$. Há combinações, no entanto, que violam as restrições de tempo, capacidade, etc, não sendo por isso factíveis. O método de Carke e Wright explora esse conceito, sendo descrito a seguir, conforme Odoni & Larson (1981):

1. Calcular os ganhos $s_{i,j}$ para todos os pares i,j ($i \neq j$, $i \neq D$ e $j \neq D$).
2. Ordenar os pares i,j na ordem decrescente dos valores do ganho $s_{i,j}$.
3. Começar pelo par i,j com maior ganho $s_{i,j}$ e proceder na seqüência obtida em 2.

4. Para um par de nós i,j correspondente ao k-ésimo elemento da seqüência 2 verificar se i e j estão ou não incluídos num roteiro já existente:

    a. Se i e j não foram incluídos em nenhum dos roteiros já abertos, então criar um novo roteiro com os nós i e j.

    b. Se exatamente um dos pontos i ou j já pertence a um roteiro pré-estabelecido, verificar se esse ponto é o primeiro ou último do roteiro (adjacente ao nó D, depósito). Se isso ocorrer, acrescentar o arco (i,j) a esse roteiro. Caso contrário, passar para a etapa seguinte, saltando o par i,j.

    c. Se ambos os nós i,j já pertencem a dois roteiros pré-estabelecidos (roteiros diferentes), verificar se ambos são extremos dos respectivos roteiros (adjacentes ao nó D). Nesse caso fundir os dois roteiros num só. Caso contrário, passar para a etapa seguinte, pulando o par i,j .

    d. Se ambos os nós i,j pertencem a um mesmo roteiro, pular para a etapa seguinte.

    e. Continuar o processo até que a lista completa de ganhos seja exaurida. Se sobrar algum ponto não incluído em nenhum roteiro, deverão ser formados roteiros individualizados, ligando o depósito a cada ponto e retornando à base.

O sistema de roteamento é definido como um conjunto organizado de meios que objetiva o atendimento de demandas localizadas nos arcos e/ou nos vértices de alguma rede de transportes. No caso de roteamento de veículos, o objetivo mais comum é utilizar-se de uma frota de veículos para atender a um conjunto de pedidos de entrega, cujas demandas estão localizadas nos nós da rede denominados destinos. Para atender a esses pedidos, um conjunto de restrições deve ser respeitado. Essas restrições podem ser as mais diversas, como: capacidade limitada dos veículos, capacidade limitada dos arcos ou dos nós; tamanho da frota; quantidade de nós; tempo de entrega; etc. Na literatura, há inúmeros trabalhos publicados, os quais abordam os mais diversos temas, desde modelos simples (com frota homogênea, *commodities* de único tipo e sem janela de tempo) a modelos bem mais complexos (com frota não-homogênea, *commodities* de diferentes tipos, janela de tempo para a entrega da encomenda, com roteamento dinâmico, etc).

2.5
Problemas de Coleta e Entrega

O Problema da Roteirização de Veículos com Retiradas e Entregas *(VRPPD)* é uma extensão do problema de roteirização de veículos (VRP), onde veículos não apenas entregam produtos para os clientes, mas também retiram produtos dos mesmos. A função objetivo do VRPPD é minimizar a distância total percorrida pelos veículos, sujeitos à limitação da distância total percorrida e da capacidade máxima de seus compartimentos de carga. O problema VRPPD é NP-difícil, por ser uma generalização do VRP clássico.

Em 1998, Savelsbergh e Sol apresentaram um software para planejamento de transporte a ser incorporado em um sistema de suporte de decisão para uma grande companhia de transporte rodoviário na região de “Benelux“ (Bélgica, Holanda e Luxemburgo), com cerca de 1400 veículos, transportando 160 mil encomendas para centenas de consumidores, para dezenas de centenas de endereços. O serviço dessa companhia era grosseiramente dividido em duas partes: o sistema de transporte regular e o sistema de transporte direto.

No sistema regular, carregamentos devido a pequenas cargas que são coletadas no seu local de origem, são armazenados em um depósito central. Durante a noite, estas cargas são transportadas até um centro de distribuição próximo do seu destino e no dia seguinte entregues ao destinatário. No sistema de transporte direto, carregamentos maiores até a carga completa de um caminhão são coletados na origem e enviados através do mesmo veículo ao destinatário. Em cada pedido são especificados o tamanho da carga a ser transportada, a sua origem, o seu destino e o tempo admitido entre a coleta e a entrega da mesma. Nesse problema, foi considerada uma frota heterogênea de veículos disponível para operar as rotas. Os parâmetros considerados no modelo de cada veículo são: capacidade, origem e tempo necessário para sua disponibilidade no local onde ele está sendo requisitado. Esse tipo de problema é conhecido como problema geral de coleta e entrega (GPDP - *General Pickup and Delivery Problem*).

A importância deste estudo feito por Savelsbergh e Sol no âmbito deste trabalho se deve, dentre outros, à modelagem do transporte com veículos semehantes e com capacidades distintas. Essas são as principais características do presente trabalho. Problemas com essas características são escassos na literatura.

Dentro das suposições acima, segue uma distinção de três importantes variantes do modelo VRPPD descritos a seguir baseada na literatura a respeito do VRPPD.

- retiradas e entregas simultâneas,
- retiradas e entregas mistas, e
- problemas em que as retiradas só são permitidas após as entregas.

VRPPD de entrega primeiro e retirada depois*:* A maior parte dos pesquisadores entende que os clientes podem ser divididos em *linehauls* (clientes recebendo produtos) e *backhauls* (clientes enviando produtos); os veículos somente podem retirar os produtos após terem terminado de entregar toda a carga. Uma razão para isto é a dificuldade em reorganizar, dentro do veículo, quais produtos foram retirados e quais ainda devem ser entregues. Isto pode fazer com que o veículo seja sobrecarregado durante a viagem (mesmo que todas as entregas e retiradas não fiquem acima da capacidade do veículo), resultando em um trajeto inviável para o mesmo.

Retiradas e entregas mistas*:* Um VRPPD em que *linehauls* e *backhauls* podem ocorrer em qualquer seqüência dentro do percurso do veículo é denominado VRPPD misto. Problemas de VRPPD de entrega primeiro e retirada depois e de VRPPD misto são reconhecidos como sendo ambos problemas de roteamento do veículo com *backhauling (VRPB).* Este será o modelo escolhido, pois é o que mais se assemelha com o nosso problema, pois em que qualquer PCAN poderá haver ou não cargas ou passageiros a embarcar ou desembarcar.

Retiradas e entregas simultâneas*:* neste modelo, os clientes podem receber e enviar produtos simultaneamente. Os problemas de VRPPD misto e simultâneo podem ser modelados em uma mesma estrutura. Os problemas mistos podem ser analisados da mesma forma que os simultâneos, com a carga de retirada e a de entrega iguais a zero; enquanto que os clientes de problemas simultâneos podem ser divididos em entidades de retirada e entrega, a fim de gerar uma formulação mista. No problema simultâneo, pode haver uma limitação adicional no serviço de retirada e entrega de um cliente ao mesmo tempo.

Fazer retiradas e entregas mista ou simultaneamente gera dificuldades relacionadas à reorganização dos produtos no interior do veículo. No entanto, isto não é uma tarefa impossível, principalmente se o veículo estiver praticamente vazio. Alguns veículos têm também um design melhor (por exemplo, compartimento de carga na traseira e nas laterais), fazendo da reorganização dos produtos uma opção mais prática. Do ponto de vista gerencial, é útil encontrar soluções para ambos os problemas, porque isto pode ajudar na avaliação do custo-benefício da inconveniência provocada pela reorganização dos produtos. Tal inconveniência pode ser examinada a fundo, a fim de se verificar se seria uma opção a ser considerada. A estrutura especial das rotas neste caso as tornam mais apropriadas a serem resolvidas como problemas de combinação, uma vez que rotas consistem em duas partes distintas (um segmento de entrega e um de retirada).

VRPPD Misto: a abordagem descrita em Golden, Baker, Alfaro e Schaffer (1985) é baseada na inserção de clientes *backhaul* (retirada) nas rotas formadas por clientes *linehaul* (entrega). A fórmula de inserção apresentada por eles utiliza um fator de penalidade que leva em conta o número de clientes de entrega deixados no percurso após o ponto de inserção. Casco, Golden e Wasil (1988) desenvolvem um "procedimento de inserção baseado em carga" em que o custo de inserção para clientes *backhaul* leva em conta a carga ainda a ser entregue na rota de entrega (ao invés do número de paradas). Esta última abordagem foi considerada superior. Mosheiov (1994) investigou o TSPPD. Foi demonstrado que, se a solução é inviável por alguns arcos estarem sobrecarregados, a viabilidade pode ser recuperada pela reinserção do depósito no arco com a carga mais alta. Anily e Mosheiov (1994) apresentam um método de solução para o TSPPD pela criação de uma árvore de abrangência mínima. Embora sua hipótese de pior-cenário e complexidade computacional seja melhor do que as de Mosheiov (1994), seu desempenho é ligeiramente inferior àquele. O recente trabalho de Salhi e Nagy (1999) amplia o método de inserção de Casco, Golden e Wasil (1998), por permitir que *backhauls* sejam inseridos em grupo e não um por um. Esta abordagem rende algumas melhorias modestas e exige insignificante esforço computacional adicional. Este procedimento também é capaz de resolver problemas simultâneos.

Nesse trabalho será proposto um modelo que reduz o número de serviços de cadastro em cada PCAN centralizando-os no CECAN. Seja *S* o número de tais serviços de cadastros e *CO* o custo de operação de cada serviço. O custo total de cadastro é, neste caso, reduzido de *S*x*CO* à *CO*. Portanto, o restante do problema considera somente o problema de maximização de fluxo transportado.

Seguem nos próximos capítulos duas sugestões dessas metodologias como contribuição para o estudo do caso real do Centro do Correio Aéreo Nacional da Força Aérea Brasileira.