

3

Distinção de Estados Quânticos: Novos Métodos

3.1

Traço parcial

Para melhor entendimento das próximas seções, apresentaremos aqui a ferramenta utilizada para descrever subsistemas quânticos compostos: o *traço parcial* (23).

Se estivermos analisando dois sistemas \mathcal{A} e \mathcal{B} cujo estado (emaranhado) seja descrito pelo operador densidade ρ^{AB} , temos que o sistema \mathcal{A} é descrito por um operador densidade reduzido:

$$\rho^A = \text{Tr}_B(\rho^{AB}),$$

onde $\text{Tr}_B(\cdot)$ (traço parcial sobre \mathcal{B}) é dado por

$$\text{Tr}_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) = |a_1\rangle\langle a_2| \text{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|),$$

e $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$, $|b_1\rangle$ e $|b_2\rangle$ são vetores quaisquer dos espaços associados a \mathcal{A} e \mathcal{B} , respectivamente. Ou seja, ao observarmos uma parte de um estado emaranhado, esta se comporta como um estado misto.

3.2

Distinção de Estados Quânticos via CTCs

Em 2009, em seu artigo (8), Brun *et. al.* propuseram uma estratégia de distinção entre os estados não-ortogonais $|0\rangle$ e $|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$, que consiste do seguinte: $|\psi\rangle$ é o estado inicial desconhecido do sistema \mathcal{A} , o qual pode ter sido preparado em $|0\rangle$ ou $|-\rangle$, e \mathcal{B} é um sistema que foi preparado no estado $\hat{\rho}$, o qual deve obedecer a seguinte restrição:

$$\hat{\rho} = \text{Tr}_A(U(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})U^*),$$

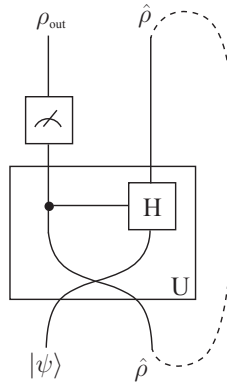
onde U representa a interação entre os dois sistemas. A interação inicia-se com a aplicação de um operador $Swap$, que é dado por

$$Swap = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e faz com que os estados dos sistemas sejam trocados entre si. O próximo passo é a aplicação do operador *Controle-Hadamard*, sendo \mathcal{A} o controle e \mathcal{B} o sistema no qual agirá a matriz de Hadamard. Este operador é dado por $I \otimes P_{|0\rangle} + H \otimes P_{|1\rangle}$, onde

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por fim, quando os sistemas não mais interagem, realiza-se uma medida apenas sobre o sistema \mathcal{A} , na base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Se obtivermos um resultado associado a $|0\rangle$, afirmamos que $|\psi\rangle = |0\rangle$. Caso o resultado seja aquele associado a $|1\rangle$, afirmamos que $|\psi\rangle = |-\rangle$. O procedimento pode ser representado pelo seguinte diagrama:

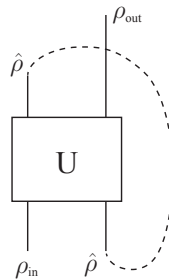


Para entender por que isto funciona, o mais simples é pensar no diagrama de trás para frente: suponha que o estado final do sistema \mathcal{A} é $|0\rangle\langle 0|$. Então, pelo diagrama, $\hat{\rho} = |0\rangle\langle 0|$. Além disso, como o operador Hadamard não foi ativado pelo controle, toda a interação entre os sistemas se resume a um Swap. Logo, $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = |0\rangle\langle 0|$. Já se o estado final do sistema \mathcal{A} é $|1\rangle\langle 1|$, temos que $\hat{\rho} = |1\rangle\langle 1|$, mas agora o operador Hadamard está agindo, e então $\hat{\rho} = H|\psi\rangle\langle\psi|H$. Logo, $H|\psi\rangle\langle\psi|H = |1\rangle\langle 1|$, ou seja, $|\psi\rangle\langle\psi| = |-\rangle\langle -|$.

De forma mais geral, ao substituírmos a matriz de Hadamard por qualquer unitário V no diagrama acima, verifica-se facilmente que o par de veto-

res não-ortogonais que agora conseguimos distinguir é $|0\rangle$ e $V^*|1\rangle$. Ou seja, a condição para que os vetores $|0\rangle$ e $|\psi\rangle \neq \{|0\rangle, ket1\}$ sejam distinguidos é que $V|\psi\rangle = |1\rangle$, onde V é qualquer matriz unitária. Vale ressaltar que este é um processo determinístico: dado que tal condição é satisfeita, os estados são distinguidos com certeza, um resultado verdadeiramente impressionante, e com consequências práticas bastante importantes em Informação Quântica (17). Sendo capazes de distinguir perfeitamente entre dois estados quânticos não-ortogonais, existiria comunicação instantânea entre dois pontos arbitrariamente distantes (3), o que garantiria a realização, por exemplo, da perfeita clonagem de estados quânticos (15).

A principal ferramenta usada por Brun para construir tal diagrama é uma *closed timelike curve* (CTC) (16, 29), uma estrutura não geralmente aceita, já que CTCs são uma espécie de viagem no tempo. Embora tal tópico seja normalmente visto como algo estritamente ligado à ficção científica, a teoria de Einstein de Relatividade Geral admite a existência de CTCs, que nada mais são do que *loops temporais*: caminhos que avançam no tempo e em certo instante voltam ao seu início, reconectando-se e formando um circuito fechado. Estes tipos de curvas obviamente geram inúmeros paradoxos, sendo o mais conhecido deles o *grandfather paradox*: se uma pessoa pudesse seguir uma CTC (ou seja, viajar no tempo), poderia matar seu antecessor, garantindo assim a própria morte. Em 1991 (12), David Deutsch propôs uma condição de consistência para que paradoxos deste tipo fossem eliminados: uma partícula que volta no tempo por uma CTC, ao reaparecer no passado imediato à interação, deverá estar no mesmo estado quântico que estava quando partiu da interação para o futuro. Abaixo estão o diagrama proposto por Deutsch, além das condições de consistência que devem ser impostas ao sistema:



$$\hat{\rho} = \text{Tr}_2(U(\rho_{\text{in}} \otimes \hat{\rho})U^*)$$

$$\rho_{\text{out}} = \text{Tr}_1(U(\rho_{\text{in}} \otimes \hat{\rho})U^*)$$

Vários resultados tem sido provados desde a publicação das ideias de Deutsch: por exemplo, em (2) utilizam-se CTC's para mostrar que problemas NP-completos podem ser resolvidos com um número polinomial de portas lógicas; em (1) mostra-se que computadores clássicos ou quânticos, quando utilizam CTC's, têm ambos poder computacional equivalente ao da classe de complexidade PSPACE (a qual consiste de todos os problemas que podem ser resolvidos por um computador clássico com uma quantidade polinomial de memória).

É interessante observar que o operador unitário considerado por Brun difere daquele utilizado por Deutsch apenas por um Swap. Este detalhe, entretanto, leva a duas interpretações diferentes da viagem no tempo: enquanto Deutsch considera que a CTC promove a interação das versões inicial e final de uma mesma partícula, Brun propõe que a interação seja entre duas partículas distintas.

A teoria proposta por Deutsch (12, 2) possui alguns pontos bastante controversos: primeiramente, a própria utilização de CTCs, características da teoria de Relatividade Geral. Atualmente, existem cada vez mais evidências de que esta é uma teoria aproximada, ao contrário da Mecânica Quântica, que é bem estabelecida. Logo, não parece natural criar condições para que a Mecânica Quântica entre em acordo com a teoria ainda incompleta (24, 30). Um segundo ponto a se ressaltar é o processo de desemaranhamento que é utilizado: se $\rho = \rho_{\text{in}} \otimes \hat{\rho}$ é o estado inicial do sistema, então o estado final deveria ser $\rho' = U\rho U^*$. Entretanto, o que o diagrama exige é que, antes da partícula iniciar a sua viagem no tempo, a este estado deve ser aplicada a transformação $\rho' \mapsto \text{Tr}_2(\rho') \otimes \text{Tr}_1(\rho') = \hat{\rho} \otimes \rho_{\text{out}}$, a qual não é usual. Por fim, a transformação $\rho_{\text{in}} \mapsto \rho_{\text{out}}$ é não-linear, novamente um processo quântico não convencional.

3.3

Simulação Probabilística de CTCs e Distinção via Traço Parcial

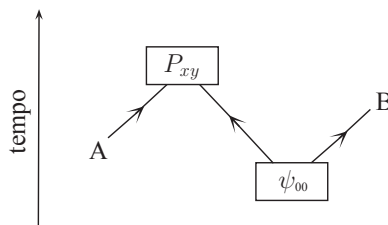
Bennett e Schumacher (6) e, independentemente, Svetlichny (27) propuseram um modelo que simula probabilisticamente o funcionamento do diagrama de Deutsch descrito na seção anterior (ou seja, também é útil para distinguir estados quânticos não-ortogonais), mas que não utiliza CTCs. Vale ressaltar que a existência de um processo probabilístico envolvido no modelo é o motivo pelo qual não se aplicam mais paradoxos como o citado na seção anterior (21, 22, 27, 28).

Antes de dar início à descrição deste modelo, é necessário tratar do

protocolo de teleportação (5): Alice possui um qubit (ou seja, um sistema associado a um espaço de Hilbert bidimensional) em um certo estado $|\psi\rangle$ e quer transferi-lo para Bob. O procedimento começa com a preparação de um par emaranhado $\psi_{00} = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$. Em seguida, um dos qubits é dado a Alice, e o outro a Bob. Alice então realiza uma medição na *base de Bell*, a qual é composta pelos estados

$$\psi_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle|y\rangle + (-1)^y|x+1\rangle|y+1\rangle),$$

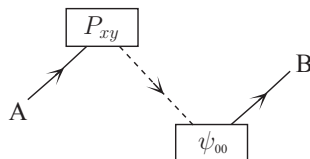
onde $x, y \in \{0, 1\}$ e as somas são módulo 2, e envia o resultado de tal medição para Bob (ou seja, informação clássica). Dependendo da informação recebida, Bob aplica a seu qubit certo operador unitário σ_{xy} , e garantimos que a teleportação foi realizada. No diagrama a seguir, apresentamos a parte deste protocolo que não utiliza o envio de informação clássica. Temos que P_{xy} representa a medição na base de Bell que Alice realiza, e que a ordem temporal é dada de baixo para cima.



A seta que conecta as caixas P_{xy} e ψ_{00} pode ter sua orientação invertida, se utilizarmos um isomorfismo básico na teoria de espaços de Hilbert:

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3) \cong \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2^* \otimes \mathcal{H}_3) \tag{3-1}$$

onde $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ é o espaço de aplicações lineares de \mathcal{H} para \mathcal{K} , e \mathcal{H}^* denota o espaço dual de \mathcal{H} . Identificamos o espaço \mathcal{H}^{**} com o próprio \mathcal{H} . O significado deste isomorfismo é o seguinte: fazendo uma troca do espaço de Hilbert pelo seu dual, temos que a entrada de uma transformação linear pode ser vista como uma saída. Tal troca de espaços pode ser representada como no diagrama abaixo, por uma linha tracejada:



É importante ressaltar o seguinte: se pensarmos que em um circuito quântico existe um certo fluxo de informação quântica, esta troca de espaços

poderia nos levar a acreditar em informação viajando de volta no tempo. Entretanto, observe que nossa construção é baseada apenas em um isomorfismo matemático, logo não podem ser criados quaisquer tipos de paradoxos.

Através do isomorfismo (3-1), podemos ainda estabelecer algumas equivalências: todo estado emaranhado $|\Phi\rangle = \sum c_i |a_i\rangle |b_i\rangle$ identificado como um elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ pode, de acordo com tal isomorfismo, ser considerado como uma aplicação

$$\hat{\Phi} : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathcal{K}$$

$$\langle \gamma | \mapsto \sum c_i \langle \gamma | a_i \rangle | b_i \rangle . \tag{3-2}$$

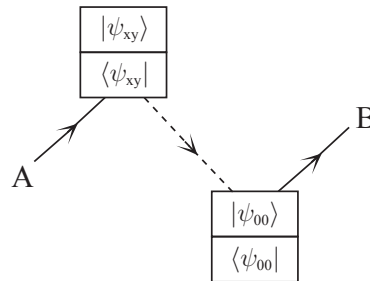
Analogamente, um funcional linear $\langle \Psi | = \sum d_i \langle a_i | b_i \rangle$ identificado como um elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathcal{H}^* \otimes \mathcal{K}^*)$ pode ser considerado como uma aplicação

$$\check{\Psi} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}^*$$

$$|\gamma\rangle \mapsto \sum d_i \langle a_i | \gamma \rangle | b_i \rangle . \tag{3-3}$$

Assim, utilizando a base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ e a dual, podemos por exemplo representar os estados da base de Bell, ψ_{xy} , pelos operadores $\sigma_{xy}/\sqrt{2}$, onde σ_{xy} é uma matriz de Pauli. Em particular, o operador que representa ψ_{00} é $I/\sqrt{2}$.

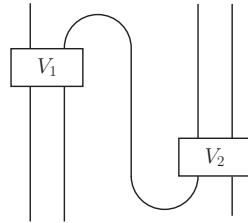
Vamos agora voltar ao diagrama anterior. A medição na base de Bell faz com que o estado seja projetado sobre algum subespaço ψ_{xy} . O projetor seria então $|\psi_{xy}\rangle\langle\psi_{xy}|$, o qual pode ser melhor visualizado no diagrama a seguir:



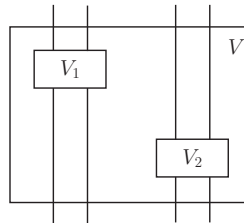
Verificamos então que, no protocolo de teletransportação, o qubit sofre a ação de $\langle\psi_{xy}|$ e depois de $|\psi_{00}\rangle$. Vistos como operadores, esta composição seria dada por $\hat{\psi}_{00} \circ \check{\psi}_{xy} = \sigma_{xy}/2$, ou seja, a menos de uma constante, o qubit no ponto B é o qubit do ponto A transformado por σ_{xy} . No caso particular em que a medição retorna um valor associado ao estado ψ_{00} , afirmamos então que o qubit no ponto A é idêntico aquele no ponto B, e o diagrama funciona como se uma linha sólida tivesse sido colocada no lugar da tracejada, ou seja, como

se uma viagem no tempo de fato tivesse acontecido. De fato, não podemos afirmar que isto não ocorreu.

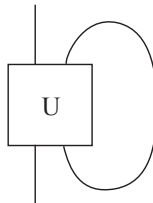
Vamos agora utilizar estas ideias para verificar como o diagrama de Deutsch pode ser simulado probabilisticamente. Considere um circuito quântico que contenha uma conexão atemporal, como abaixo:



Este circuito pode ser visto como parte de um circuito maior, onde não ocorre nenhuma outra conexão deste tipo. Se, neste diagrama, não fizéssemos a conexão atemporal, deixando os estados de entrada e saída como são, poderíamos então resumir a evolução do sistema à ação de um operador unitário que age em mais de um espaço de Hilbert, como no diagrama a seguir:

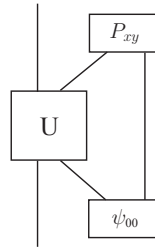


Ou seja, o que o diagrama com a conexão atemporal representa é um traço parcial de tal operador V , antecedido ou seguido por um swap (que também é um operador unitário) dos dois espaços de Hilbert envolvidos. A partir de agora, vamos então considerar o seguinte diagrama:



Temos que U é um operador unitário e o loop é o espaço de Hilbert associado a um qubit. As outras linhas representam o produto tensorial de todos os outros espaços de Hilbert envolvidos. Este loop nada mais é do que o análogo em Mecânica Quântica de uma CTC.

Utilizando agora o protocolo de teleportação que descrevemos anteriormente, podemos ainda reconstruir este diagrama como:



Conclui-se então que, cada vez que a medição P_{xy} projeta o estado no subespaço ψ_{00} , esta composição de operadores age exatamente como o traço parcial, a menos de uma constante.

Por fim, voltando ao diagrama de Brun *et. al.* (aquele que distingue perfeitamente entre $|0\rangle$ e $|-\rangle$), seguindo este novo modelo, se pensarmos em sua CTC como um traço parcial, afirmamos que os estados $|1\rangle$ e $|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ são distinguidos sempre que o traço parcial é realizado. Isto se deve ao fato de que $L = \text{Tr}_2(U) = P_0 + P_1H$, onde P_0 e P_1 são os projetores sobre $|0\rangle$ e $|1\rangle$, respectivamente, e $L|1\rangle = -|1\rangle/\sqrt{2}$ e $L|+\rangle = |0\rangle/\sqrt{2}$, os quais são ortogonais (então, uma medição de base $\{L|1\rangle, L|+\rangle\}$ consegue distingui-los perfeitamente). Assim, é sugerida uma relação entre os diagramas de Deutsch e os de traço parcial, a qual exploraremos mais adiante.

Na literatura recente, esta simulação de CTCs tem sido comumente chamada de *CTC pós-selecionada* (P-CTC). Isto porque só consideramos os resultados da medição de base $\{L\varphi_1, L\varphi_2\}$ quando a medição P_{xy} nos retorna um valor associado a ψ_{00} . E embora este tipo de circuito não possa ser empregado para a distinção perfeita de estados quânticos não-ortogonais (apenas de forma probabilística), eles são fisicamente realizáveis (21), em laboratório, ao contrário das CTCs utilizadas por Brun *et. al.*. Diversas outras relações entre os diagramas de Deutsch e os de traço parcial também já vêm sendo estudadas, como em (13).

Deve-se mencionar que Brun *et. al.*, em um novo artigo (9), demonstraram um resultado utilizando P-CTC's: qualquer conjunto de estados quânticos linearmente independentes pode ser distinguido através de um circuito que utiliza uma P-CTC. Entretanto, não há garantias que tal distinção ocorra de forma ótima.