

4

Diagramas de Traço Parcial

Após a apresentação do modelo probabilístico de distinção de estados quânticos não-ortogonais, utilizando traços parciais, temos uma pergunta natural a ser respondida: quais operadores L são traços parciais de operadores unitários U ? A resposta é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 4.1 *Sejam \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 espaços de Hilbert de dimensão c e d , respectivamente. Então para todo $L : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$, afirmamos que existe $U : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ unitário, tal que $\text{Tr}_2(U) = L$ se e somente se $|L|^2 \leq d^2 I$.*

Demonstração: Supondo que $|L|^2 \leq d^2 I$, queremos mostrar que existe uma matriz unitária U de dimensão $cd \times cd$, tal que $\text{Tr}_2(U) = L$. Considerando a decomposição polar de L , podemos escrever $L = |L|W$, onde W é uma matriz unitária ($c \times c$, obviamente). Se d é um número par, definiremos $U = \tilde{U}\tilde{W}$, tal que

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} B & & \\ & \ddots & \\ & & B \end{pmatrix}, \quad \tilde{W} = \begin{pmatrix} W & & \\ & \ddots & \\ & & W \end{pmatrix},$$

onde o bloco B é $2c \times 2c$, dado por

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{d}|L| & \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}|L|^2} \\ -\sqrt{1 - \frac{1}{d^2}|L|^2} & \frac{1}{d}|L| \end{pmatrix},$$

e todas as demais entradas das matrizes \tilde{U} e \tilde{W} são nulas. Obviamente, \tilde{W} é unitária. Além disso, pela hipótese, temos que $\frac{1}{d}|L| \leq I$. Verifica-se então facilmente que \tilde{U} é unitária, e portanto U também é. Com U construída desta forma, segue que $\text{Tr}_2(U) = L$, como queríamos.

Já no caso em que d é um número ímpar, o único ajuste a ser feito na matriz U que foi definida anteriormente é o seguinte: os blocos que compõem a diagonal principal de \tilde{U} são todos iguais a B , como antes, exceto o último, o

qual é dado por

$$\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ b_2 & b_0 & b_1 \\ b_1 & b_2 & b_0 \end{pmatrix},$$

onde $b_0 = \frac{1}{d}|L|$, $b_1 = \frac{1-b_0-\sqrt{1+2b_0-3b_0^2}}{2}$, $b_2 = \frac{1-b_0+\sqrt{1+2b_0-3b_0^2}}{2}$, valores estes que foram obtidos forçando-se as condições para que esta matriz fosse unitária, e que todas as entradas de sua diagonal principal fossem iguais a $\frac{1}{d}|L|$. Temos então U unitária, e novamente $\text{Tr}_2(U) = L$.

Vamos supor agora que $\text{Tr}_2(U) = L$. Consideraremos U como sendo uma matriz $d \times d$ cujas entradas são matrizes $c \times c$, e a notação empregada será: $[U]_{ij} = S_{ij}$. Como $[U^*]_{ij} = S_{ji}^*$, segue que $I = [U^*U]_{kk} = \sum S_{jk}^* S_{kj}$. Quando $j = k$, a parcela do somatório é $S_{kk}^* S_{kk}$, logo, $|S_{kk}|^2 \leq I$. Tomando um vetor normalizado ϕ , temos então que $\|S_{kk}\phi\|^2 = (\phi, |S_{kk}|^2\phi) \leq 1$. Além disso, utilizando o fato de que $\text{Tr}_2(U) = \sum S_{kk}$, segue que $|\text{Tr}_2(U)|^2 = \sum S_{kk}^* S_{jj}$. Assim, $(\phi, |\text{Tr}_2(U)|^2\phi) = \sum (S_{kk}\phi, S_{jj}\phi) \leq \sum |(S_{kk}\phi, S_{jj}\phi)| \leq \sum \|S_{kk}\phi\| \|S_{jj}\phi\| \leq d^2$, ou seja, $|L|^2 = |\text{Tr}_2(U)|^2 \leq d^2 I$, como queríamos demonstrar. \square

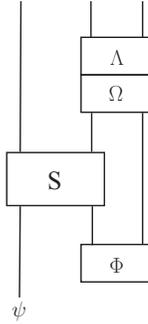
Nosso principal objetivo é utilizar os diagramas de traço parcial para distinguir dois estados quânticos não-ortogonais, φ_1 e φ_2 . Como vimos anteriormente, isto só é possível se $L = \text{Tr}_2(U)$ é tal que $(L\varphi_1, L\varphi_2) = 0$. Considerando a decomposição polar do operador em questão, podemos escrever $L = |L|W$, onde W é unitário. Além disso, podemos decompor $|L|$ em uma base de autovetores, $|L| = T^*DT$, onde T é unitário e D é uma matriz diagonal cujos elementos r_i da diagonal principal são tais que $0 \leq r_i \leq d$, pois, pelo teorema (4.1), $|L| \leq dI$. Assim, a condição de distinção é reescrita como $(T^*DTW\varphi_1, T^*DTW\varphi_2) = (DTW\varphi_1, DTW\varphi_2) = 0$, e os estados que estão sendo distinguidos são $\tilde{\varphi}_1 = TW\varphi_1$ e $\tilde{\varphi}_2 = TW\varphi_2$, problema equivalente ao de distinção dos estados originais, já que TW é unitário. Ou seja, para a distinção de estados quânticos não-ortogonais utilizando diagramas de traço parcial, basta considerar matrizes L diagonais cujos autovalores são positivos e de módulo no máximo igual a d .

4.1

Probabilidade de Realização do Traço Parcial

Nosso propósito nesta seção é determinar quais operadores L são capazes de distinguir os estados φ_1 e φ_2 com probabilidade ótima (valor este obtido na seção (2.4)). Iniciaremos nossos estudos com o teorema a seguir:

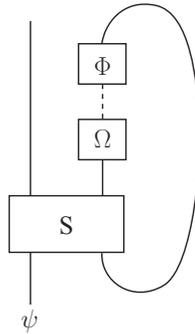
Teorema 4.2 Considere um espaço de Hilbert tripartido $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$. Para $i = a, b$, sejam $Q_{\Lambda^i, \Omega^i} = (\Omega^i, \cdot)\Lambda^i$ operadores gerais de posto 1 em $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$, S^i operadores em $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, $\psi^i \in \mathcal{H}_1$, e $\Phi^i \in \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$, como no diagrama abaixo:



Então,

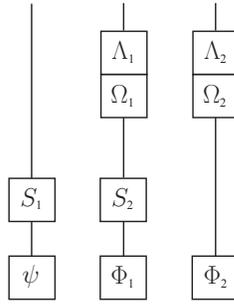
$$\begin{aligned} & ((I \otimes Q_{\Lambda^a, \Omega^a})(S^a \otimes I)(\psi^a \otimes \Phi^a), (I \otimes Q_{\Lambda^b, \Omega^b})(S^b \otimes I)(\psi^b \otimes \Phi^b)) \\ &= (\Lambda^a, \Lambda^b) \left(\text{Tr}_2((I \otimes \hat{\Phi}^a \circ \check{\Omega}^a)S^a)\psi^a, \text{Tr}_2((I \otimes \hat{\Phi}^b \circ \check{\Omega}^b)S^b)\psi^b \right) \quad (4-1) \end{aligned}$$

Demonstração: Primeiramente, observe que o diagrama acima pode ser interpretado como um traço parcial, como ilustrado abaixo:



Observe que as expressões dos lados direito e esquerdo de (4-1) dependem apenas linearmente ou antilinearmente de Λ^i , Ω^i , S^i e Φ^i , logo segue pela propriedade de universalidade do produto tensorial que o teorema estará provado se conseguirmos demonstrá-lo para o caso mais simples, onde todos os objetos envolvidos (vetores e operadores) são da forma produto. Sejam então $\Lambda^i = \Lambda_1^i \otimes \Lambda_2^i$, $\Omega^i = \Omega_1^i \otimes \Omega_2^i$, $S^i = S_1^i \otimes S_2^i$, $\Phi^i = \Phi_1^i \otimes \Phi_2^i$, onde $i = a, b$.

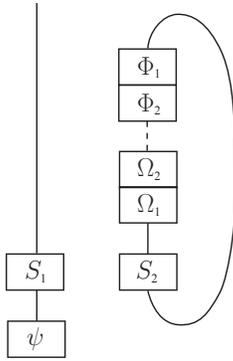
Utilizando o diagrama



é imediato verificar que

$$(I \otimes Q_{\Lambda^i, \Omega^i})(S^i \otimes I)(\psi^i \otimes \Phi^i) = S_1^i \psi^i \otimes (\Omega_1^i, S_2^i \Phi_1^i) \Lambda_1^i \otimes (\Omega_2^i, \Phi_2^i) \Lambda_2^i, \quad i = a, b.$$

Além disso, pelo diagrama



temos que

$$\text{Tr}_2((I \otimes \hat{\Phi}^i \circ \tilde{\Omega}^i) S^i) \psi^i = (\Omega_1^i, S_2^i \Phi_1^i) (\Omega_2^i, \Phi_2^i) S_1^i \psi^i, \quad i = a, b.$$

Logo, o lado esquerdo da equação (4-1) pode ser reescrito como:

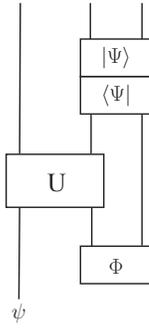
$$(\psi^a, S_1^{a*} S_1^b \psi^b) (\Phi_1^a, S_2^{a*} \Omega_1^a) (\Omega_1^b, S_2^b \Phi_1^b) (\Lambda_1^a, \Lambda_1^b) (\Phi_2^a, \Omega_2^a) (\Omega_2^b, \Phi_2^b) (\Lambda_2^a, \Lambda_2^b),$$

e o lado direito,

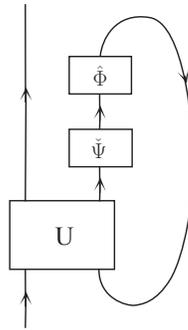
$$(\Lambda^a, \Lambda^b) (\Phi_1^a, S_2^{a*} \Omega_1^a) (\Phi_2^a, \Omega_2^a) (\Omega_1^b, S_2^b \Phi_1^b) (\Omega_2^b, \Phi_2^b) (\psi^a, S_1^{a*} U_1^b \psi^b).$$

Assim concluímos a demonstração, já que a igualdade destas duas expressões é obviamente verificada. \square

Vamos agora voltar ao contexto de diagramas de traço parcial: se o operador geral de posto 1 $(Q_{\Lambda, \Omega})$ for um projetor sobre um vetor Ψ , e S for o unitário U que compõe o diagrama em questão, então o lado esquerdo da equação (4-1) é escrito como $\|(I \otimes P_{\Psi})(U \otimes I)(\psi \otimes \Phi)\|^2$, que nada mais é do que a probabilidade de observarmos Ψ após uma medição.



O que o teorema (4.2) nos fornece então é uma outra expressão para tal probabilidade, a saber, $\|\text{Tr}_2((I \otimes \hat{\Phi} \circ \check{\Psi})U)\psi\|^2$ (pois, neste caso, $C = 1$). Além disso, sabemos que para que o traço parcial seja realizado, devemos ter $\hat{\Phi} \circ \check{\Psi} = \alpha I$,



e isto ocorre então com a seguinte probabilidade:

$$\text{Prob}(P_\Psi) = |\alpha|^2 \|\text{Tr}_2(U)\psi\|^2 .$$

Obviamente, gostaríamos que $\text{Prob}(P_\Psi)$ fosse a maior possível. Para isto, vamos considerar o seguinte problema: maximizar $|\alpha|^2$ sujeito a $\hat{\Phi} \circ \check{\Psi} = \alpha I$, para todos os vetores Φ e Ψ tais que $\|\Phi\| = \|\Psi\| = 1$.

Afirmção 4.3 $[\check{\Phi}] = [\hat{\Phi}]^*$.

Demonstração:

Sejam $\{|i\rangle\}$ e $\{|j\rangle\}$ bases ortonormais para os espaços de Hilbert \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_3 , respectivamente. Por (3-2) e (3-3) vimos que se $|\Phi\rangle = \sum a_{ij}|i\rangle \otimes |j\rangle$ então $\hat{\Phi} : |k\rangle \mapsto \sum a_{ij}\langle k|i\rangle|j\rangle = \sum a_{kj}|j\rangle$ e $\check{\Phi} : |k\rangle \mapsto \sum \bar{a}_{ij}\langle i|k\rangle\langle j| = \sum \bar{a}_{kj}\langle j|$ ou seja, $[\hat{\Phi}]_{kj} = a_{kj}$ e $[\check{\Phi}]_{kj} = \bar{a}_{kj}$. Segue então que $[\check{\Phi}] = [\hat{\Phi}]^*$, como queríamos demonstrar. \square

Voltando ao nosso problema de maximização, se definirmos $[\check{\Phi}] = A$, a restrição $\|\Phi\| = 1$ pode ser reescrita como $1 = \|\Phi\|^2 = \sum |a_{ij}|^2 = \text{Tr}(A^*A)$. Além disso, pela restrição $\hat{\Phi} \circ \check{\Psi} = \alpha I$, temos que $\check{\Psi} = \alpha \hat{\Phi}^{-1}$. Utilizando então

a afirmação (4.3), segue que $[\hat{\Psi}] = \alpha A^{*-1}$, e a restrição $\|\Psi\| = 1$ é agora escrita como $1 = \|\Psi\|^2 = |\alpha|^2 \text{Tr}(A^{*-1}A^{-1})$. Ou seja, o problema pode ser reescrito como: minimizar $\text{Tr}(A^{*-1}A^{-1})$ sujeito a $\text{Tr}(A^*A) = 1$.

Observe que se tomarmos a decomposição de A em valores singulares, podemos escrever $A = TDW$, onde T e W são unitários e D é diagonal. Assim, $\text{Tr}(A^*A) = \text{Tr}(D^*D)$, e $\text{Tr}(A^{*-1}A^{-1}) = \text{Tr}(D^{*-1}D^{-1})$, ou seja, podemos supor que A é diagonal, pois os problemas são equivalentes. Sendo assim, sejam δ_n os elementos da diagonal de A , $1 \leq n \leq d$. O problema se reescreve como: minimizar $\sum \frac{1}{\delta_n^2}$ sujeito a $\sum \delta_n^2 = 1$, cuja solução é $\delta_n = \frac{1}{\sqrt{d}}$. Ou seja, $\hat{\Psi}$ deve ser o produto de $\frac{1}{\sqrt{d}}$ por um unitário. Para $d = 2$, a base de estados de Bell satisfaz esta condição. Consideraremos então:

$$\text{Prob}(P_{\Psi}) = \frac{1}{d^2} \|\text{Tr}_2(U)\psi\|^2 .$$

Nesta tese, estamos trabalhando apenas com qubits, ou seja, $d = 2$. Logo,

$$\text{Prob}(P_{\Psi}) = \frac{1}{4} \|\text{Tr}_2(U)\psi\|^2 .$$

A pergunta natural a ser respondida é se não deveríamos considerar dimensões maiores, mas a resposta é não, pois nosso resultado principal é um resultado sobre probabilidade, a qual não aumenta se a dimensão for maior. Isto pode ser visto pelo seguinte: seja $M = \max \sigma(|L|)$. Como, pelo teorema (4.1), $|L| = \text{Tr}_2(U) \leq dI$, segue que $\text{Prob}(P_{\Psi}) = \frac{1}{d^2} \|L\psi\|^2 \leq \frac{1}{d^2} \left\| \frac{d}{M} L\psi \right\|^2 = \left\| \frac{L}{M} \psi \right\|^2$, quantidade esta que independe da dimensão d . Portanto optamos por $d = 2$, por ser matematicamente e experimentalmente mais simples.

4.2

Distinção com Probabilidade Ótima

Até agora, dado um certo unitário U , o que vimos foi a probabilidade de que o traço parcial seja realizado ($L = \text{Tr}_2(U)$). Sabemos que, uma vez que isto ocorra, podemos utilizar os diagramas de traço parcial para distinguir dois estados quânticos não-ortogonais, φ_1 e φ_2 , realizando uma medição com base $\{L\varphi_1, L\varphi_2\}$. Sejam r e $1-r$ as probabilidades de sortearmos um sistema preparado no estado φ_1 e um sistema preparado no estado φ_2 , respectivamente. Então a probabilidade de que estes dois estados sejam corretamente distinguidos é dado pela soma das probabilidades de observarmos φ_1 ou φ_2 , ou seja,

$$P = \frac{r}{4} \|L\varphi_1\|^2 + \frac{1-r}{4} \|L\varphi_2\|^2 . \quad (4-2)$$

Um dos propósitos deste trabalho é verificar se no conjunto de matrizes L

que representam o traço parcial de U existe alguma que seja capaz de distinguir φ_1 e φ_2 com probabilidade ótima. Ou seja, vamos procurar por matrizes L tais que a probabilidade dada em (4-2) seja maximizada. Como visto anteriormente, podemos sempre considerar $L = D = \text{diag}(r_1, r_2)$, onde $0 \leq r_i \leq 2$, $i = 1, 2$, e então, obviamente, para maximizar a probabilidade devemos maximizar os autovalores de D . Observe que se $r_1 = r_2 = 2$, teríamos $D = 2I$, e então $L = TDW = 2TW$, ou seja, L seria múltiplo de um unitário, e só seria então capaz de distinguir vetores que já fossem ortogonais (obviamente com probabilidade ótima), um caso trivial. Já a probabilidade de distinção no caso em que $r_1 < 2$ e $r_2 < 2$ é facilmente aumentada se considerarmos a matriz kL , a qual tem um autovalor igual a 2 (e, pelo teorema 4.1, ainda realizável por traço parcial). Concluimos então que a probabilidade de distinção de φ_1 e φ_2 é máxima se D tem um único autovalor igual a 2.