6
Comparação entre os Modelos

Neste capítulo pretendemos comparar o poder de distinção de estados quânticos não ortogonais dos diagramas de Deutsch e dos diagramas de traço parcial. No apêndice (A) estão todos os cálculos necessários para concluirmos quais pares de estados de fato podem ser distinguidos por cada um dos diagramas de Deutsch. Os resultados se resumem a:

– **Diagrama D.I**: Os únicos vetores não ortogonais que podem ser distinguidos são

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &\overset{f}{=} |0\rangle \\ |\psi_2\rangle &\overset{f}{=} V^*|1\rangle \end{aligned}$$

– **Diagrama D.II**: Nenhum par de vetores não ortogonais pode ser distinguido.

– **Diagrama D.III**: Os únicos vetores não ortogonais que podem ser distinguidos são aqueles que satisfazem

$$\begin{cases} |\psi_i\rangle \overset{f}{\neq} \lambda|0\rangle\,, \;\; |\psi_i\rangle \overset{f}{\neq} \theta|1\rangle\,, \qquad i = 1, 2 \\ \\ \langle\psi_1|W|\psi_2\rangle = 0\,, \;\; \text{onde}\, W = \bar{a}^2 P_0 + P_1 \text{ e } |a| = 1\,. \end{cases}$$

onde a é calculado a partir do espectro de V.

– **Diagrama D.IV**: Os únicos vetores não ortogonais que podem ser distinguidos são aqueles que satisfazem

$$\begin{cases} |\psi_1\rangle \text{ e } |\psi_2\rangle \text{ não são autovetores de V} \\ \langle\psi_2|V|\psi_1\rangle = 0 \end{cases}$$

Já para os diagramas de traço parcial, os resultados são:

– **Diagrama T.I**: Para todo par de vetores não ortogonais, existe V unitária que os distingue com probabilidade ótima.

– **Diagrama T.II**: Para cada V unitária, existem pares de vetores não ortogonais distinguíveis com probabilidade ótima.

– **Diagrama T.III**: Nenhum par de vetores não ortogonais é distinguido com probabilidade ótima.

– **Diagrama T.IV**: Nenhum par de vetores não ortogonais é distinguido com probabilidade ótima.

Para compararmos estes resultados, o mais natural seria associarmos os dois modelos de diagramas da seguinte forma: a CTC de cada um dos diagramas de Deutsch será substituída por um traço parcial. Logo, D.I será comparado a T.IV, D.II a T.III, D.III a T.II, e D.IV a T.I. A relação entre eles não é muito clara, mas podemos tirar algumas conclusões: observe que, nos casos em que o traço parcial não distingue otimamente (T.III e T.IV), os diagramas de Deutsch ou não são capazes de distinguir quaisquer vetores (D.II) ou então distinguem apenas um conjunto bastante limitado de vetores (D.I). Já nos casos em que o traço parcial distingue otimamente (T.I e T.II), os diagramas de Deutsch distinguem pares de vetores pertencentes a um conjunto menos restrito (D.III e D.IV). Entretanto, esta não é a única forma de relacionar os dois conjuntos de diagramas. Como veremos a seguir, existe uma relação direta também entre os diagramas D.I e T.I.

Voltando ao diagrama T.I, seja V uma matriz da forma (5-5). Ou seja, V é tal que a equação (5-4) é satisfeita e então a matriz $I+V$ consegue distinguir os vetores $\varphi_1 = |0\rangle$ e $\varphi_\epsilon = \epsilon|0\rangle + \sqrt{1-\epsilon^2}|1\rangle$. Com esta mesma V, o diagrama D.I pode distinguir os vetores $\varphi_1 = |0\rangle$ e φ_D, onde este último vetor é tal que $\varphi_D \stackrel{f}{=} V^*|1\rangle$. Observe que $|\langle 0|\varphi_\epsilon\rangle| = \epsilon$, e que $|\langle 0|\varphi_D\rangle| = |\langle 0|V^*|1\rangle| = \sin\theta$. Se tomarmos $\epsilon = \sin\theta$ na equação (5-4), obtemos $1 + \sqrt{1-\epsilon^2}(\cos\tau + \cos\xi) = 0$, que nada mais é do que um círculo no conjunto de matrizes original (dado por (5-4)). Ou seja, para toda V_T neste círculo, os diagramas D.I e T.I distinguem os pares de vetores φ_1 e φ_ϵ, e φ_1 e φ_D, respectivamente, onde φ_ϵ e φ_D, vistos como pontos na esfera de Bloch, possuem a mesma altura. Assim, o vetor φ_D pode ser facilmente levado ao vetor φ_ϵ, bastando para isso utilizarmos uma rotação em torno do eixo vertical: $\varphi_\epsilon = e^{i\frac{\omega}{2}Z}\varphi_D$. Como $\varphi_D \stackrel{f}{=} V_T^*|1\rangle$, temos que $\varphi_\epsilon \stackrel{f}{=} e^{i\frac{\omega}{2}Z}V_T^*|1\rangle \stackrel{f}{=} e^{i\frac{\omega}{2}Z}V_T^* e^{-i\frac{\omega}{2}Z}|1\rangle$. Logo, se tomarmos $V_D = e^{i\frac{\omega}{2}Z}V_T^* e^{-i\frac{\omega}{2}Z}$, tanto o diagrama T.I (utilizando V_T) quanto o diagrama D.I (utilizando V_D), distinguem o mesmo par de vetores, φ_1 e φ_ϵ. A matriz V_T é aquela obtida quando identificamos $\epsilon = \sin\theta$ em (5-5):

$$V_T = \begin{pmatrix} e^{i\tau}\sqrt{1-\epsilon^2} & e^{i\xi}\epsilon \\ e^{i\xi}\epsilon & -e^{i(2\xi-\tau)}\sqrt{1-\epsilon^2} \end{pmatrix}.$$

Já V_D é tal que $V_D|\varphi_\epsilon\rangle = \mu|1\rangle$ e $V_D|\varphi_\epsilon^\perp\rangle = \nu|0\rangle$. Ou seja,

$$V_D = \mu|1\rangle\langle\varphi_\epsilon| + \nu|0\rangle\langle\varphi_\epsilon^\perp| = \begin{pmatrix} -\nu\sqrt{1-\epsilon^2} & \nu\epsilon \\ \mu\epsilon & \mu\sqrt{1-\epsilon^2} \end{pmatrix}.$$

Forçando a igualdade $V_D = e^{i\frac{\omega}{2}Z}V_T^* e^{-i\frac{\omega}{2}Z}$, segue que $\omega = \tau - \xi + \pi$.

Conclui-se então que os diagramas D.I e T.I também possuem certa relação entre si, visto que o mesmo par de estados não-ortogonais é distinguido se tais diagramas são construídos a partir de matrizes conjugadas.