

Referências Bibliográficas

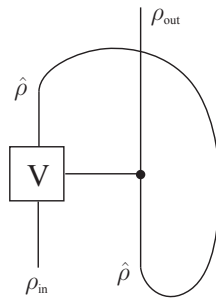
- [1] AARONSON, S.; WATROUS, J. Closed Timelike Curves Make Quantum and Classical Computing Equivalent. **Proc. R. Soc. A**, **465**, 2102, (2008). P. 631 – 647.
- [2] BACON, D. Quantum Computational Complexity in the Presence of Closed Timelike Curves. **Phys. Rev. A** **70**, 032309, (2004).
- [3] BAE, J.; HWANG, W. Y.; HAN, Y. D. No-signaling Principle Can Determine Optimal Quantum State Discrimination. Disponível em arXiv:1102.0361v2, (2011).
- [4] BAN, M. Error-free Optimum Quantum Receiver for a Binary Pure Quantum State Signal. **Phys. Lett. A** **213**, (1996). P. 235 – 238.
- [5] BENNETT, C. H.; BRASSARD, G.; CRÉPEAU, C.; JOZSA, R.; PERES, A.; WOOTTERS, W. K. Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels. **Phys. Rev. Lett.** **70**, 1895, (1993).
- [6] BENNETT, C. H.; SCHUMACHER, B. Simulated Time Travel, Teleportation Without Communication, and How to Conduct a Romance With Someone Who Has Fallen Into a Black Hole. Disponível em <http://www.research.ibm.com/people/b/bennetc/QUPONBshort.pdf>.
- [7] BERGOU, J. A.; HERZOG, U.; HILLERY, M. Discrimination of Quantum States. **Lect. Notes Phys.** **649**, (2004). P. 417 – 465.
- [8] BRUN, T. A.; HARRINGTON, J.; WILDE, M. M. Localized Closed Timelike Curves Can Perfectly Distinguish Quantum States. **Phys. Rev. Lett.** **102**, 210402, (2009).
- [9] BRUN, T. A.; WILDE, M. M. Perfect State Distinguishability and Computational Speedups with Postselected Closed Timelike Curves. **Found. Phys.**, DOI: 10.1007/s10701-011-9601-0. Disponível em arXiv:1008.0433, (2011).

- [10] CHEFLES, A. Quantum State Discrimination. **Contemp. Phys.** **41**, 6, (2000). P. 401 – 424.
- [11] DADA, A. C.; ANDERSSON, E.; JONES, M. L.; KENDON, V. M.; EVERITT, M. S. Quantum Measurements of Atoms Using Cavity QED. **Phys. Rev. A** **83**, 042339, (2011).
- [12] DEUTSCH, D. Quantum Mechanics Near Closed Timelike Lines. **Phys. Rev. D**, (1991). P. 3197 – 3218.
- [13] DIAS DA SILVA, R.; GALVÃO, E. F.; KASHEFI, E. Closed Time-like Curves in Measurement-based Quantum Computation. **Phys. Rev. A** **83**, 012316, (2011).
- [14] DIECKS, D. Overlap and Distinguishability of Quantum States. **Phys. Lett. A** **126**, (1988). P. 303 – 306.
- [15] GISIN, N. Quantum Cloning Without Signaling. **Phys. Lett. A** **242**, (1998). P. 1 – 3.
- [16] HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. **The Large Scale Structure of Space-Time**. Cambridge, England: Cambridge University Press., (1973).
- [17] HELSTROM, C. W. **Quantum Detection and Estimation Theory**. New York: Academic Press, (1976).
- [18] IVANOVIC, I. D. How to Differentiate Between Non-Orthogonal States. **Phys. Lett. A** **123**, (1987). P. 257 – 259.
- [19] JAEGER, G.; SHIMONY, A. Optimal Distinction Between Two Non-Orthogonal Quantum States. **Phys. Lett. A** **197**, (1995). P. 83 – 87.
- [20] KENNEDY, R. S. On the Optimal Receiver for the M-ary Pure State Problem. **MIT Res. Lab. Electron. Quart. Prog. Rep.** **110**, (1973). P. 142 – 146.
- [21] LLOYD, S.; MACCONE, L.; GARCIA-PATRON, R.; GIOVANNETTI, V.; SHIKANO, Y.; PIRANDOLA, S.; ROZEMA, L. A.; DARABI, A.; SOUDAGAR, Y.; SHALM, L. K.; STEINBERG, A. M. Closed Timelike Curves via Post-selection: Theory and Experimental Test of Consistency. **Phys. Rev. Lett.** **106**, (2011).
- [22] LLOYD, S.; MACCONE, L.; GARCIA-PATRON, R.; GIOVANNETTI, V.; SHIKANO, Y. Quantum Mechanics of Time Travel Through Post-Selected Teleportation. **Phys. Rev. D** **84**, 025007, (2011).

- [23] NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum Computation and Quantum Information**. Cambridge, England: Cambridge University Press., (2000).
- [24] BERTOLAMI, O.; PARAMOS, J.; TURYSHEV, S. G. General Theory of Relativity: Will it Survive the Next Decade? em **Lasers, Clocks and Drag-Free Control: Exploration of Relativistic Gravity in Space – Astrophysics and Space Science Library 349**. Springer Verlag, P. 27 – 74. Disponível em arXiv:gr-qc/0602016, (2007).
- [25] PERES, A. **Quantum Theory: Concepts and Methods**. Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, (1993).
- [26] PERES, A. How to Differentiate Between Non-Orthogonal States. **Phys. Lett. A 128**, (1988). P. 19.
- [27] SVETLICHNY, G. Effective Quantum Time Travel. Disponível em arXiv:0902.4898v1, (2009).
- [28] SVETLICHNY, G. Time Travel: Deutsch vs. Teleportation. **Int. J. Theor. Phys.**, DOI: 10.1007/s10773-011-0973-x, (2011).
- [29] WALD, R. M. **General Relativity**. Chicago, IL: The University of Chicago Press, (1984).
- [30] WILL, C. M. The Confrontation Between General Relativity and Experiment. **Living Rev. Relativity 9**, 3. Disponível em <http://www.livingreviews.org/lrr-2006-3>, (2006).

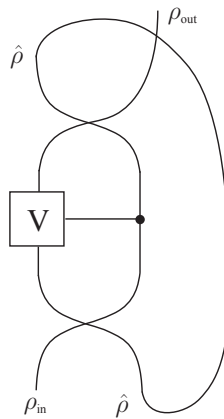
A Análise dos Diagramas de Deutsch

Existem quatro maneiras de atrelar uma CTC ao diagrama de Deutsch, visto que podemos combinar os operadores $U = I \otimes P_0 + V \otimes P_1$ (controle- V) com swaps (que serão representados por S). Para cada uma delas, a consistência do modelo pode ser escrita da seguinte forma:



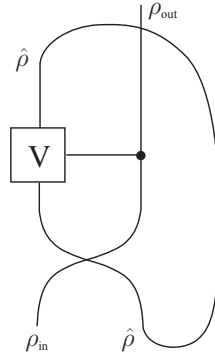
$$\hat{\rho} = \text{Tr}_2(U(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})U^*)$$

$$\rho_{\text{out}} = \text{Tr}_1(U(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})U^*)$$



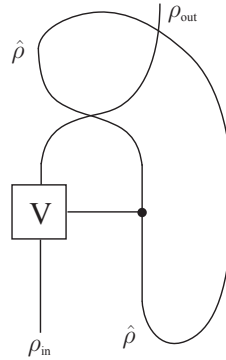
$$\hat{\rho} = \text{Tr}_2(SUS(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})SU^*S) = \text{Tr}_1(U(\hat{\rho} \otimes |\psi\rangle\langle\psi|)U^*)$$

$$\rho_{\text{out}} = \text{Tr}_1(SUS(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})SU^*S) = \text{Tr}_2(U(\hat{\rho} \otimes |\psi\rangle\langle\psi|)U^*)$$



$$\hat{\rho} = \text{Tr}_2(US(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})SU^*) = \text{Tr}_2(U(\hat{\rho} \otimes |\psi\rangle\langle\psi|)U^*)$$

$$\rho_{\text{out}} = \text{Tr}_1(US(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})SU^*) = \text{Tr}_1(U(\hat{\rho} \otimes |\psi\rangle\langle\psi|)U^*)$$



$$\hat{\rho} = \text{Tr}_2(SU(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})U^*S) = \text{Tr}_1(U(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})U^*)$$

$$\rho_{\text{out}} = \text{Tr}_1(SU(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})U^*S) = \text{Tr}_2(U(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})U^*)$$

A.1 Cálculo de Pontos Fixos

Para cada um dos diagramas de Deutsch, utilizaremos as condições de consistência acima apresentadas para encontrar as matrizes de densidade que são pontos fixos do diagrama. Em certa base (a ser especificada em cada diagrama), tais matrizes serão escritas como

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \delta \end{pmatrix},$$

onde $\alpha + \delta = 1$ e $\alpha\delta - |\beta|^2 \geq 0$.

A.1.1 Diagrama D.I

Seja $\hat{\rho}$ escrita na base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$:

$$\hat{\rho} = \alpha|0\rangle\langle 0| + \beta|0\rangle\langle 1| + \bar{\beta}|1\rangle\langle 0| + \delta|1\rangle\langle 1|.$$

A condição de consistência que devemos satisfazer é a seguinte:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \text{Tr}_2(U(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})U^*) \\ &= \langle 0|\hat{\rho}|0\rangle|\psi\rangle\langle\psi| + \langle 1|\hat{\rho}|1\rangle V|\psi\rangle\langle\psi|V^* \\ &= \alpha|\psi\rangle\langle\psi| + \delta V|\psi\rangle\langle\psi|V^*.\end{aligned}$$

Temos então que:

$$\begin{aligned}\langle 0|\hat{\rho}|0\rangle &= \alpha|\langle 0|\psi\rangle|^2 + \delta|\langle 0|V|\psi\rangle|^2 \\ \Rightarrow \alpha &= \alpha|\langle 0|\psi\rangle|^2 + \delta|\langle 0|V|\psi\rangle|^2 \\ \Rightarrow \alpha(1 - |\langle 0|\psi\rangle|^2) - \delta|\langle 0|V|\psi\rangle|^2 &= 0 \\ \Rightarrow \alpha|\langle 1|\psi\rangle|^2 - \delta|\langle 0|V|\psi\rangle|^2 &= 0.\end{aligned}$$

Logo, o seguinte sistema deve ser resolvido:

$$\begin{cases} \alpha|\langle 1|\psi\rangle|^2 - \delta|\langle 0|V|\psi\rangle|^2 = 0 \\ \alpha + \delta = 1 \end{cases},$$

o qual tem como solução

$$\alpha = \frac{|\langle 0|V|\psi\rangle|^2}{|\langle 0|V|\psi\rangle|^2 + |\langle 1|\psi\rangle|^2}, \quad \delta = \frac{|\langle 1|\psi\rangle|^2}{|\langle 0|V|\psi\rangle|^2 + |\langle 1|\psi\rangle|^2},$$

desde que $(|\langle 0|V|\psi\rangle|^2, |\langle 1|\psi\rangle|^2) \neq (0, 0)$. Assim, o ponto fixo está unicamente determinado para este caso.

Agora vamos à exceção: $|\langle 1|\psi\rangle|^2 = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle \stackrel{f}{=} |0\rangle$. Então, $|\langle 0|V|\psi\rangle|^2 = |\langle 0|V|0\rangle|^2 = 0 \Leftrightarrow \langle 0|V|0\rangle = 0$, ou seja, na base computacional:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{onde } |\eta| = |\theta| = 1.$$

Verifica-se facilmente que $V|0\rangle \stackrel{f}{=} |1\rangle$.

Voltando então ao traço parcial:

$$\begin{aligned}\text{Tr}_2(U(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})U^*) &= \alpha|\psi\rangle\langle\psi| + \delta V|\psi\rangle\langle\psi|V^* \\ &= \alpha|0\rangle\langle 0| + \delta|1\rangle\langle 1|,\end{aligned}$$

e aplicando a condição de consistência:

$$\begin{aligned}\alpha|0\rangle\langle 0| + \delta|1\rangle\langle 1| &= \hat{\rho} \\ &= \alpha|0\rangle\langle 0| + \beta|0\rangle\langle 1| + \bar{\beta}|1\rangle\langle 0| + \delta|1\rangle\langle 1|,\end{aligned}$$

concluimos que $\beta = 0$ e que α e δ são quaisquer números reais tais que $\alpha + \delta = 1$.

Resumindo:

- **(I.A)** Se $|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |0\rangle$ e $V = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$, onde $|\eta| = |\theta| = 1$, toda matriz da forma

$$\hat{\rho} = \alpha|0\rangle\langle 0| + \delta|1\rangle\langle 1|, \quad \alpha + \delta = 1 \quad (\text{A-1})$$

é um ponto fixo, ou seja, o ponto fixo não é único.

- **(I.B)** Em todos os outros casos, o ponto fixo do diagrama I é dado por:

$$\hat{\rho} = \frac{|\langle 0|V|\psi\rangle|^2}{|\langle 0|V|\psi\rangle|^2 + |\langle 1|\psi\rangle|^2}|\psi\rangle\langle\psi| + \frac{|\langle 1|\psi\rangle|^2}{|\langle 0|V|\psi\rangle|^2 + |\langle 1|\psi\rangle|^2}V|\psi\rangle\langle\psi|V^* \quad (\text{A-2})$$

A.1.2

Diagrama D.II

Na base computacional,

$$\begin{aligned}\text{Tr}_1(U(\hat{\rho} \otimes |\psi\rangle\langle\psi|)U^*) &= \text{Tr}(\hat{\rho})|\langle\psi|0\rangle|^2|0\rangle\langle 0| + \\ &+ \text{Tr}(V\hat{\rho})\langle 1|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle|1\rangle\langle 0| + \\ &+ \text{Tr}(\hat{\rho}V^*)\langle 0|\psi\rangle\langle\psi|1\rangle|0\rangle\langle 1| + \\ &+ \text{Tr}(V\hat{\rho}V^*)|\langle\psi|1\rangle|^2|1\rangle\langle 1|.\end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

Ao forçarmos que a condição de consistência seja satisfeita, obtemos então o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \alpha &= \text{Tr}(\hat{\rho})|\langle\psi|0\rangle|^2 \\ \beta &= \text{Tr}(\hat{\rho}V^*)\langle 0|\psi\rangle\langle\psi|1\rangle \\ \delta &= \text{Tr}(V\hat{\rho}V^*)|\langle\psi|1\rangle|^2, \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\hat{\rho}V^*) &= \langle 0|\hat{\rho}V^*|0\rangle + \langle 1|\hat{\rho}V^*|1\rangle \\ &= \alpha\langle 0|V^*|0\rangle + \beta\langle 1|V^*|0\rangle + \bar{\beta}\langle 0|V^*|1\rangle + \delta\langle 1|V^*|1\rangle\end{aligned}$$

Como $\hat{\rho}$ e $V\hat{\rho}V^*$ são matrizes de densidade (já que V é unitária), devem ter traço igual a 1. Logo, $\alpha = |\langle\psi|0\rangle|^2$, $\delta = |\langle\psi|1\rangle|^2$, e assim obtemos uma única equação a ser resolvida:

$$\beta = (|\langle\psi|0\rangle|^2\langle 0|V^*|0\rangle + \beta\langle 1|V^*|0\rangle + \bar{\beta}\langle 0|V^*|1\rangle + |\langle\psi|1\rangle|^2\langle 1|V^*|1\rangle) \langle 0|\psi\rangle\langle\psi|1\rangle,$$

a qual tem como solução:

$$\beta = \frac{c\bar{a} - \bar{a} - a\bar{b}}{\bar{b}b - \bar{c}c + \bar{c} + c - 1},$$

onde

$$\begin{aligned}a &= (|\langle\psi|0\rangle|^2\langle 0|V|0\rangle + |\langle\psi|1\rangle|^2\langle 1|V|1\rangle) \langle 1|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle \\ b &= \langle 1|V|0\rangle\langle 1|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle \\ c &= \langle 0|V|1\rangle\langle 1|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle,\end{aligned}$$

desde que o denominador seja diferente de zero.

Como V é uma matriz unitária 2×2 , temos que $|\langle 1|V|0\rangle|^2 = |\langle 0|V|1\rangle|^2$. Logo, o denominador de β pode ser simplificado, pois $\bar{b}b - \bar{c}c = 0$. Assim,

$$\beta = \frac{c\bar{a} - \bar{a} - a\bar{b}}{\bar{c} + c - 1},$$

e o ponto fixo está determinado no caso em que $\bar{c} + c - 1 \neq 0$.

Vamos então analisar a exceção:

$$\bar{c} + c - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\text{Re}(c) = 1 \Leftrightarrow 2\text{Re}(\langle 0|V|1\rangle\langle 1|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle) = 1.$$

Como $|\psi\rangle$ é um vetor normalizado, temos que $|\langle 1|\psi\rangle|^2 + |\langle 0|\psi\rangle|^2 = 1$. Logo, $|\langle 1|\psi\rangle||\langle\psi|0\rangle| \leq \frac{1}{2}$ (Isto vem do fato de que ao maximizarmos a função xy sujeita às restrições $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, obtemos $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$). Além disso, como V é uma matriz unitária, $|\langle 0|V|1\rangle| \leq 1$. Estas desigualdades implicam o seguinte:

$$\text{Re}(\langle 0|V|1\rangle\langle 1|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle) \leq \frac{1}{2}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re}(\langle 0|V|1\rangle\langle 1|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle) = 1 &\Leftrightarrow \langle 0|V|1\rangle\langle 1|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} |\langle 0|V|1\rangle| = 1 \\ |\langle 1|\psi\rangle| = |\langle\psi|0\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} V = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}, \text{ onde } |\eta| = |\theta| = 1 \\ \langle 1|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \langle\psi|0\rangle = \frac{\nu}{\sqrt{2}}, \text{ onde } |\nu| = 1 \end{cases},
\end{aligned}$$

onde uma fase global foi aplicada a $|\psi\rangle$. Além disso, usando que $\langle 0|V|1\rangle\langle 1|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle = \frac{1}{2}$, conclui-se facilmente que $\nu = \bar{\eta}$.

Logo, o caso excepcional ocorre quando:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |\psi\rangle \stackrel{f}{=} \frac{|1\rangle + \eta|0\rangle}{\sqrt{2}}, \quad \text{onde } |\eta| = |\theta| = 1.$$

Vamos então voltar ao traço parcial para calcular o ponto fixo do diagrama II quando V e $|\psi\rangle$ são da forma dada acima:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}_1(U(\hat{\rho} \otimes |\psi\rangle\langle\psi|)U^*) &= \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + (\bar{\beta}\eta + \beta\theta)\frac{\bar{\eta}}{2}|1\rangle\langle 0| + \\
&+ (\beta\bar{\eta} + \bar{\beta}\theta)\frac{\eta}{2}|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|.
\end{aligned}$$

Logo, a condição de consistência é satisfeita se $\alpha = \delta = \frac{1}{2}$ e $\beta = (\beta\bar{\eta} + \bar{\beta}\theta)\frac{\eta}{2}$, ou seja,

$$\beta = \pm|\beta|\sqrt{\eta\bar{\theta}}.$$

Há ainda uma restrição óbvia sobre $|\beta|$: como $\alpha\delta - |\beta|^2 \geq 0$, segue que $|\beta| \leq \frac{1}{2}$, e assim está determinado o ponto fixo neste caso excepcional.

Resumindo:

- **(II.A)** Se $|\psi\rangle \stackrel{f}{=} \frac{|1\rangle + \eta|0\rangle}{\sqrt{2}}$ e $V = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$, onde $|\eta| = |\theta| = 1$, o ponto fixo é dado por:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \beta|0\rangle\langle 1| + \bar{\beta}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| \quad (\text{A-4})$$

onde $\beta = \pm|\beta|\sqrt{\eta\bar{\theta}}$ e $|\beta| \leq \frac{1}{2}$; ou seja, para um tal $|\psi\rangle$ o ponto fixo não é único.

- **(II.B)** Em todos os outros casos, o ponto fixo do diagrama II é dado por:

$$\hat{\rho} = |\langle\psi|0\rangle|^2|0\rangle\langle 0| + \beta|0\rangle\langle 1| + \bar{\beta}|1\rangle\langle 0| + |\langle\psi|1\rangle|^2|1\rangle\langle 1| \quad (\text{A-5})$$

onde

$$\beta = \frac{c\bar{a} - \bar{a} - a\bar{b}}{\bar{c} + c - 1}$$

e

$$\begin{aligned} a &= (|\langle\psi|0\rangle|^2\langle 0|V|0\rangle + |\langle\psi|1\rangle|^2\langle 1|V|1\rangle) \langle 1|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle \\ b &= \langle 1|V|0\rangle\langle 1|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle \\ c &= \langle 0|V|1\rangle\langle 1|\psi\rangle\langle\psi|0\rangle. \end{aligned}$$

A.1.3

Diagrama D.III

Temos

$$\text{Tr}_2(U(\hat{\rho} \otimes |\psi\rangle\langle\psi|)U^*) = \hat{\rho}|\langle\psi|0\rangle|^2 + V\hat{\rho}V^*|\langle\psi|1\rangle|^2$$

A condição de consistência é então escrita como:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}|\langle\psi|0\rangle|^2 + V\hat{\rho}V^*|\langle\psi|1\rangle|^2 &= \hat{\rho} \\ \Leftrightarrow \hat{\rho}(1 - |\langle\psi|1\rangle|^2) + V\hat{\rho}V^*|\langle\psi|1\rangle|^2 &= \hat{\rho} \\ \Leftrightarrow V\hat{\rho} &= \hat{\rho}V, \end{aligned}$$

desde que $|\langle\psi|1\rangle|^2 \neq 0$, ou seja, $|\psi\rangle \stackrel{f}{\neq} |0\rangle$ (observe que, se $|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |0\rangle$, então a condição de consistência se resume a $\hat{\rho} = \hat{\rho}$, ou seja, a coleção de pontos fixos é a esfera de Bloch inteira).

Se V for um múltiplo da identidade, a condição acima é obviamente satisfeita, e então todos os pontos da esfera de Bloch são pontos fixos do diagrama III. Se este não for o caso, então $V\hat{\rho} = \hat{\rho}V$ implica que $\hat{\rho}$ é diagonal na base $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$ de autovetores de V . Logo, $\hat{\rho} = \alpha|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + \delta|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|$.

Resumindo:

- **(III.A)** Se $|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |0\rangle$, todos os pontos da esfera de Bloch são pontos fixos do diagrama III.
- **(III.B)** Se $|\psi\rangle \stackrel{f}{\neq} |0\rangle$ e V é múltiplo da identidade, todos os pontos da esfera de Bloch são pontos fixos do diagrama III.
- **(III.C)** Em todos os outros casos, os pontos fixos são dados por:

$$\hat{\rho} = \alpha|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + \delta|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|, \quad (\text{A-6})$$

onde $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle$ são os autovetores de V e $\alpha + \delta = 1$.

A.1.4

Diagrama D.IV

Tomando $\hat{\rho}$ na base computacional, temos que

$$\text{Tr}_1(U(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})U^*) = \alpha|0\rangle\langle 0| + \langle\psi|V^*|\psi\rangle|0\rangle\langle 1| + \langle\psi|V|\psi\rangle|1\rangle\langle 0| + \delta|1\rangle\langle 1|.$$

Para que a condição de consistência seja satisfeita, devemos resolver a seguinte equação:

$$\beta = \beta\langle\psi|V^*|\psi\rangle,$$

a qual só tem solução única (a saber, $\beta = 0$) se tivermos $\langle\psi|V^*|\psi\rangle \neq 1$, ou seja, se $|\psi\rangle$ não é autovetor de V associado ao autovalor 1.

Logo, concluindo:

- (IV.A) Se $|\psi\rangle$ é autovetor de V associado ao autovalor 1, então todos os pontos da esfera de Bloch são pontos fixos do diagrama IV.
- (IV.B) Em todos os outros casos, os pontos fixos são dados por:

$$\hat{\rho} = \alpha|0\rangle\langle 0| + \delta|1\rangle\langle 1|, \quad (\text{A-7})$$

onde $\alpha + \delta = 1$.

A.2

Cálculo de ρ_{out} para os Diagramas de Deutsch

A partir das condições de consistência dadas no início deste capítulo, calcularemos ρ_{out} em função de $\hat{\rho}$ geral, ou seja, não utilizaremos as expressões de ponto fixo que foram obtidas na seção anterior.

A.2.1

Diagrama D.I

Temos que

$$\begin{aligned} \rho_{\text{out}} &= \text{Tr}_1[(I \otimes P_0 + V \otimes P_1)(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes \hat{\rho})(I \otimes P_0 + V^* \otimes P_1)] \\ &= \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|) P_0 \hat{\rho} P_0 + \text{Tr}(V|\psi\rangle\langle\psi|) P_1 \hat{\rho} P_0 + \\ &\quad + \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|V^*) P_0 \hat{\rho} P_1 + \text{Tr}(V|\psi\rangle\langle\psi|V^*) \otimes P_1 \hat{\rho} P_1 \end{aligned}$$

E então:

$$\rho_{\text{out}} = (P_0 + \langle\psi|V|\psi\rangle P_1) \hat{\rho} (P_0 + \langle\psi|V^*|\psi\rangle P_1). \quad (\text{A-8})$$

A.2.2**Diagrama D.II**

O traço parcial é o mesmo que foi utilizado no cálculo de ponto fixo do diagrama III. Segue então que:

$$\rho_{\text{out}} = |\langle 0|\psi\rangle|^2 \hat{\rho} + |\langle 1|\psi\rangle|^2 V \hat{\rho} V^*. \quad (\text{A-9})$$

A.2.3**Diagrama D.III**

O traço parcial é o mesmo que foi utilizado no cálculo de ponto fixo do diagrama II. Segue então que:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{out}} = & |\langle \psi|0\rangle|^2 |0\rangle\langle 0| + \text{Tr}(V \hat{\rho}) \langle 1|\psi\rangle \langle \psi|0\rangle |1\rangle\langle 0| + \\ & + \text{Tr}(\hat{\rho} V^*) \langle 0|\psi\rangle \langle \psi|1\rangle |0\rangle\langle 1| + |\langle \psi|1\rangle|^2 |1\rangle\langle 1|. \end{aligned} \quad (\text{A-10})$$

A.2.4**Diagrama D.IV**

O traço parcial é o mesmo que foi utilizado no cálculo de ponto fixo do diagrama I. Segue então que:

$$\rho_{\text{out}} = \langle 0|\hat{\rho}|0\rangle |\psi\rangle\langle \psi| + \langle 1|\hat{\rho}|1\rangle V |\psi\rangle\langle \psi| V^*. \quad (\text{A-11})$$

A.3**Para quais estados iniciais temos ρ_{out} puro?**

Analisaremos agora sob quais condições temos ρ_{out} puro. Ao contrário da seção anterior, $\hat{\rho}$ não será uma matriz de densidade qualquer, mas sim um ponto fixo do diagrama em questão.

Utilizaremos o seguinte critério: ρ_{out} é puro se e somente se $\rho_{\text{out}}^2 = \rho_{\text{out}}$. Para matrizes 2 x 2, isto é equivalente a $\det(\rho_{\text{out}}) = 0$.

A.3.1**Diagrama D.I**

Caso (1) Se $V|\psi\rangle = \mu|\psi\rangle$, segue por (A-2) que $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle \psi|$. Substituindo este resultado em (A-8), temos que $\rho_{\text{out}} = (P_0 + \mu P_1)|\psi\rangle\langle \psi|(P_0 + \bar{\mu} P_1)$, o qual já é puro.

Caso (2) Se $V|\psi\rangle \neq \mu|\psi\rangle$ e $\langle \psi|V|\psi\rangle = 0$, então a equação (A-8) pode ser reescrita como $\rho_{\text{out}} = P_0 \hat{\rho} P_0 + P_1 \hat{\rho} P_1 = \alpha |0\rangle\langle 0| + \delta |1\rangle\langle 1|$, ou seja, ρ_{out} é uma

combinação convexa de dois pontos extremos da esfera de Bloch, e portanto só pode ser puro se $\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$. Vamos verificar o que isto impõe sobre $|\psi\rangle$.

Se o ponto fixo for da forma (I.A), sabemos que ele não é único (dado pela eq.A-1). Se $\alpha = 1$, então $\hat{\rho} = \rho_{\text{out}} = |0\rangle\langle 0|$, e se $\alpha = 0$, então $\hat{\rho} = \rho_{\text{out}} = |1\rangle\langle 1|$.

No caso em que o ponto fixo é da forma (I.B), a única restrição sobre $|\psi\rangle$ é que não podemos ter $|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |0\rangle$ e $V|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |1\rangle$ ao mesmo tempo. De acordo com a equação (A-2), $\alpha = 1$ implica que $|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |0\rangle$, e então a hipótese $\langle\psi|V|\psi\rangle = 0$ é satisfeita se e somente se $V|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |1\rangle$, contradição. Analogamente, $\alpha = 0$ implica que $V|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |1\rangle$, e então a hipótese $\langle\psi|V|\psi\rangle = 0$ é satisfeita se e somente se $|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |0\rangle$, contradição de novo.

Caso (3) Se $V|\psi\rangle \neq \mu|\psi\rangle$ e $\langle\psi|V|\psi\rangle \neq 0$, então ρ_{out} é dado pela equação (A-8). Na base computacional, podemos escrever

$$\rho_{\text{out}} = \begin{pmatrix} \alpha & \langle\psi|V^*|\psi\rangle\beta \\ \langle\psi|V|\psi\rangle\bar{\beta} & \delta \end{pmatrix}$$

Para descobrir em quais situações ρ_{out} é puro, vamos forçar que o determinante de ρ_{out} seja igual a zero, ou seja, $\alpha(1 - \alpha) - |\langle\psi|V|\psi\rangle|^2|\beta|^2 = 0$. De acordo com as hipóteses deste caso, temos que $|\langle\psi|V|\psi\rangle|^2$ não pode ser 0 nem 1. Logo, duas soluções óbvias seriam $\alpha = 1, \beta = 0$, e $\alpha = 0, \beta = 0$. Se nenhum destes casos ocorre, teríamos

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4|\langle\psi|V|\psi\rangle|^2|\beta|^2}}{2}.$$

Como $\hat{\rho}$ é uma matriz positiva, segue que $\alpha(1 - \alpha) - |\beta|^2 \geq 0$. Logo, ao substituirmos o α encontrado:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4|\langle\psi|V|\psi\rangle|^2|\beta|^2}}{2} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4|\langle\psi|V|\psi\rangle|^2|\beta|^2}}{2} \right) - |\beta|^2 \geq 0 \\ \Rightarrow & |\langle\psi|V|\psi\rangle|^2|\beta|^2 - |\beta|^2 \geq 0 \\ \Rightarrow & |\langle\psi|V|\psi\rangle|^2 \geq 1 \\ \Rightarrow & |\langle\psi|V|\psi\rangle|^2 = 1, \end{aligned}$$

ou seja, $|\psi\rangle$ é autovetor de V , contradição.

Vamos verificar o que as soluções $\alpha = 1, \beta = 0$ e $\alpha = 0, \beta = 0$ impõem sobre $|\psi\rangle$. O caso em que $\hat{\rho}$ é da forma (I.A) será descartado, pois $\langle\psi|V|\psi\rangle \stackrel{f}{=} \langle 0|1\rangle = 0$, contradição. Já para o caso (I.B), a análise é análoga a que foi feita anteriormente: de acordo com a equação (A-2), $\alpha = 1$ implica que $|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |0\rangle$, e então $\hat{\rho} = \rho_{\text{out}} = |0\rangle\langle 0|$. Se $\alpha = 0$, então $V|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |1\rangle$, e assim

$$\hat{\rho} = \rho_{\text{out}} = |0\rangle\langle 0|.$$

Resumindo, ρ_{out} é puro nos seguintes casos:

- Se $V|\psi\rangle = \mu|\psi\rangle$, então $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ e $\rho_{\text{out}} = (P_0 + \mu P_1)|\psi\rangle\langle\psi|(P_0 + \bar{\mu}P_1)$
- Se $|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |0\rangle$ e $V|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |1\rangle$, então $\hat{\rho} = |0\rangle\langle 0|$ implica que $\rho_{\text{out}} = |0\rangle\langle 0|$, e $\hat{\rho} = |1\rangle\langle 1|$ implica que $\rho_{\text{out}} = |1\rangle\langle 1|$
- Se $|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |0\rangle$, $V|\psi\rangle \stackrel{f}{\neq} |0\rangle$ e $V|\psi\rangle \stackrel{f}{\neq} |1\rangle$, então $\hat{\rho} = \rho_{\text{out}} = |0\rangle\langle 0|$
- Se $|\psi\rangle \stackrel{f}{\neq} |0\rangle$, $|\psi\rangle \stackrel{f}{\neq} |1\rangle$ e $V|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |1\rangle$, então $\hat{\rho} = \rho_{\text{out}} = |1\rangle\langle 1|$

A.3.2

Diagrama D.II

Caso (1) Se $|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |0\rangle$, então pelas equações (A-5) e (A-9), temos que $\hat{\rho} = \rho_{\text{out}} = |0\rangle\langle 0|$.

Caso (2) Se $|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |1\rangle$, então as mesmas equações nos mostram que $\hat{\rho} = |1\rangle\langle 1|$ e $\rho_{\text{out}} = V|1\rangle\langle 1|V^*$.

Caso (3) Se $|\psi\rangle \stackrel{f}{\neq} |0\rangle$, $|\psi\rangle \stackrel{f}{\neq} |1\rangle$, como $|\langle 0|\psi\rangle|^2$ e $|\langle 1|\psi\rangle|^2$ são dois números reais, positivos e que somam 1, segue por convexidade que $\rho_{\text{out}} = |\xi\rangle\langle\xi|$ se e somente se $\hat{\rho} = V\hat{\rho}V^* = |\xi\rangle\langle\xi|$, ou seja, $V|\xi\rangle = \mu|\xi\rangle$. Voltando à equação (A-3), temos então que $|\xi\rangle\langle\xi| = (P_0 + \mu P_1)|\psi\rangle\langle\psi|(P_0 + \bar{\mu}P_1)$. Logo, $|\psi\rangle = (P_0 + \bar{\mu}P_1)|\xi\rangle$.

Resumindo, ρ_{out} é puro nos seguintes casos:

- Se $|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |0\rangle$, temos $\hat{\rho} = |0\rangle\langle 0|$ e $\rho_{\text{out}} = |0\rangle\langle 0|$.
- Se $|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |1\rangle$, temos $\hat{\rho} = |1\rangle\langle 1|$ e $\rho_{\text{out}} = V|1\rangle\langle 1|V^*$.
- Se $|\psi\rangle = (P_0 + \bar{\mu}P_1)|\xi\rangle$ e $V|\xi\rangle = \mu|\xi\rangle$, então $\hat{\rho} = \rho_{\text{out}} = (P_0 + \mu P_1)|\psi\rangle\langle\psi|(P_0 + \bar{\mu}P_1)$.

A.3.3**Diagrama D.III**

Caso (1) Se $|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |0\rangle$, segue pela equação (A-10) que $\rho_{\text{out}} = |0\rangle\langle 0|$.

Caso (2) Se $|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |1\rangle$, segue pela mesma equação que $\rho_{\text{out}} = |1\rangle\langle 1|$.

Caso (3) Se $|\psi\rangle \stackrel{f}{\neq} |0\rangle$, $|\psi\rangle \stackrel{f}{\neq} |1\rangle$, pela equação (A-6) temos que $\hat{\rho}$ é diagonal na base de autovetores $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$ de V , com autovalores α e δ . Sejam μ_1, μ_2 os autovalores de V . Então $V = \mu_1|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + \mu_2|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|$. Segue que $\text{Tr}(V\hat{\rho}) = \alpha\mu_1 + \delta\mu_2$ e $\text{Tr}(\hat{\rho}V^*) = \alpha\bar{\mu}_1 + \delta\bar{\mu}_2$. Como μ_1 e μ_2 são unimodulares, podemos escrevê-los como $\mu_1 = \gamma a$, $\mu_2 = \gamma \bar{a}$, onde $|\gamma| = |a| = 1$. Pela equação (A-10) temos então que:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{out}} = & P_0|\psi\rangle\langle\psi|P_0 + \gamma(\alpha a + \delta \bar{a})P_1|\psi\rangle\langle\psi|P_0 + \\ & + \bar{\gamma}(\alpha \bar{a} + \delta a)P_0|\psi\rangle\langle\psi|P_1 + P_1|\psi\rangle\langle\psi|P_1, \end{aligned}$$

o qual deve ser um estado puro. Vamos então obter condições sobre α e δ para que isto aconteça. Forçando $\det(\rho_{\text{out}}) = 0$, chegamos a $|\alpha a + \delta \bar{a}|^2 = 1$. Como $|a| = 1$ e $\alpha + \delta = 1$, segue por convexidade que $\alpha = 0$ ou $\delta = 0$. Se $\alpha = 0$, então a equação (A-6) é escrita como $\hat{\rho} = |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|$, e temos:

$$\rho_{\text{out}} = P_0|\psi\rangle\langle\psi|P_0 + \gamma \bar{a}P_1|\psi\rangle\langle\psi|P_0 + \bar{\gamma}aP_0|\psi\rangle\langle\psi|P_1 + P_1|\psi\rangle\langle\psi|P_1.$$

Se $\delta = 0$, então a equação (A-6) é escrita como $\hat{\rho} = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|$, e temos:

$$\rho_{\text{out}} = P_0|\psi\rangle\langle\psi|P_0 + \gamma aP_1|\psi\rangle\langle\psi|P_0 + \bar{\gamma} \bar{a}P_0|\psi\rangle\langle\psi|P_1 + P_1|\psi\rangle\langle\psi|P_1.$$

Resumindo, ρ_{out} é puro nos seguintes casos:

- Se $|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |0\rangle$, $\rho_{\text{out}} = |0\rangle\langle 0|$;
- Se $|\psi\rangle \stackrel{f}{=} |1\rangle$, $\rho_{\text{out}} = |1\rangle\langle 1|$;
- Se $|\psi\rangle \stackrel{f}{\neq} |0\rangle$, $|\psi\rangle \stackrel{f}{\neq} |1\rangle$, então

$$\rho_{\text{out}} = \begin{pmatrix} a\langle 0|\psi\rangle \\ \gamma\langle 1|\psi\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}\langle\psi|0\rangle & \bar{\gamma}\langle\psi|1\rangle \end{pmatrix}$$

caso $\hat{\rho} = |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|$; e

$$\rho_{\text{out}} = \begin{pmatrix} \bar{a}\langle 0|\psi\rangle \\ \gamma\langle 1|\psi\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\langle\psi|0\rangle & \bar{\gamma}\langle\psi|1\rangle \end{pmatrix}$$

caso $\hat{\rho} = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|$, onde γa e $\gamma \bar{a}$ são os autovalores de V , e $|\varphi_1\rangle$ e $|\varphi_2\rangle$ são os respectivos autovetores.

A.3.4

Diagrama D.IV

Pela equação (A-11), temos que ρ_{out} é combinação convexa de dois estados puros. Logo, ρ_{out} é puro se e somente se $\rho_{\text{out}} = |\psi\rangle\langle\psi| = V|\psi\rangle\langle\psi|V^*$ (ou seja, $|\psi\rangle$ é autovetor de V); $\langle 0|\hat{\rho}|0\rangle = 0$ (o que implica que $\hat{\rho} = |1\rangle\langle 1|$, pela equação (A-7)), e então $\rho_{\text{out}} = V|\psi\rangle\langle\psi|V^*$; $\langle 1|\hat{\rho}|1\rangle = 0$ (o que implica que $\hat{\rho} = |0\rangle\langle 0|$), e então $\rho_{\text{out}} = |\psi\rangle\langle\psi|$.

Resumindo, ρ_{out} é puro nos seguintes casos:

- Se $|\psi\rangle$ é autovetor de V , então $\rho_{\text{out}} = |\psi\rangle\langle\psi|$.
- Se $|\psi\rangle$ não é autovetor de V e $\hat{\rho} = |1\rangle\langle 1|$, então $\rho_{\text{out}} = V|\psi\rangle\langle\psi|V^*$.
- Se $|\psi\rangle$ não é autovetor de V e $\hat{\rho} = |0\rangle\langle 0|$, então $\rho_{\text{out}} = |\psi\rangle\langle\psi|$.

A.4

Verificação de ortogonalidade entre os ρ_{out}

Neste capítulo, procuraremos saber quais pares de vetores não-ortogonais cada um dos diagramas de Deutsch consegue distinguir. Dados um diagrama e uma matriz V , se o estado inicial do sistema for $|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \otimes \hat{\rho}_i$, então o estado final é $\hat{\rho}_i \otimes \rho_{\text{out},i}$, $i = 1, 2$. A condição para que $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ sejam distinguidos é a seguinte: $\rho_{\text{out},1}$ e $\rho_{\text{out},2}$ devem ser puros e ortogonais entre si.

A.4.1 Diagrama D.I

No capítulo anterior, identificamos as seguintes classes de restrições sobre $|\psi\rangle$ e $\hat{\rho}$ para que ρ_{out} seja puro:

$$(A) \quad \begin{cases} V|\psi\rangle = \mu|\psi\rangle \\ \hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \end{cases} \Rightarrow \rho_{\text{out}} = (P_0 + \mu P_1)|\psi\rangle\langle\psi|(P_0 + \bar{\mu}P_1)$$

$$(B) \quad \begin{cases} |\psi\rangle = \lambda|0\rangle \\ V|\psi\rangle = \theta|1\rangle \\ \hat{\rho} = |0\rangle\langle 0| \end{cases} \Rightarrow \rho_{\text{out}} = |0\rangle\langle 0|$$

$$(C) \quad \begin{cases} |\psi\rangle = \lambda|0\rangle \\ V|\psi\rangle = \theta|1\rangle \\ \hat{\rho} = |1\rangle\langle 1| \end{cases} \Rightarrow \rho_{\text{out}} = |1\rangle\langle 1|$$

$$(D) \quad \begin{cases} |\psi\rangle = \lambda|0\rangle \\ V|\psi\rangle \neq \mu|0\rangle \\ V|\psi\rangle \neq \theta|1\rangle \\ \hat{\rho} = |0\rangle\langle 0| \end{cases} \Rightarrow \rho_{\text{out}} = |0\rangle\langle 0|$$

$$(E) \quad \begin{cases} V|\psi\rangle = \theta|1\rangle \\ |\psi\rangle \neq \lambda|0\rangle \\ |\psi\rangle \neq \nu|1\rangle \\ \hat{\rho} = |1\rangle\langle 1| \end{cases} \Rightarrow \rho_{\text{out}} = |1\rangle\langle 1|$$

Os vetores que queremos distinguir, $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, podem pertencer a uma mesma classe ou a classes distintas.

– Se $|\psi_1\rangle \in (A)$ e $|\psi_2\rangle \in (A)$:

Caso trivial, pois $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ são autovetores de V , logo já são ortogonais entre si.

– Se $|\psi_1\rangle \in (A)$ e $|\psi_2\rangle \in (B)$:

Temos

$$\begin{aligned} \rho_{\text{out},1} &= (P_0 + \mu P_1)|\psi_1\rangle\langle\psi_1|(P_0 + \bar{\mu}P_1) \\ \rho_{\text{out},2} &= |0\rangle\langle 0| \end{aligned}$$

Forçando a ortogonalidade:

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi_1 | (P_0 + \bar{\mu}P_1) | 0 \rangle = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} (P_0 + \bar{\mu}P_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\
 \Leftrightarrow & a = 0 \\
 \Leftrightarrow & |\psi_1\rangle = \eta|1\rangle
 \end{aligned}$$

Logo, como $|\psi_2\rangle = |0\rangle$, este é um caso trivial.

– Se $|\psi_1\rangle \in (A)$ e $|\psi_2\rangle \in (C)$:

Temos

$$\begin{aligned}
 \rho_{\text{out},1} &= (P_0 + \mu P_1) |\psi_1\rangle \langle \psi_1| (P_0 + \bar{\mu} P_1) \\
 \rho_{\text{out},2} &= |1\rangle \langle 1|
 \end{aligned}$$

Forçando a ortogonalidade:

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi_1 | (P_0 + \bar{\mu}P_1) | 1 \rangle = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} (P_0 + \bar{\mu}P_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\
 \Leftrightarrow & b\bar{\mu} = 0 \\
 \Leftrightarrow & b = 0 \\
 \Leftrightarrow & |\psi_1\rangle = \nu|0\rangle
 \end{aligned}$$

Logo, como $|\psi_2\rangle = |0\rangle$, este é um caso trivial.

– Se $|\psi_1\rangle \in (A)$ e $|\psi_2\rangle \in (D)$:

Caso trivial, exatamente como o caso em que $|\psi_1\rangle \in (A)$ e $|\psi_2\rangle \in (B)$.

– Se $|\psi_1\rangle \in (A)$ e $|\psi_2\rangle \in (E)$:

De acordo com o caso em que $|\psi_1\rangle \in (A)$ e $|\psi_2\rangle \in (C)$, teremos $|\psi_1\rangle = \nu|0\rangle$. Como $|\psi_1\rangle \in (A)$, segue então que $V|0\rangle = \mu|0\rangle$, ou seja, $|0\rangle$ é um autovetor de V . Como V é unitária, podemos afirmar que $|1\rangle$ também

é autovetor. Seguindo a hipótese da classe (E) sobre a matriz V , temos que $V|\psi\rangle = \theta|1\rangle$. Logo, usando as informações anteriores, afirmamos que $|\psi_2\rangle = \eta|1\rangle$, contrariando a hipótese $|\psi_2\rangle \neq \nu|1\rangle$.

– Se $|\psi_1\rangle \in (B)$ e $|\psi_2\rangle \in (B)$:

Caso trivial, pois $|\psi_1\rangle = \lambda|0\rangle$ e $|\psi_2\rangle = \nu|0\rangle$.

– Se $|\psi_1\rangle \in (B)$ e $|\psi_2\rangle \in (C)$:

Caso trivial, pois $|\psi_1\rangle = \lambda|0\rangle$ e $|\psi_2\rangle = \nu|0\rangle$.

– Se $|\psi_1\rangle \in (B)$ e $|\psi_2\rangle \in (D)$:

Caso trivial, pois $|\psi_1\rangle = \lambda|0\rangle$ e $|\psi_2\rangle = \nu|0\rangle$.

– Se $|\psi_1\rangle \in (B)$ e $|\psi_2\rangle \in (E)$:

Pelas hipóteses da classe (B), temos que $|\psi_1\rangle = \lambda|0\rangle$ e $V|0\rangle = \theta|1\rangle$. Já uma das hipóteses da classe (E) é que $V|\psi_2\rangle = \theta|1\rangle$. Logo, segue que $|\psi_2\rangle = \nu|0\rangle$, e obtemos um caso trivial.

– Se $|\psi_1\rangle \in (C)$ e $|\psi_2\rangle \in (C)$:

Caso trivial, pois $|\psi_1\rangle = \lambda|0\rangle$ e $|\psi_2\rangle = \nu|0\rangle$.

– Se $|\psi_1\rangle \in (C)$ e $|\psi_2\rangle \in (D)$:

Caso trivial, pois $|\psi_1\rangle = \lambda|0\rangle$ e $|\psi_2\rangle = \nu|0\rangle$.

– Se $|\psi_1\rangle \in (C)$ e $|\psi_2\rangle \in (E)$:

Este caso não se aplica, pois $\rho_{\text{out},1} = \rho_{\text{out},2} = |1\rangle\langle 1|$, logo nunca serão ortogonais entre si.

– Se $|\psi_1\rangle \in (D)$ e $|\psi_2\rangle \in (D)$:

Caso trivial, pois $|\psi_1\rangle = \lambda|0\rangle$ e $|\psi_2\rangle = \nu|0\rangle$.

– Se $|\psi_1\rangle \in (D)$ e $|\psi_2\rangle \in (E)$:

Este é um caso que realmente consegue distinguir dois vetores não-ortogonais: temos que $\rho_{\text{out},1} = |0\rangle\langle 0|$, $\rho_{\text{out},2} = |1\rangle\langle 1|$ (obviamente ortogonais entre si) e as hipóteses sobre $|\psi\rangle$ e V dadas nas classes (D) e (E) não nos levam a nenhuma contradição ou trivialidade.

– Se $|\psi_1\rangle \in (E)$ e $|\psi_2\rangle \in (E)$:

Este caso não se aplica, pois $\rho_{\text{out},1} = \rho_{\text{out},2} = |1\rangle\langle 1|$, logo nunca serão ortogonais entre si.

Concluindo: o diagrama I de Deutsch só consegue distinguir vetores não-ortogonais $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ tais que

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \lambda|0\rangle \\ |\psi_2\rangle &= \theta V^*|1\rangle, \end{aligned}$$

que é exatamente o caso que Brun tratou em seu artigo.

A.4.2

Diagrama D.II

No capítulo anterior, identificamos as seguintes classes de restrições sobre $|\psi\rangle$ e $\hat{\rho}$ para que ρ_{out} seja puro:

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & \begin{cases} |\psi\rangle = \lambda|0\rangle \\ \hat{\rho} = |0\rangle\langle 0| \end{cases} \Rightarrow \rho_{\text{out}} = |0\rangle\langle 0| \\ \text{(B)} \quad & \begin{cases} |\psi\rangle = \theta|1\rangle \\ \hat{\rho} = |1\rangle\langle 1| \end{cases} \Rightarrow \rho_{\text{out}} = V|1\rangle\langle 1|V^* \\ \text{(C)} \quad & \begin{cases} |\psi\rangle = (P_0 + \bar{\nu}P_1)|\xi\rangle \\ V|\xi\rangle = \nu|\xi\rangle \\ \hat{\rho} = |\xi\rangle\langle \xi| \end{cases} \Rightarrow \rho_{\text{out}} = |\xi\rangle\langle \xi| \end{aligned}$$

Os vetores que queremos distinguir, $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, podem pertencer a uma mesma classe ou a classes distintas.

– Se $|\psi_1\rangle \in (A)$ e $|\psi_2\rangle \in (A)$:

Caso trivial, pois $|\psi_1\rangle = \lambda|0\rangle$ e $|\psi_2\rangle = \nu|0\rangle$.

– Se $|\psi_1\rangle \in (A)$ e $|\psi_2\rangle \in (B)$:

Caso trivial, pois $|\psi_1\rangle = \lambda|0\rangle$ e $|\psi_2\rangle = \theta|1\rangle$.

– Se $|\psi_1\rangle \in (A)$ e $|\psi_2\rangle \in (C)$:

Temos

$$\begin{aligned} \rho_{\text{out},1} &= |0\rangle\langle 0| \\ \rho_{\text{out},2} &= |\xi\rangle\langle \xi| \end{aligned}$$

Forçando a ortogonalidade:

$$\begin{aligned}\langle 0|\xi\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow |\xi\rangle &= \theta|1\rangle\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}|\psi_2\rangle &= (P_0 + \bar{\nu}P_1)|\xi\rangle \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\nu}\theta \end{pmatrix} \\ &= \mu|1\rangle,\end{aligned}$$

e então, como $|\psi_1\rangle = \lambda|0\rangle$, chegamos a um caso trivial.

– Se $|\psi_1\rangle \in (B)$ e $|\psi_2\rangle \in (B)$:

Caso trivial, pois $|\psi_1\rangle = \theta|1\rangle$ e $|\psi_2\rangle = \nu|1\rangle$.

– Se $|\psi_1\rangle \in (B)$ e $|\psi_2\rangle \in (C)$:

Temos

$$\begin{aligned}\rho_{\text{out},1} &= V|1\rangle\langle 1|V^* \\ \rho_{\text{out},2} &= |\xi\rangle\langle \xi|\end{aligned}$$

Forçando a ortogonalidade (e lembrando o fato de que $V|\xi\rangle = \nu|\xi\rangle$):

$$\begin{aligned}\langle 1|V^*|\xi\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \bar{\nu}\langle 1|\xi\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle 1|\xi\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow |\xi\rangle &= \lambda|0\rangle,\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 |\psi_2\rangle &= (P_0 + \bar{\nu}P_1)|\xi\rangle \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \lambda|0\rangle,
 \end{aligned}$$

e então, como $|\psi_1\rangle = \theta|1\rangle$, chegamos a um caso trivial.

– Se $|\psi_1\rangle \in (C)$ e $|\psi_2\rangle \in (C)$:

Temos que

$$\begin{aligned}
 |\psi_1\rangle &= (P_0 + \bar{\nu}P_1)|\xi_1\rangle \\
 |\psi_2\rangle &= (P_0 + \bar{\nu}P_1)|\xi_2\rangle,
 \end{aligned}$$

onde $|\xi_1\rangle$ e $|\xi_2\rangle$ são os autovetores de V .

Como V é unitária, $|\xi_1\rangle$ e $|\xi_2\rangle$ são ortogonais entre si. Além disso, $P_0 + \bar{\nu}P_1$ também é uma matriz unitária, logo preserva a ortogonalidade entre os vetores. Ou seja, $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ já são ortogonais entre si, nos levando a um caso trivial.

Concluindo: o diagrama II de Deutsch não consegue distinguir quaisquer par de vetores não-ortogonais.

A.4.3

Diagrama D.III

No capítulo anterior, identificamos as seguintes classes de restrições sobre $|\psi\rangle$ e $\hat{\rho}$ para que ρ_{out} seja puro:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\psi\rangle = \lambda|0\rangle \end{array} \right. \Rightarrow \rho_{\text{out}} = |0\rangle\langle 0|$$

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\psi\rangle = \theta|1\rangle \end{array} \right. \Rightarrow \rho_{\text{out}} = |1\rangle\langle 1|$$

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\psi\rangle \neq \lambda|0\rangle \\ |\psi\rangle \neq \theta|1\rangle \\ \hat{\rho} = |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| \end{array} \right. \Rightarrow \rho_{\text{out}} = \begin{pmatrix} a\langle 0|\psi\rangle \\ \gamma\langle 1|\psi\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}\langle\psi|0\rangle & \bar{\gamma}\langle\psi|1\rangle \end{pmatrix}$$

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\psi\rangle \neq \lambda|0\rangle \\ |\psi\rangle \neq \theta|1\rangle \\ \hat{\rho} = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| \end{array} \right. \Rightarrow \rho_{\text{out}} = \begin{pmatrix} \bar{a}\langle 0|\psi\rangle \\ \gamma\langle 1|\psi\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\langle\psi|0\rangle & \bar{\gamma}\langle\psi|1\rangle \end{pmatrix},$$

onde γa , $\gamma \bar{a}$ ($|\gamma| = 1$, $|a| = 1$) são os autovalores de V , e $|\varphi_1\rangle$, $|\varphi_2\rangle$ são os respectivos autovetores.

Os vetores que queremos distinguir, $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, podem pertencer a uma mesma classe ou a classes distintas.

– Se $|\psi_1\rangle \in (A)$ e $|\psi_2\rangle \in (A)$:

Caso trivial, pois $|\psi_1\rangle = \lambda|0\rangle$ e $|\psi_2\rangle = \nu|0\rangle$.

– Se $|\psi_1\rangle \in (A)$ e $|\psi_2\rangle \in (B)$:

Caso trivial, pois $|\psi_1\rangle = \lambda|0\rangle$ e $|\psi_2\rangle = \theta|1\rangle$.

– Se $|\psi_1\rangle \in (A)$ e $|\psi_2\rangle \in (C)$:

Temos

$$\begin{aligned} \rho_{\text{out},1} &= |0\rangle\langle 0| \\ \rho_{\text{out},2} &= \begin{pmatrix} a\langle 0|\psi_2\rangle \\ \gamma\langle 1|\psi_2\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}\langle\psi_2|0\rangle & \bar{\gamma}\langle\psi_2|1\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Forçando a ortogonalidade,

$$\begin{aligned} \langle 0|(a\langle 0|\psi_2\rangle|0\rangle + \gamma\langle 1|\psi_2\rangle|1\rangle) &= 0 \\ \Leftrightarrow a\langle 0|\psi_2\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow |\psi_2\rangle &= \theta|1\rangle, \end{aligned}$$

o que nos leva a uma contradição com a hipótese $|\psi_2\rangle \neq \theta|1\rangle$ da classe (C).

- Se $|\psi_1\rangle \in (A)$ e $|\psi_2\rangle \in (D)$:

Temos

$$\begin{aligned}\rho_{\text{out},1} &= |0\rangle\langle 0| \\ \rho_{\text{out},2} &= \begin{pmatrix} \bar{a}\langle 0|\psi_2\rangle \\ \gamma\langle 1|\psi_2\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\langle \psi_2|0\rangle & \bar{\gamma}\langle \psi_2|1\rangle \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Forçando a ortogonalidade,

$$\begin{aligned}\langle 0|(\bar{a}\langle 0|\psi_2\rangle|0\rangle + \gamma\langle 1|\psi_2\rangle|1\rangle) &= 0 \\ \Leftrightarrow \bar{a}\langle 0|\psi_2\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow |\psi_2\rangle &= \theta|1\rangle,\end{aligned}$$

o que nos leva a uma contradição com a hipótese $|\psi_2\rangle \neq \theta|1\rangle$ da classe (D).

- Se $|\psi_1\rangle \in (B)$ e $|\psi_2\rangle \in (B)$:

Caso trivial, pois $|\psi_1\rangle = \theta|1\rangle$ e $|\psi_2\rangle = \nu|1\rangle$.

- Se $|\psi_1\rangle \in (B)$ e $|\psi_2\rangle \in (C)$:

Temos

$$\begin{aligned}\rho_{\text{out},1} &= |1\rangle\langle 1| \\ \rho_{\text{out},2} &= \begin{pmatrix} a\langle 0|\psi_2\rangle \\ \gamma\langle 1|\psi_2\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}\langle \psi_2|0\rangle & \bar{\gamma}\langle \psi_2|1\rangle \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Forçando a ortogonalidade,

$$\begin{aligned}\langle 1|(a\langle 0|\psi_2\rangle|0\rangle + \gamma\langle 1|\psi_2\rangle|1\rangle) &= 0 \\ \Leftrightarrow \gamma\langle 1|\psi_2\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow |\psi_2\rangle &= \lambda|0\rangle,\end{aligned}$$

o que nos leva a uma contradição com a hipótese $|\psi_2\rangle \neq \lambda|0\rangle$ da classe (C).

- Se $|\psi_1\rangle \in (B)$ e $|\psi_2\rangle \in (D)$:

Temos

$$\begin{aligned}\rho_{\text{out},1} &= |1\rangle\langle 1| \\ \rho_{\text{out},2} &= \begin{pmatrix} \bar{a}\langle 0|\psi_2\rangle \\ \gamma\langle 1|\psi_2\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\langle \psi_2|0\rangle & \bar{\gamma}\langle \psi_2|1\rangle \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Forçando a ortogonalidade,

$$\begin{aligned}\langle 1|(\bar{a}\langle 0|\psi_2\rangle|0\rangle + \gamma\langle 1|\psi_2\rangle|1\rangle) &= 0 \\ \Leftrightarrow \gamma\langle 1|\psi_2\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow |\psi_2\rangle &= \lambda|0\rangle,\end{aligned}$$

o que nos leva a uma contradição com a hipótese $|\psi_2\rangle \neq \lambda|0\rangle$ da classe (D).

– Se $|\psi_1\rangle \in (C)$ e $|\psi_2\rangle \in (C)$:

Temos

$$\begin{aligned}\rho_{\text{out},1} &= \begin{pmatrix} a\langle 0|\psi_1\rangle \\ \gamma\langle 1|\psi_1\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}\langle \psi_1|0\rangle & \bar{\gamma}\langle \psi_1|1\rangle \end{pmatrix} \\ \rho_{\text{out},2} &= \begin{pmatrix} a\langle 0|\psi_2\rangle \\ \gamma\langle 1|\psi_2\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}\langle \psi_2|0\rangle & \bar{\gamma}\langle \psi_2|1\rangle \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Forçando a ortogonalidade,

$$\begin{aligned}(\bar{a}\langle \psi_1|0\rangle\langle 0| + \bar{\gamma}\langle \psi_1|1\rangle\langle 1|)(a\langle 0|\psi_2\rangle|0\rangle + \gamma\langle 1|\psi_2\rangle|1\rangle) &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle \psi_1|0\rangle\langle 0|\psi_2\rangle + \langle \psi_1|1\rangle\langle 1|\psi_2\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle \psi_1|(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)|\psi_2\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle \psi_1|\psi_2\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow |\psi_1\rangle \text{ e } |\psi_2\rangle \text{ são ortogonais entre si,}\end{aligned}$$

o que nos leva a um caso trivial.

– Se $|\psi_1\rangle \in (C)$ e $|\psi_2\rangle \in (D)$:

Temos

$$\begin{aligned}\rho_{\text{out},1} &= \begin{pmatrix} a\langle 0|\psi_1\rangle \\ \gamma\langle 1|\psi_1\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}\langle \psi_1|0\rangle & \bar{\gamma}\langle \psi_1|1\rangle \end{pmatrix} \\ \rho_{\text{out},2} &= \begin{pmatrix} \bar{a}\langle 0|\psi_2\rangle \\ \gamma\langle 1|\psi_2\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\langle \psi_2|0\rangle & \bar{\gamma}\langle \psi_2|1\rangle \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Forçando a ortogonalidade,

$$\begin{aligned}(\bar{a}\langle \psi_1|0\rangle\langle 0| + \bar{\gamma}\langle \psi_1|1\rangle\langle 1|)(\bar{a}\langle 0|\psi_2\rangle|0\rangle + \gamma\langle 1|\psi_2\rangle|1\rangle) &= 0 \\ \Leftrightarrow \bar{a}^2\langle \psi_1|0\rangle\langle 0|\psi_2\rangle + \langle \psi_1|1\rangle\langle 1|\psi_2\rangle &= 0,\end{aligned}$$

logo, se a condição acima for satisfeita, podemos distinguir vetores das classes (C) e (D).

– Se $|\psi_1\rangle \in (D)$ e $|\psi_2\rangle \in (D)$:

Temos

$$\begin{aligned}\rho_{\text{out},1} &= \begin{pmatrix} \bar{a}\langle 0|\psi_1\rangle \\ \gamma\langle 1|\psi_1\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\langle \psi_1|0\rangle & \bar{\gamma}\langle \psi_1|1\rangle \end{pmatrix} \\ \rho_{\text{out},2} &= \begin{pmatrix} \bar{a}\langle 0|\psi_2\rangle \\ \gamma\langle 1|\psi_2\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\langle \psi_2|0\rangle & \bar{\gamma}\langle \psi_2|1\rangle \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Forçando a ortogonalidade,

$$\begin{aligned}(\bar{a}\langle \psi_1|0\rangle\langle 0| + \bar{\gamma}\langle \psi_1|1\rangle\langle 1|)(\bar{a}\langle 0|\psi_2\rangle|0\rangle + \gamma\langle 1|\psi_2\rangle|1\rangle) &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle \psi_1|0\rangle\langle 0|\psi_2\rangle + \langle \psi_1|1\rangle\langle 1|\psi_2\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle \psi_1|(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)|\psi_2\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle \psi_1|\psi_2\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow |\psi_1\rangle \text{ e } |\psi_2\rangle \text{ são ortogonais entre si,}\end{aligned}$$

o que nos leva a um caso trivial.

Concluindo: o diagrama III de Deutsch pode distinguir vetores $|\psi_1\rangle$ e

$|\psi_2\rangle$ não-ortogonais entre si somente nos casos em que

$$\left\{ \begin{array}{l} |\psi_i\rangle \neq \lambda|0\rangle, \quad |\psi_i\rangle \neq \theta|1\rangle, \quad i = 1, 2 \\ V = \gamma U^* \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} U, \quad |\gamma| = 1, \quad |a| = 1, \quad U \text{ unitária} \\ \bar{a}^2 \langle \psi_1|0\rangle \langle 0|\psi_2\rangle + \langle \psi_1|1\rangle \langle 1|\psi_2\rangle = 0 \end{array} \right.$$

A.4.4

Diagrama D.IV

No capítulo anterior, identificamos as seguintes classes de restrições sobre $|\psi\rangle$ e $\hat{\rho}$ para que ρ_{out} seja puro:

$$\begin{array}{l} \text{(A)} \quad \left\{ \begin{array}{l} V|\psi\rangle = \mu|\psi\rangle \\ \hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \end{array} \right. \Rightarrow \rho_{\text{out}} = |\psi\rangle\langle\psi| \\ \text{(B)} \quad \left\{ \begin{array}{l} V|\psi\rangle \neq \mu|\psi\rangle \\ \hat{\rho} = |1\rangle\langle 1| \end{array} \right. \Rightarrow \rho_{\text{out}} = V|\psi\rangle\langle\psi|V^* \\ \text{(C)} \quad \left\{ \begin{array}{l} V|\psi\rangle \neq \mu|\psi\rangle \\ \hat{\rho} = |0\rangle\langle 0| \end{array} \right. \Rightarrow \rho_{\text{out}} = |\psi\rangle\langle\psi|. \end{array}$$

Os vetores que queremos distinguir, $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$, podem pertencer a uma mesma classe ou a classes distintas.

– Se $|\psi_1\rangle \in \text{(A)}$ e $|\psi_2\rangle \in \text{(A)}$:

Caso trivial, pois $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ são autovetores de V , logo já são ortogonais entre si.

– Se $|\psi_1\rangle \in \text{(A)}$ e $|\psi_2\rangle \in \text{(B)}$:

Temos

$$\begin{aligned} \rho_{\text{out},1} &= |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \\ \rho_{\text{out},2} &= V|\psi_2\rangle\langle\psi_2|V^* \end{aligned}$$

Para ortogonalidade, devemos ter

$$\langle \psi_1|V|\psi_2\rangle = 0.$$

Como $V|\psi_1\rangle = \mu|\psi_1\rangle$, segue que $\langle\psi_1|V|\psi_2\rangle = \mu\langle\psi_1|\psi_2\rangle$. Logo,

$$\begin{aligned}\langle\psi_1|V|\psi_2\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \mu\langle\psi_1|\psi_2\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle\psi_1|\psi_2\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow |\psi_1\rangle \text{ e } |\psi_2\rangle &\text{ são ortogonais entre si,}\end{aligned}$$

o que nos leva a um caso trivial.

– Se $|\psi_1\rangle \in (A)$ e $|\psi_2\rangle \in (C)$:

Temos

$$\begin{aligned}\rho_{\text{out},1} &= |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \\ \rho_{\text{out},2} &= |\psi_2\rangle\langle\psi_2|\end{aligned}$$

Forçando a ortogonalidade,

$$\begin{aligned}\langle\psi_1|\psi_2\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow |\psi_1\rangle \text{ e } |\psi_2\rangle &\text{ são ortogonais entre si,}\end{aligned}$$

o que nos leva a um caso trivial.

– Se $|\psi_1\rangle \in (B)$ e $|\psi_2\rangle \in (B)$:

Temos

$$\begin{aligned}\rho_{\text{out},1} &= V|\psi_1\rangle\langle\psi_1|V^* \\ \rho_{\text{out},2} &= V|\psi_2\rangle\langle\psi_2|V^*\end{aligned}$$

Forçando a ortogonalidade,

$$\begin{aligned}\langle\psi_1|V^*V|\psi_2\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \langle\psi_1|\psi_2\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow |\psi_1\rangle \text{ e } |\psi_2\rangle &\text{ são ortogonais entre si,}\end{aligned}$$

o que nos leva a um caso trivial.

– Se $|\psi_1\rangle \in (B)$ e $|\psi_2\rangle \in (C)$:

Temos

$$\begin{aligned}\rho_{\text{out},1} &= V|\psi_1\rangle\langle\psi_1|V^* \\ \rho_{\text{out},2} &= |\psi_2\rangle\langle\psi_2|\end{aligned}$$

Para ortogonalidade, devemos ter

$$\begin{aligned}\langle\psi_1|V^*|\psi_2\rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle\psi_2|V|\psi_1\rangle &= 0,\end{aligned}$$

logo, se a condição acima for satisfeita, podemos distinguir vetores das classes (B) e (C).

- Se $|\psi_1\rangle \in (C)$ e $|\psi_2\rangle \in (C)$:

Temos

$$\begin{aligned}\rho_{\text{out},1} &= |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \\ \rho_{\text{out},2} &= |\psi_2\rangle\langle\psi_2|\end{aligned}$$

Forçando a ortogonalidade,

$$\begin{aligned}\langle\psi_1|\psi_2\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow |\psi_1\rangle \text{ e } |\psi_2\rangle &\text{ são ortogonais entre si,}\end{aligned}$$

o que nos leva a um caso trivial.

Concluindo: o diagrama IV de Deutsch pode distinguir vetores $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ não-ortogonais entre si somente nos casos em que

$$\left\{ \begin{array}{l} |\psi_1\rangle \text{ e } |\psi_2\rangle \text{ não são autovetores de } V \\ \hat{\rho}_1 = |1\rangle\langle 1| \\ \hat{\rho}_2 = |0\rangle\langle 0| \\ \langle\psi_2|V|\psi_1\rangle = 0 \end{array} \right.$$