



**Débora Freire Mondaini**

**Distinção Ótima de Estados Quânticos por  
CTC's Pós-Selecionadas**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada

Orientador: Prof. George Svetlichny

Rio de Janeiro  
Maio de 2011



**Débora Freire Mondaini**

**Distinção Ótima de Estados Quânticos por  
CTC's Pós-Selecionadas**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

**Prof. George Svetlichny**

Orientador  
Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Carlos Tomei**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Nicolau Corção Saldanha**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Ernesto F. Galvão**

Instituto de Física — UFF

**Prof. Roberto Imbuzeiro Oliveira**

IMPA

**Prof. Paul Schweitzer**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 10 de maio de 2011

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Débora Freire Mondaini**

Graduação em Matemática Pura, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (março/2001 – julho/2004).

Mestrado em Matemática Aplicada, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (agosto/2004 – fevereiro/2006).

#### Ficha Catalográfica

Mondaini, Débora Freire

Distinção Ótima de Estados Quânticos por CTC's Pós-Selecionadas / Débora Freire Mondaini; orientador: George Svetlichny. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2011.

v., 79 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Curvas tipo-tempo fechadas; Teoria de Deutsch; Teleportação quântica; Distinção de estados quânticos; Processos quânticos pós-selecionados. I. Svetlichny, George. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

À minha mãe, Denise Freire (*in memoriam*)

## Agradecimentos

À CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos.

Ao meu orientador, George Svetlichny, por todos os anos de boa convivência, pelos inúmeros ensinamentos, pelo enorme empenho para o bom andamento deste trabalho, pela paciência e por todos os gatos que me foram apresentados (quânticos ou não).

A todos os professores do Departamento de Matemática, em especial a Carlos Tomei e Ana Cristina Oliveira, pelos conselhos, pela amizade e pelas oportunidades de crescimento acadêmico e profissional.

Aos funcionários do DMAT, especialmente a Creuza Nascimento, pela sua paciência, eficiência e atenção insuperáveis.

À minha irmã, Cecília Mondaini, minha grande amiga de todos os dias, pela ajuda constante, pelas broncas necessárias e pelo apoio incondicional.

Aos meus irmãos, Rubem, Felipe e Leonardo Mondaini, por todo o incentivo para que este trabalho fosse concluído.

Ao meu pai, meu primeiro e maior exemplo de cientista.

À Carmem Costa, à Perpétua Nunes e a meus familiares, pelos carinho de sempre.

À Anna Clara Sampaio e Camila Ribeiro, por tantos e tantos anos de amizade e companheirismo.

À Yuri (Djuri) Ki, Lis Ingrid Lopes, Emilia Alves, Cristhabel Vasquez, Jaqueline Siqueira e Patricia Cirilo, por fazerem os meus dias mais fáceis e alegres.

Aos amigos do DMAT, Bernardo Pagnoncelli, Carlos Espinoza, Eduardo Teles, Felipe Nobili, Guilherme Frederico (GF) Lima, Ines Oliveira, João Paulo (Zé) Romanelli, José Cal Neto, José (Profeta) Gondin, Lhaylla Crissaff, Marcio Telles, Marina Dias, Miguel Schnoor, Mônica Barros, Regina Fukuda, Renato Costa, Renato Zanforlin (*in memoriam*), Rodrigo Pacheco, Sueni Arouca, Vera Syme e Wilson Reis, pela convivência diária ou em encontros ocasionais, por todas as conversas, sorrisos, atenção e conselhos nos últimos anos.

À Daniella Neves, Leandro Nascimento e Rosângela Neves, pela amizade sincera e gratuita em momentos cruciais.

À Alcira Bernardo, pelas dezenas de lindas mensagens, e-mails e carinhos que recebi durante a escrita deste trabalho, tornando o processo muito mais agradável.

Aos amigos Allan Ferreira, Antônia Gonçalves, Camila Garcia, Daniela Moreira, Dorel Fetcu, Heloisa Franco, Luciana Dellasoppa, Petronela Fetcu,

Renata Costa, Rodrigo Fasano, Rodrigo Silva e Victor Hugo Nogueira, pelas palavras de incentivo e por toda a torcida.

A Graham Smith, pelo companheirismo, compreensão e carinho fundamentais, todos os dias.

À Isabela Silva, por ter suportado todas as crises de mau humor e ausências com muita paciência e seu melhor sorriso no rosto. Não há palavras para descrever a importância do seu incentivo diário e incansável. Este trabalho é *nosso*.

## Resumo

Mondaini, Débora Freire; Svetlichny, George. **Distinção Ótima de Estados Quânticos por CTC's Pós-Selecionadas**. Rio de Janeiro, 2011. 79p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Um importante problema da Informação Quântica consiste em distinguir estados. Somente estados ortogonais podem ser distinguidos com certeza, e os não ortogonais somente probabilisticamente, sendo que a probabilidade ótima já é conhecida. Em 2009, Brun, Harrington e Wilde demonstraram que na teoria de David Deutsch estados não ortogonais podem ser distinguidos com certeza desde que existam CTCs (closed time-like curves) no universo, o que é problemático, por se tratar de uma espécie de viagem no tempo. Bennett e Shumacher em 2005 e Svetlichny em 2009 propuseram um método de simular probabilisticamente CTCs usando a mecânica quântica usual. Tais simulações já foram realizadas em laboratório. Surge então a questão da relação entre a teoria de Deutsch e os CTCs simulados (as tais chamadas CTCs pós-selecionadas). Demonstramos nesta tese que os circuitos quânticos pós-selecionados análogos aos de Deutsch são capazes de distinguir estados não ortogonais com probabilidade ótima.

## Palavras-chave

Curvas tipo-tempo fechadas; Teoria de Deutsch; Teleportação quântica; Distinção de estados quânticos; Processos quânticos pós-selecionados.

## Abstract

Mondaini, Débora Freire; Svetlichny, George (Advisor). **Optimal Quantum State Distinction by Post-Selected CTC's**. Rio de Janeiro, 2011. 79p. D.Sc. Thesis — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

An important problem in Quantum Information is the discrimination of quantum states. Only orthogonal states can be perfectly distinguished, and the non-orthogonal just probabilistically (the optimal probability is already known). In 2009, Brun, Harrington and Wilde demonstrated that in David Deutsch's theory non-orthogonal states can be distinguished provided that CTCs (closed time-like curves) exist in the universe, what is problematic, because these curves are a kind of time travel. Bennett and Schumacher in 2005, and Svetlichny in 2009 proposed a method to simulate CTCs probabilistically using usual Quantum Mechanics. It arises then the relation between the Deutsch's theory and the simulated CTCs (the so-called post-selected CTCs). We show in this thesis that post-selected quantum circuits analogous to Deutsch's ones can discriminate non-orthogonal quantum states with optimal probability.

## Keywords

Closed time-like curves; Deutsch's theory; Quantum teleportation; Quantum state distinction; Post-selected quantum processes.



# Sumário

1	Introdução	10
2	Distinção de Estados Quânticos	13
2.1	Fundamentos	13
2.2	Distinção via Medições Projetivas	14
2.3	Distinção via POVMs	16
2.4	Probabilidade Ótima	17
3	Distinção de Estados Quânticos: Novos Métodos	18
3.1	Traço parcial	18
3.2	Distinção de Estados Quânticos via CTCs	18
3.3	Simulação Probabilística de CTCs e Distinção via Traço Parcial	21
4	Diagramas de Traço Parcial	26
4.1	Probabilidade de Realização do Traço Parcial	27
4.2	Distinção com Probabilidade Ótima	31
5	Análise dos Traços Parciais	33
5.1	Diagrama T.I	35
5.2	Diagrama T.II	42
5.3	Diagrama T.III	44
5.4	Diagrama T.IV	44
5.5	Resultados para operadores não-triviais	45
6	Comparação entre os Modelos	48
A	Análise dos Diagramas de Deutsch	54
A.1	Cálculo de Pontos Fixos	55
A.2	Cálculo de $\rho_{\text{out}}$ para os Diagramas de Deutsch	61
A.3	Para quais estados iniciais temos $\rho_{\text{out}}$ puro?	62
A.4	Verificação de ortogonalidade entre os $\rho_{\text{out}}$	66