3
Modelos de escolha de carteiras de investimento

3.1. Modelo de Índice Único

A observação casual do comportamento dos preços das ações revela que, quando o mercado sobe (o que é medido por qualquer um dos índices de mercado disponíveis), a maioria das ações tende a subir em termos de preço e que, quando o mercado cai, os preços da maioria das ações também caem. Isso sugere que um dos motivos pelos quais os retornos dos títulos são correlacionados poderia ser uma resposta comum a variações do mercado, e que uma medida útil dessa correlação poderia ser obtida ao se relacionar o retorno de uma ação ao retorno de um índice de mercado de ações (por exemplo ao IBOVESPA). Este processo de somente relacionar cada título ao mercado reduz drasticamente o número de parâmetros necessários e o tempo de computação no processo de seleção e otimização da carteira.

O retorno de uma ação poderia ser escrito do seguinte modo:

$$R_i = a_i + \beta_i R_m \tag{10}$$

onde:

a_i é o componente do retorno do título i que é independente do desempenho do mercado, em si uma variável aleatória.

R_m é a taxa de retorno do índice de mercado, ou seja, uma variável aleatória.

β_i é uma constante que mede a variação esperada de R_i dada uma variação de R .

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611752/CA

Essa equação simplesmente decompõe o retorno de uma ação em dois elementos, a parte devida ao comportamento de mercado e a parte independente do mercado. O β_i na expressão mede a sensibilidade do retorno de uma ação ao retorno do mercado.

Representemos por α_i o valor esperado de a_i e seja e_i o componente aleatório de a_i. Nesse caso:

$$a_i = \alpha_i + e_i$$

onde e_i tem valor esperado igual a zero. A equação do retorno de uma ação pode ser escrita do seguinte modo:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i \qquad (11)$$

Representemos os desvios-padrão de R_m e e_i por, respectivamente, σ_m e σ_{ei}. Até o presente momento, não foi feito nenhuma hipótese simplificadora. O retorno está sendo definido como a soma de diversos componentes, mas esses componentes, quando somados, devem por definição ser igual ao retorno total.

É conveniente que os e_i sejam não correlacionados com R_m. Formalmente, isso significa que:

$$\text{cov}(e_i, R_m) = E[(e_i - 0)(R_m - \overline{R}_m)] = 0$$

Isso garante que a capacidade da regressão descrever o retorno de qualquer ação independe de qual é o retorno de mercado.

A hipótese-chave do modelo de índice único é a de que e é independente de e_j para todos os valores de i e j, ou, mais formalmente, $E(e_i e_j) = 0$. Isso significa que o único motivo pelo qual as ações variariam em conjunto, de forma sistemática, seria uma variação conjunta comum com o mercado. Não existiriam outros efeitos além do mercado que fossem responsáveis pelo movimento comum entre ações.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611752/CA

Desenvolveremos a seguir o retorno esperado, o desvio-padrão e a covariância quando o modelo de índice único é utilizado para representar o movimento conjunto das ações.

O retorno esperado de uma ação é:

$$E(R_i) = E[\alpha_i + \beta_i R_m + e_i]$$

Como o valor esperado da soma de variáveis aleatórias é igual à soma de seus valores esperados, temos:

$$E(R_i) = E(\alpha_i) + E(\beta_i R_m) + E(e_i)$$

Como α_i e β_i são constantes e, por construção, o valor esperado de e_i é zero, temos:

$$\boxed{E(R_i) = \alpha_i + \beta_i \overline{R}_m} \tag{12}$$

A variância do retorno de qualquer ação é:

$$\sigma_i^2 = E(R_i - \overline{R}_i)^2$$

Substituindo os valores de R_i e $\overline{R}_i$ na expressão anterior, obtemos:

$$\sigma_i^2 = E[(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i) - (\alpha_i + \beta_i \overline{R}_m)]^2$$

Cancelando os α_i's colocando β_i em evidência, temos:

$$\sigma_i^2 = E[\beta_i (R_m - \overline{R}_m) + e_i]^2$$

Mas $E[e_i (R_m - \overline{R}_m)] = 0$. Então,

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 E[(R_m - \overline{R}_m)]^2 + E(e_i)^2$$

$$\boxed{\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + E(e_i)^2} \tag{13}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611752/CA

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611752/CA

A covariância entre os retornos de duas ações pode ser assim escrita:

$$\sigma_{ij} = E[(R_i - \overline{R}_i)(R_j - \overline{R}_j)]$$

Substituindo os valores de R_i, $\overline{R}_i$, R_j e $\overline{R}_j$, temos:

$$\sigma_{ij} = E\{[(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i) - (\alpha_i + \beta_i \overline{R}_m)][(\alpha_j + \beta_j R_m + e_j) - (\alpha_j + \beta_j \overline{R}_m)]\}$$

Cancelando os α_i's e os α_j's e colocando β_i e β_j em evidência, temos:

$$\sigma_{ij} = E[(\beta_i (R_m - \overline{R}_m) + e_i)(\beta_j (R_m - \overline{R}_m) + e_j)]$$

Realizando a multiplicação,

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j E(R_m - \overline{R}_m)^2 + \beta_j E[e_i (R_m - \overline{R}_m)] + \beta_i E[e_j (R_m - \overline{R}_m)] + E(e_i e_j)$$

Mas, por hipótese, os três últimos termos são nulos:

$$\boxed{\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^{\ 2}} \qquad (14)$$

Posso ainda calcular o retorno esperado e a variância de qualquer carteira, supondo que o modelo de índice único seja válido.

O retorno esperado de uma carteira é dado por:

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \overline{R}_i$$

onde

X_i é o peso do ativo i na composição da carteira.

Substituindo $\overline{R}_i$, temos:

$$\boxed{\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i \overline{R}_m} \qquad (15)$$

É sabido que a variância do retorno de uma carteira de ações é dada por:

$$\sigma_p{}^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i{}^2 \sigma_i{}^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}$$

Substituindo os resultados encontrados acima para $\sigma_i{}^2$ e σ_{ij}, temos:

$$\boxed{\sigma_p{}^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i{}^2 \beta_i{}^2 \sigma_m{}^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i}^{N} X_i X_j \beta_i \beta_j \sigma_m{}^2 + \sum_{i=1}^{N} X_i{}^2 \sigma_{ei}{}^2} \quad (16)$$

3.1.1. Características do Modelo de Índice Único

Defini-se o beta de uma carteira (β_p) como sendo uma média ponderada dos betas individuais de cada ação contida na carteira, sendo os pesos iguais às proporções aplicadas em cada ação. Portanto,

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i$$

De maneira análoga, o alfa da carteira (α_p) é dado por:

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \alpha_i$$

Portanto, temos que:

$$\overline{R}_p = \alpha_p + \beta_p \overline{R}_m$$

Perceba que o beta da carteira de mercado é igual a 1 e as ações podem ser vistas como mais ou menos arriscadas do que o mercado, na medida em que seus betas são maiores ou menores do que 1.

A seguir, será examinado um pouco mais do risco de uma ação individual.

$$\sigma_p{}^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i{}^2 \beta_i{}^2 \sigma_m{}^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i}^{N} X_i X_j \beta_i \beta_j \sigma_m{}^2 + \sum_{i=1}^{N} X_i{}^2 \sigma_{ei}{}^2$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611752/CA

No somatório duplo, se i=j, então os termos seriam $X_i^2 \beta_i^2 \sigma_m^2$. Entretanto, esses são exatamente os termos na primeira soma. Portanto, a variância do retorno da carteira pode ser assim escrita:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i X_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_{ei}^2$$

Reescrevendo após agrupar os termos, temos que:

$$\sigma_p^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i \right) \left(\sum_{j=1}^{N} X_j \beta_j \right) \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_{ei}^2$$

Ou seja, o risco da carteira do investidor poderia ser representado por:

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_{ei}^2 \qquad (17)$$

À medida que aumentamos o número de ações na carteira (maior diversificação), a importância de $\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_{ei}^2$ diminui drasticamente. O risco que não é eliminado à medida que aumenta o tamanho da carteira é o risco associado ao termo β_p. Logo, o risco da carteira tende para:

$$\sigma_p = \left[\beta_p^2 \sigma_m^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \beta_p \sigma_m = \sigma_m \left[\sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i \right] \qquad (18)$$

Como o valor de σ_m é o mesmo qualquer que seja a ação examinada, a medida de contribuição de uma ação ao risco de uma carteira ampla é β_i.

3.2. Estimação de Beta

O uso do modelo de índice único requer estimativas de beta de cada ação que seja candidata a inclusão numa carteira. Por outro lado, as estimativas de betas futuros podem resultar do processamento de dados passados e do uso de betas históricos como estimativas. Há evidências de que os betas históricos contêm informação útil sobre betas futuros.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611752/CA

3.2.1. Estimação de betas históricos

Representamos o retorno de uma ação da seguinte maneira:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i$$

Espera-se que esta equação seja válida em todos os momentos, embora os valores de α_i, β_i e σ_{ei}^2 possam variar com o passar do tempo. Se fizermos a suposição de que α_i, β_i e σ_{ei}^2 não variam com o passar do tempo, então deve ser esperado que a mesma equação seja sempre válida. Nesse caso, há um procedimento simples para estimar α_i, β_i e σ_{ei}^2.

Note que a equação é de uma reta. Geralmente, estimamos a localização da linha característica da ação usando análise de regressão. Trata-se de ajustar a linha reta aos dados para minimizar a soma dos quadrados das diferenças em relação à linha na direção vertical. A inclinação dessa linha reta seria nossa melhor estimativa de beta no período ao qual a linha foi ajustada, e o intercepto seria nossa melhor estimativa de alfa (α_i).

Para estimar o beta de uma ação por meio de análise de regressão, usamos:

$$\boxed{\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}} \tag{19}$$

Para estimar o alfa, usamos:

$$\boxed{\alpha_i = \overline{R}_{it} - \beta_i \overline{R}_{mt}} \tag{20}$$

onde:

$\overline{R}_{it}$ é o retorno médio do ativo i no período t;

$\overline{R}_{mt}$ é o retorno médio do mercado no período t.

Os valores de α_i e β_i produzidos numa análise de regressão correspondem a estimativas dos verdadeiros valores de α_i e β_i de uma ação. As estimativas

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611752/CA

estão sujeitas a erro. Além disso, uma complicação adicional do processo reside no fato de que α_i e β_i não são perfeitamente estacionários no tempo. Esperaríamos que sofressem alterações à medida que mudassem as características fundamentais da empresa. Apesar do erro de mensuração do verdadeiro β_i e da possibilidade de mudanças no β_i verdadeiro com o tempo, a maneira mais direta de prever β_i para um período futuro consiste em usar uma estimativa de β_i obtida por meio de análise de regressão com dados de um período passado.

3.3. Otimização de carteiras

Otimizar a carteira é basicamente escolher as proporções ótimas de investimento nas ações de modo a minimizar o risco total da carteira, dado um determinado retorno esperado desejado.

O problema então é minimizar o risco da carteira (minimizar $\sigma_p^{\,2}$) sujeito a restrição de que o retorno esperado da carteira seja igual a $\overline{R}_p$, em que $\overline{R}_p$ é a média ponderada dos retornos médios dos títulos com risco e sem risco da carteira, ou seja:

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \overline{R}_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{N} X_i\right) R_f$$

Adicionalmente inclui uma restrição que proíba posições a descoberto. Formalizando o problema, temos que:

$$\text{Minimizar } \sigma_p^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} X_i^{\,2} \beta_i^{\,2} \sigma_m^{\,2} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} X_i X_j \beta_i \beta_j \sigma_m^{\,2} + \sum_{i=1}^{N} X_i^{\,2} \sigma_{ei}^{\,2}$$

$$\text{sujeito a } \overline{R}_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \overline{R}_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{N} X_i\right) R_f$$

$$X_i \geq 0 \qquad \text{i=1,2,...,N}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611752/CA

A resolução deste sistema é um problema de programação quadrática, que foi resolvido por Elton, Gruber & Padberg (1976) e resulta nas seguintes frações ótimas:

$$y_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{ei}^{2}}[\left(R/V\right)_i - C_i] \qquad (21)$$

onde:

$$C_i = \frac{\sigma_m^{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{(\overline{R}_j - R_f)\beta_j}{\sigma_{ej}^{2}}}{1+\sigma_m^{2}\sum_{j=1}^{i}\frac{\beta_j^{2}}{\sigma_{ej}^{2}}} \qquad (22)$$

$$\left(\frac{R}{V}\right)_i = \frac{\overline{R}_i - R_f}{\beta_i} \qquad (23)$$

O processo de otimização no contexto do Modelo de Índice Único consiste nas seguintes etapas:

1. ordenar os títulos em ordem decrescente de $\left(\frac{R}{V}\right)_i$;

2. para cada título i calcula-se um valor C_i.Por exemplo, tendo-se N títulos candidatos a integrar a carteira, o cálculo de C_2 inclui unicamente os dois títulos com mais alto $\left(\frac{R}{V}\right)$. O cálculo de C_3 inclui unicamente os três títulos com mais alto $\left(\frac{R}{V}\right)$, e assim sucessivamente. O cálculo de C_N inclui todos os N títulos;

3. comparar todos os $\left(\frac{R}{V}\right)_i$ com o correspondente C_i. A seguir, identifica-se um C_i de modo que todos os títulos incluídos em seu cálculo tenham

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611752/CA

$\left(\frac{R}{V}\right)_i > C_i$ e todos os não incluídos tenham $\left(\frac{R}{V}\right)_i < C_i$. O C_i com esta propriedade denota-se como taxa de corte C*;

4. todos os títulos com $\left(\frac{R}{V}\right)_i$ < C* terão atribuídas fração zero;

5. a fração ótima dos títulos que não tiveram fração zero é calculada da seguinte forma:

$$y_i = \frac{\beta_i}{\sigma_i^{\ 2}}\left[\frac{\overline{R}_i - R_f}{\beta_i} - C^*\right] \qquad \text{i=1,2,...,N} \tag{24}$$

6. para satisfazer que $\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$ as frações ótimas são calculadas da seguinte forma:

$$X_i = \frac{y_i}{\sum_{i=1}^{N} y_i} \qquad \text{i=1,2,...,N}$$

3.4. Dominância Estocástica

A forma mais geral de dominância estocástica não faz qualquer hipótese sobre a forma da distribuição de probabilidades dos retornos. Além disso, quando empregamos o critério de dominância estocástica, não precisamos supor qualquer forma específica para as funções utilidade dos investidores. Há três premissas progressivamente mais fortes, sobre o comportamento dos investidores, empregadas na literatura de dominância estocástica. Elas conduzem diretamente à dominância estocástica de primeira, segunda e terceira ordem.

A dominância estocástica de primeira ordem pressupõe que um investidor prefere receber mais a receber menos.

A dominância estocástica de segunda ordem supõe que, além de preferirem mais a menos, os investidores têm aversão a risco.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611752/CA

A dominância estocástica de terceira ordem adiciona, às duas hipóteses da dominância estocástica de segunda ordem, a suposição de que os investidores têm aversão absoluta decrescente a risco.

O teorema da dominância estocástica de primeira ordem é: se os investidores preferem ter mais a ter menos, e se a probabilidade acumulada de A nunca é superior à probabilidade acumulada de B, e às vezes é menor, então A é preferível a B. A probabilidade acumulada de A nunca é superior à probabilidade acumulada de B se as duas curvas nunca se cruzarem e a de A não fica acima da curva de B.

Se as duas curvas cruzarem, não será possível optar entre A e B com base em dominância estocástica de primeira ordem. Para poder optar, precisamos fazer uma hipótese mais forte a respeito das características das funções utilidade. Se fizermos a suposição de aversão a risco, além da suposição de preferência por maior retorno, essa questão poderá ser resolvida. Aversão a risco significa que o investidor deve receber compensação por assumir risco. Ela surge quando cada acréscimo de retorno vale menos para o investidor do que o acréscimo anterior. Dito de outra forma, o investidor deve estar disposto a perder 1% de retorno em nível mais alto de retorno para poder conseguir 1% de retorno adicional num nível baixo de retorno.

Essas idéias podem ser formalizadas no seguinte teorema. Se:

• Os investidores preferem ter mais a ter menos.

• Os investidores têm aversão a risco.

• A soma das probabilidades acumuladas de todos os retornos nunca é maior com o investimento A do que com o investimento B, e às vezes é menor,

Então A domina B por dominância estocástica de segunda ordem.

É preciso tomar algum cuidado para não se exagerar a importância da dominância estocástica. Em geral, ela envolve comparações de todas as alternativas, mas aos pares.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611752/CA

A dominância estocástica de terceira ordem pressupõe que os investidores possuem aversão absoluta decrescente a risco. Uma das propriedades de uma função que possui essa característica é uma terceira derivada positiva. O teorema de dominância estocástica de terceira ordem utiliza este fato.

A domina B por dominância estocástica de terceira ordem se:

1. Os investidores preferem mais riqueza a menos riqueza.
2. Os investidores têm aversão a risco.
3. A terceira derivada da função utilidade dos investidores é positiva.
4. A média de A é maior do que a média de B.
5. A soma da soma da distribuição de probabilidade acumulada para todos os retornos nunca é maior para A do que para B, e às vezes é menor.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611752/CA