# 8
# Referências Bibliográficas

[1] ASSEF NETO, A.; SILVA, C.A.T.; **Administração do Capital de Giro.** Editora Atlas S.A., São Paulo, 2ª edição, 1997.

[2] BANDYOPADHYAY, A.; **Mapping Corporate Drift Towards Default, Part I: a market-based approach**. The Journal of Risk Finance, v. 8, 2007, p. 35-45.

[3] BANDYOPADHYAY, A.; **Mapping Corporate Drift Towards Default, Part II: a hybrid credit-scoring model**. The Journal of Risk Finance, v. 8, 2007, p. 46-55.

[4] BHARATH, S.; SHUMWAY, T.; **Forecasting Default with the KMV-Merton Model**. Department of Finance, University of Michigan Business School.

[5] BLACK, F; SCHOLES, M. **The Pricing of Options and Corporate Liabilities**. Journal of Political Economy, v. 81, 1973, p. 637-659.

[6] BREALEY, R.; MYERS, S.; **Principles of Corporate Finance.** McGraw-Hill Companies, Inc. New York, 1996.

[7] BROCKMAN, P.; TURTLE, H.J.; **A Barrier Option framework for Corporate Security Valuation**; Journal of Financial Economics, v. 67, 2003, p. 511-529.

[8] CAOUETTE, J.B.; ALTMAN, E.; NARAYANAN, P.; **Gestão do Risco de Crédito: o próximo grande desafio financeiro.** Qualitymark, Rio de Janeiro, 1999.

[9] CHAIA, A.J. **Modelos de Gestão do Risco de Crédito e sua Aplicabilidade ao Mercado Brasileiro.** Dissertação de Mestrado. Departamento de Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, USP, 2003.

[10] CHAN-LAU, J.A.; JOBERT, A.; KONG, J.; **An Option-Based Approach to Bank Vulnerabilities in Emerging Markets**. IMF Working Paper Nº 04/33, Fevereiro 2004. .

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611759/CA

[11] COSTA, C.L.; **Opções: operando a volatilidade**. Bolsa de Mercadorias & Futuros, São Paulo, 1998.

[12] COX, J.C.; ROSS, S.A.; RUBINSTEIN, M.; **Option Pricing: A Simplified Approach**. Journal of Financial Economics, v. 7, 1979 p.229-263.

[13] CROSBIE, P.; BOHN, J.; **Modeling Default Risk**. Moody's KMV Company , Dezembro 18, 2003.

[14] CROUHY, M.; GALAI, D.; MARK, R.; **A Comparative Analysis of Current Credit Risk Models** Journal of Banking & Finance, v. 24, 2000, p. 59-117.

[15] DAMODARAN, A.; **Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset**. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2º edição, 2002.

[16] DAVYDENKO, S. A.; **When do Firms Default? A Study of the Default Boundry**. London Business School, Fevereiro 1, 2005.

[17] DIXIT, A. K.; PINDYCK, R.S.; **Investment Under Uncertainty.** Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1994.

[18] DUFFIE, D.; SINGLETON, K..; **Modeling Term Structures of Defaultable Bonds;** Review of Finance Studies, v.12, 1999, p. 687-720.

[19] DWYER, D.W.; **The Distribution of Defaults and Bayesian Model Validation**; Moody's KMV Company , Novembro 6, 2006.

[20] DWYER, D.W.; **The Distribution of Defaults and Bayesian Model Validation**; Moody's KMV Company , Novembro 6, 2006.

[21] DWYER, D.W.; KOCAGIL, A.E.; STEIN, R.M.; **Moody´s KMV RiskCalc v3.1 Model – Next Generation Technology for Predicting Private Firm Credit Risk**; Moody's KMV Company , Abril 5, 2004.

[22] FAMA, E.; **Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Emperical Work;** Journal of Finance, v. 25, 1970, p. 383-417.

[23] GALLATI, R. R.; **Risk Management and Capital Adequacy.** McGraw-Hill Companies, Inc. New York, 2003.

[24] GHAGHORI, P.; CHAN, H.; FAFF, R.; **Investigating the Performance of Alternative Default-Risk Models: Option-Based Versus Accounting-Based Approaches**. Australian Journal of Management, v. 31, 2006, p. 207-234.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611759/CA

[25] HERMANNY, P. F. **Modelos de Equilíbrio Geral e Precificação de Risco de Crédito**. Dissertação de Mestrado. Instituto de Economia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, 2000.

[26] HUANG, J.; HUANG, M.; **How Much of the Corporate-Treasury Yield Spread is Due to Credit Risk?.** Working Paper, Pennsylvania State University, 2003.

[27] HULL, J.C.; **Options, Futures and Other Derivatives.** Pearson Education. Prentice Hall, New Jersey, 5th edition, 2002.

[28] JARROW, R.A.; TURNBULL, S.M.; **Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk**. Journal of Finance, v. 50, 1995, p. 53-86.

[29] JARROW, R.A.; LANDO, D.; TURNBULL, S.M.; **A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads**. The Review of Financial Studies, v. 10, 1997, p. 481-583.

[30] JPMORGAN & CO. INCORPORATED; RiskMetrics™ – Technical Document. RiskMetrics Group, New York, 1996.

[31] JORION, P.; **Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk**. McGraw-Hill Companies, Inc. New York, 1997.

[32] KEALHOFER, S.; **Quantifying Credit Risk I: Default Prediction**. Financial Analyst Journal; Jan/Fev 2003; 59, 1; pg. 30.

[33] KEALHOFER, S.; **Quantifying Credit Risk II: Debt Valuation**. Financial Analyst Journal; Mai/Jun 2003; 59, 3; pg. 78.

[34] LELAND, H.E.; **Predictions of Default Probabilities in Structural Models of Debt**. Journal of Investment Management, v.2, 2004, p. 5-20.

[35] MCKEAN, H.P.; **Stochastic Integrals**; Academic Press, New York, 1969.

[36] MERTON, R.C.; **Theory of Rational option pricing**; Journal of Economics and Management Science, v. 4, 1973, p. 141-83.

[37] MERTON, R.C.; **On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rate**; Journal of Finance, v. 29, 1974, p. 449-470.

[38] SAUNDERS, A.; **Medindo o Risco de Crédito: Novas Abordagens para Value at Risk e outros paradigmas**. Qualitymark, Rio de Janeiro, 2000.

[39] SELLERS, M.; ARORA, N.; **Financial EDF Measures – A new model of dual business lines**; Moody's KMV Company, Agosto, 2004.

[40] VASICEK, O. A.; **Credit Valuation**; KMV, LLC (KMV), March 1984.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611759/CA

[41] VASSALOU, M.; XING, Y.; **Default Risk in Equity Returns**; The Journal of Finance, v. 59, 2004, p. 831-868

[42] WESTGAARD, S.; **Real Default Probability and its Sensitivity in an Option Based Framework.** Workshop Stockholm School of Economics, 2003.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611759/CA

# Apêndice A

Para encontrar a relação teórica entre a volatilidade do valor de mercado de uma empresa ($\sigma_E$) e a volatilidade do valor dos ativos da empresa ($\sigma_A$), é preciso começar escrevendo a famosa EDP de BLACK e SCHOLES (1973):

$$\frac{1}{2}\sigma^2 v^2 F_{vv} + (rV - C)F_v - rF + F_t + C_y = 0$$

Isolando,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 v^2 F_{vv} + F_{ty} = -(rV - C)F_v + rF - C_y \qquad \text{(A.1)}$$

Agora, a equação do Lemma de Itô[24]:

$$dV = F_v dV + \frac{1}{2}F_{vv}(dV)^2 + F_t dt$$

Lembrando que o ativo segue um MGB

$$dV_A = \mu V_A dt + \sigma_A V_A dz \qquad \text{(A.2)}$$

Substituindo o MGB (A.2) do ativo na equação do Lemma de Itô:

$$dV = F_v(\mu V_A dt + \sigma_A V_A dz) + \frac{1}{2}F_{vv}(dV)^2 + F_t dt$$

Sabendo que $dV_A^2 = \mu^2 V_A^2 dt^2 + 2\mu V_A^2 .\sigma_A .dt.dw + \sigma^2 V_A^2 dw^2 = \sigma^2 V_A^2 dt$

[24] Para discussão rigorosa do Lemma de Itô, veja MCKEAN 1969 ou então ANEXO C.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611759/CA

$$dV = F_v \mu V_A dt + F_v \sigma_A V_A dz + \frac{1}{2} F_{vv} \sigma^2 V^2 dt + F_t dt$$

$$dV = (\frac{1}{2} F_{vv} \sigma^2 V^2 + \mu F_v V + F_t) dt + F_v \sigma_A V_A dz$$

Fazendo, μV= (μV – C), ou seja, com presença de dividendos, obtém-se:

$$dV = (\frac{1}{2} F_{vv} \sigma^2 V^2 + (\mu V - C) F_v + F_t) dt + F_v \sigma_A V_A dz \qquad \text{(A.3)}$$

Substitui-se na equação A.3 a equação A.1,

$$dV = ((\mu V - C) F_v - (rV - C) F_v + rF - C_y) dt + F_v \sigma_A V_A dz$$

Calculando, tem-se:

$$dV = ((\mu - r) V F_v + rF - C_y) dt + F_v \sigma_A V_A dz \qquad \text{(A.4)}$$

Analisando as equações A.2 e a equação A.4, verifica-se que os parâmetros são iguais, ou seja:

$$\mu V_A = (\mu - r) V F_v + rF$$

$$\mu V_A = \frac{(\mu - r) \sigma V F}{\sigma_y} + rF$$

$(\mu - r) V_A = \dfrac{(\mu - r) \sigma V F}{\sigma_y}$ com isso é encontrada a relação desejada,

$$V_A \sigma_y = \sigma V F_v$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611759/CA

$$\sigma_E = \left(\frac{V_A}{V_E}\right)\frac{\partial V_E}{\partial V_A}\sigma_A \qquad \text{(A.5)}$$

No modelo de BLACK e SCHOLES (1973), pode-se mostrar que $\frac{\partial V_E}{\partial V_A} = N(d_1)$, então pelo modelo de MERTON (1974), a relação das volatilidades dos *assets* com o *equity* é:

$$\sigma_E = \left(\frac{V_A}{V_E}\right)N(d_1)\sigma_A \qquad \text{(A.6)}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611759/CA

# Apêndice B

Neste apêndice será visto o detalhamento da formulação de MERTON (1974) para encontrar a probabilidade de *default* de firmas:

Primeiramente será assumido que os ativos seguem em MGB

$$dV_A = \mu V_A dt + \sigma_A V_A dW \qquad dW \approx N(0, dt)$$

Seja f = $ln\ V_A$

pelo lemma de Itô [25],

$$df(\ln V_A) = \frac{df}{dV_A} dV_A + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dV_A^2} dV_A^2 \quad ^{26} \qquad \text{(B.1)}$$

Calculando,

$$\frac{df}{dV_A} = \frac{d(\ln V_o)}{dV_A} = \frac{1}{V_A} \quad \text{(B.2)} \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2 f}{dV_A^2} = \frac{d^2(\ln V_o)}{dV_A^2} = \frac{d(1/V_A)}{dV_A} = \frac{-1}{V_A^2} \quad \text{(B.3)}$$

Agora substitui B.2 e B.3 na equação B.1:

$$df(\ln V_A) = \frac{1}{V_A} dV_A + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{V_A^2}\right)\sigma_A{}^2 V_A^2 dt$$

---

[25] Parcela sem o resto de Itô e a parcela em dt. Para mais detalhes verificar Anexo C

[26] $dV_A^{\ 2} = \mu^2 V_A^2 dt^2 + 2\mu V_A^2 . \sigma_A . dt . dw + \sigma^2 V_A^2 dw^2$, sabendo que $dt^2 = 0$, $dt.dw = 0$ e $dw^2 = dt$

Reescrevendo: $dV_A^{\ 2} = \sigma_A{}^2 V_A^2 dt$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611759/CA

$$df(\ln V_A) = \frac{1}{V_A} dV_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2 dt \qquad \text{(B.4)}$$

Substituindo a equação B.4 no MGB do ativo:

$$df(\ln V_A) = \frac{1}{V_A}\left(\mu.V_A dt + \sigma_A V_A dw\right) - \frac{1}{2}\sigma_A^2 dt$$

Calculando,

$$df(\ln V_A) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)dt + \sigma_A dw$$

O próximo passo é integrar pelos dois lados:

$$\int_t^{t+\Delta t} d(\ln V_A) = \int_t^{t+\Delta t} (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma_A^2)dt + \int_t^{t+\Delta t} \sigma_A dw$$

$$\ln\left(\frac{V_{A,t+\Delta t}}{V_{A,t}}\right) = (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma_A^2)\Delta t + \sigma_A (w_{t+\Delta t} - w_t)$$

Sabendo que:

$$\varepsilon_{t+\Delta t} = \frac{w_{t-\Delta t} - w_t}{\sqrt{\Delta t}} \text{ sendo } \varepsilon_{t+T} \approx N(0,1)$$

O objetivo de fazer isso é "normalizar" o erro. Com isso, obtém-se a seguinte relação importante:

$$\ln V_{A,t+\Delta t} = \ln V_{A,t} + (\mu - \frac{\sigma_A^2}{2})\Delta t + \sigma_A \sqrt{\Delta t}.\varepsilon_{t+\Delta t}$$

Sabendo que a probabilidade de *default* é dada pela equação:

$$P_{def.t} = \Pr ob[V_{A,t+\Delta t} \le B_t / V_{A,t}] = \text{Prob } [\ln (V_{A,t+\Delta t}) \le \ln(B_t)/V_{A,t}]$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611759/CA

É a probabilidade de o valor dos ativos ser menor do que o valor contábil das suas dívidas.

$$P_{def,t} = \Pr ob[\ln(V_{A,t+\Delta t}) - \ln(B_t)/V_{A,t} \leq 0]$$

$$= \text{Prob}\ [\ \ln V_{A,t} + (\mu - \frac{\sigma_A^2}{2})\Delta t + \sigma_A \sqrt{\Delta t}.\varepsilon_{t+\Delta t} - \ln(B_t) \leq 0\ ]$$

$$= \text{Prob}\ [\ \ln V_{A,t} + (\mu - \frac{\sigma_A^2}{2})\Delta t - \ln(B_t) \leq -\sigma_A \sqrt{\Delta t}.\varepsilon_{t+\Delta t}\ ]$$

$$= \text{Prob}\ [-\frac{\ln V_{A,t} + (\mu - \frac{\sigma_A^2}{2})\Delta t - \ln(B_t)}{\sigma_{A\sqrt{\Delta t}}} \geq \varepsilon_{t+\Delta t}\ ]$$

Portanto, a fórmula desejada para a distância de *default*:

$$\text{D.D} = \frac{\ln(\frac{V_{A,t}}{B_t}) + (\mu - \frac{\sigma_A^2}{2})\Delta t}{\sigma_A \sqrt{\Delta t}}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611759/CA

# Apêndice C

**Processo de Wiener Generalizado e Movimento Browniano Simples**

O processo de Wiener generalizado pode ser descrito pela seguinte equação:

$$dx = a\,(x,t)\,dt + b\,(x,t)\,dz \qquad \text{(C.1)}$$

Onde a(x,t) é a função não-aleatória de tendência, b(x,t) é a função não-aleatória de variância, as variáveis presentes nesta fórmula serão definidas adiante. Além de ser um processo estocástico não-estacionário fundamentalmente pelo fato de a sua variância crescer linearmente no tempo, o processo de Wiener possui três características principais, conforme afirmam DIXIT e PINDYCK (1994):

1. É considerado como um processo de Markov pelo fato de que a distribuição de probabilidades dos valores futuros do processo depende somente do seu valor atual, ou seja, não é afetado pelos valores passados do processo ou por qualquer informação;

2. Apresenta incrementos independentes, ou seja, a distribuição de probabilidade para as variações no processo em qualquer intervalo de tempo são independentes de qualquer outro intervalo de tempo (que não se sobreponha ao primeiro);

3. Variações no processo em qualquer intervalo finito de tempo têm distribuição normal, com uma variância proporcional (linear) ao intervalo de tempo ocorrido.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611759/CA

Portanto, supondo que um processo de Wiener apresente uma variável z(t), sua variação ( $\Delta z$ ) em um intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) seria dada pela fórmula:

$\Delta z = \varepsilon t \sqrt{\Delta t}$ , onde, $\varepsilon t$ é uma variável aleatória com distribuição normal, ou seja, $\varepsilon t \sim N(0,1)$; e os valores de $\Delta z$ , para quaisquer intervalos, são independentes. Além disso, a variável aleatória ($\varepsilon t$) não tem correlação serial, ou seja:

$E( \varepsilon t , \varepsilon s) = 0$ para $t \neq s$ .

Ao se considerar um intervalo de tempo infinitesimalmente pequeno, ou seja, $\Delta t \rightarrow 0$ , refletindo na derivada dt = 0, é possível representar o incremento do Processo de Wiener (dz) no tempo contínuo como:

$dz = \varepsilon t \sqrt{\Delta t}$ (C.2)

Pelo fato de que $\varepsilon t \sim N(0,1)$ e tomando a equação C.2, pode-se verificar que o valor esperado da variação de z é zero e sua variância é proporcional ao intervalo de tempo da variação (dt):

$E[dz] = E[ \varepsilon t ]. \sqrt{dt} = 0$, pois $E[ \varepsilon t ] = 0$ (C.3)

$Var [dz] = Var [\varepsilon t . \sqrt{dt} ] = ( \sqrt{dt} )2.Var [\varepsilon t ] = dt .(1)2 = dt$ , pois o $DP [\varepsilon ] = 1$. (C.4)

Logo, define-se que: $dz = \varepsilon t . \sqrt{dt} \leftrightarrow dz \sim N( 0, \sqrt{dt} )$ (C.5)

Voltando à equação generalizada do Processo de Wiener, que já foi anteriormente descrito:

$$dx = a (x,t)\, dt + b (x,t)\, dz \qquad (C.1)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611759/CA

Onde,

• dz é o chamado incremento de Wiener;

• a(x,t) e b(x,t) são funções não aleatórias conhecidas.

Substituindo-se os parâmetros a(x,t) e b(x,t) por, respectivamente, α (conhecido como parâmetro *drift*) e σ (parâmetro de variância), ambos constantes, chega-se à seguinte equação:

$$dx = \alpha\, dt + \sigma\, dz \qquad \text{(C.6)}$$

Nesta equação, α representa o parâmetro de tendência no tempo (ou crescimento), σ o parâmetro de variância, que exprime a incerteza ou ruído do processo, ou seja, determina a amplitude dos choques aleatórios que x sofre ao longo do tempo e é conhecido como volatilidade, e x é um processo estocástico.

Considerando-se em um intervalo de tempo Δt, a mudança em x, denotada por Δx, tem-se:

$$\Delta x = \alpha \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{dt} \qquad \text{(C.7)}$$

Onde:

$$E[\Delta x] = \alpha\, \Delta t \qquad \text{(C.8)}$$

$$Var[\Delta x] = \sigma^2\, \Delta t \qquad \text{(C.9)}$$

O processo *dx* pode ser representado pela soma de um componente determinístico (*drift* ou tendência) com um componente aleatório normalmente distribuído. Pela equação C.2, a soma de uma constante com uma variável aleatória normal resulta numa variável (*dx*) também normal com média α e variância σ2.

O movimento geométrico browniano é, em geral, utilizado para modelar preço, taxas de juros, preços de produtos e outras variáveis financeiras e econômicas. A restrição que existe ao uso do Movimento Geométrico Browniano é o fato de que este processo pode divergir, levando x(t) para o infinito, de forma que alguns modelos que seguem este processo podem não

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611759/CA

ser muito realistas (Brandão, 2001). Uma representação gráfica deste processo está apresentada na figura abaixo:

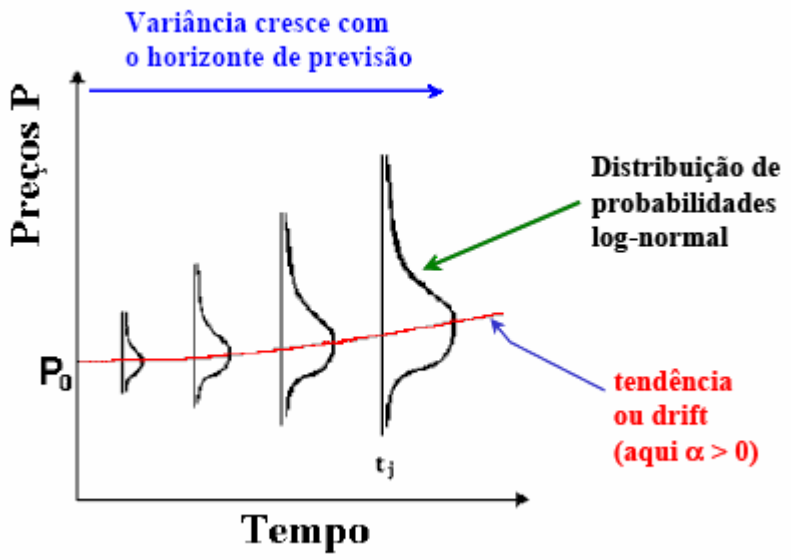


**Figura 30** – Aumento da Variância conforme aumenta o tempo de previsão
**Fonte**: Notas de Aula; Prof. Marco Antonio Dias

O processo de Wiener é um processo estocástico em tempo contínuo. Este processo é caracterizado por ser um processo de Markov, em tempo contínuo, e pode ser utilizado para representar a dinâmica do valor de um projeto, preços de vendas de mercadorias e variáveis em geral, que se desenvolvem estocasticamente no tempo e que afetam a decisão de investir. Conforme DIXIT e PINDYCK (1994), este processo estocástico contínuo de Itô x(t) também pode ser representado pela equação C.1. O processo de Itô é conhecido como Movimento Browniano Generalizado.

No MGB, os parâmetros *drift* e variância são dados por:

$a(x,t) = \alpha x$

$b(x,t) = \sigma x$

Substituindo estes valores na equação do processo de Ito, tem-se:

$$dx = \alpha\, x\, dt + \sigma\, x\, dz \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} = \alpha dt + \sigma dz \qquad \text{(C.10)}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611759/CA

Assim, o comportamento dinâmico de uma variável aleatória, cuja taxa de retorno contínua tem distribuição normal, pode ser descrito pelo MGB. conforme mostra a equação C.10. Contudo, para se manipular esta equação, é preciso um resultado importante de cálculo estocástico conhecido como Lema e Itô.

O processo do MGB tende a divergir para longe do seu ponto de partida original. Esta característica não costuma ser desejada para algumas variáveis como, por exemplo, o preço de commodities. É interessante ressaltar também que o MGB nunca assume valores negativos e, portanto, mais adequados para representar o movimento do preço de ativos financeiros.

Voltando ao caso de processos de Itô, sabe-se que eles são processos contínuos no tempo, mas que não são diferenciáveis pelas regras ordinárias de cálculo. Entretanto, isto seria essencial para a valoração de uma opção. Sendo assim, faz-se necessário utilizar-se o Lema de Itô, chamado também de Teorema Fundamental do Cálculo Estocástico.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611759/CA

**Lema de Itô**

O Lema de Itô pode ser entendido como uma versão da Expansão de Taylor para o cálculo estocástico. O Lema de Itô permite que sejam calculadas funções (ou transformações) processos de Itô. Assim, considerando-se ainda a função F(x,t), que é diferençável ao menos duas vezes em relação a x, e uma vez em relação a t, utilizando-se o Lema de Itô, esta derivada será:

$$dF = \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dx^2}dx^2 + R(x)$$

Onde,

$$R(x) = \frac{1}{6}\frac{dF}{dx^3}dx^3 + \frac{1}{2}\frac{d\ F}{dx^4}dx^4 + \ldots$$

Conhecido como Resto de Itô.

Convencionalmente adota-se $dt^n = 0$ para $n > 1$, $dz^2 = dt$ [27]

Além disso, sabendo que x segue processo de Itô - $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$ :

$$dx^2 = a^2(x,t)dt^2 + a(x,t)b(x,t).dt^{3/2} + b^2(x,t)dt^2 = b^2(x,t)dt$$

$n > 2 \rightarrow dx^n = 0$, ou seja, os termos contidos no Resto de Itô "desaparecem" na fórmula.

Substituindo-se este resultado na equação C.10, tem-se o Lema de Itô:

$$dF = \left[ \frac{dF}{dt}dt + a(x,t)\frac{dF}{dx} + \tfrac{1}{2}b^2\frac{d^2F}{dx^2}dx^2 \right]dt + b(x,t)\frac{dF}{dx}dz$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0611759/CA

[27] $var\,[dz] = Var\,[\varepsilon t\,.\,\sqrt{dt}\,] = (\sqrt{dt}\,)^2\,.\,Var\,[\,\varepsilon t\,] = dt$

$Var(dz) = E[(dz - E[dz])^2] = E[dz]^2 = dt$

$Var(dz^2) = 0 \rightarrow E\,[(dz^2 - E[dz^2])^2] = 0 \rightarrow dz^2 = E\,[dz^2]\ \therefore dz^2 = dt$