2
Técnicas de CEP para Processos Multicanal

Este capítulo apresenta as técnicas existentes na literatura para o controle de processos multi-canal. Ao mesmo tempo, os conceitos fundamentais subjacentes são apresentados, na forma dos diversos modelos e hipóteses básicas assumidas por cada uma das técnicas. Como poderá ser observado são poucos os trabalhos existentes sobre o controle desse tipo de processo, tema ainda pouco explorado na literatura.

2.1.
Group Charts

O uso de gráficos de controle individuais para cada fluxo seria uma alternativa pouco viável para o controle de PMC, sobretudo quando se trabalha com um grande número de canais, dada a sobrecarga da produção, exibição e interpretação simultânea dos diversos gráficos gerados.

Uma alternativa viável são os gráficos de controle de grupos ou *group charts* pela sua facilidade de elaboração e interpretação. Uma *group chart* apresenta, resumidamente, em um único gráfico, informações da característica de qualidade controlada provenientes de todos os fluxos. Tais gráficos foram desenvolvidos por Boyd (1950) e permanecem como a técnica convencional para controle desses tipos de processos, sendo o procedimento padrão recomendado nos livros de CEP como Montgomery (2004), Pyzdek (1992) e outros.

A idéia básica do gráfico de controle de grupos consiste na plotagem apenas dos valores extremos das estatísticas consideradas (maior e menor valor para a estatística em questão entre todos os fluxos em uma determinada amostragem). Estando estes pontos dentro dos limites do gráfico, todos os demais também estarão. Esse conceito pode ser aplicado tanto para o gráfico da média ($\overline{X}$) quanto para o gráfico da amplitude (*R*). Cada valor plotado deve ser identificado no gráfico pelo número do canal a que corresponde para facilitar as análises posteriores.

Pyzdek (1992) destaca que para se aplicar CEP em PMC é importante fazer a distinção entre dois tipos de causas especiais: aquelas que afetam todos os canais, afastando-os do alvo, e aquelas que afetam um ou poucos canais. Geralmente essas causas possuem origens diferentes e sua distinção facilitará tanto a identificação quanto a solução do problema de falta de controle.

Os gráficos de controle de grupos são capazes de monitorar simultaneamente os dois tipos de causas especiais comuns aos PMC. Uma mudança global no processo (que afete todos os canais), será detectada quando, no gráfico de controle de grupos, houver pontos excedendo seus limites. Já a sensibilidade do gráfico baseado apenas nesse critério de detecção ("ponto fora dos limites de controle") para causas afetando apenas um canal é reduzida.

Para verificar se uma causa especial compromete apenas o desempenho de um canal em particular, o gráfico de controle de grupos pode adotar uma regra suplementar de decisão baseada no critério de corridas. Segundo esse critério, proposto inicialmente por L.S Nelson (1986), uma série significativamente longa de valores extremos provenientes de um mesmo canal é interpretado como um sinal fora de controle. Assim, se um canal produzir a leitura máxima ou mínima por r vezes consecutivas, esse canal é considerado como fora de controle. O valor de r é determinado em função do número (s) de canais de um processo. Uma combinação de valores para (r,s) é apresentada por Pyzdek (1992, p.215):

Tabela 2.1 – Comprimento de Corrida significativo (número de valores máximos ou mínimos consecutivos) para um único canal de um PMC.

Número de Canais (s)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Comprimento de corrida significativo (r)	7	5	5	4	4	4	4	4	3	3	3

Fonte: Pyzdek (1992)

De acordo com a Tabela 2.1, para um processo com cinco canais por exemplo, se um mesmo canal apresentar valor máximo ou mínimo por quatro vezes consecutivas, este estará fora de controle.

O número médio de amostras observadas até que ocorra um sinal no gráfico de controle é denotado por NMA (Costa *et al.*, 2004). Existem dois tipos de NMA. O primeiro, conhecido por NMA sob controle, ou NMA_0, representa o número médio de amostras observadas até que ocorra um alarme falso, quando o processo encontra-se sob controle. O segundo, conhecido por NMA fora de controle, ou NMA_1, representa o número médio de amostras observadas entre o momento em que a causa especial ocorreu e o momento em que esta é detectada.

Uma alternativa para se escolher o valor crítico de *r* é calcular o NMA_0 para diferentes valores de *r* e adotar o valor de *r* correspondente ao menor NMA_0 aceitável dentre os calculados.

L.S Nelson (1986), apud P.R Nelson (1986) fornece o seguinte resultado: para um processo com *s* canais idênticos, o número médio de amostras necessárias para gerar *r* vezes consecutivas o valor máximo (ou mínimo) por um mesmo fluxo, quando o processo está sob controle estatístico, é dado por:

$$NMA_0 = \frac{s^r - 1}{s - 1} \tag{2.1}$$

Por exemplo, se um processo contém cinco canais e um mesmo canal apresentar o valor máximo ou mínimo por quatro vezes consecutivas, seu NMA_0, será:

$$NMA_0 = \frac{5^4 - 1}{5 - 1} = 156 \tag{2.2}$$

o que significa que, estando o processo sob controle estatístico, espera-se que um mesmo canal gere um valor máximo (ou mínimo) no gráfico de controle quatro vezes consecutivas em média, apenas uma vez a cada 156 amostras.

Assim como os gráficos de controle convencionais, o uso de *group charts* também exige que o processo em análise apresente determinadas características, ou seja, para uso do gráfico de controle de grupos é necessário que:

- Não haja autocorrelação ou correlação cruzada entre os canais; e
- Todos os canais tenham a mesma distribuição (e com mesma média e mesma variância), e estejam ajustados em um mesmo valor-alvo. Caso a média varie de canal para canal, mas a amplitude permaneça constante, Pyzdek (1992) menciona que pode ser construído um gráfico de controle de grupos para as diferenças de cada canal em relação à sua média. É

evidente que dificilmente serão encontrados valores exatamente iguais para as médias e as dispersões (amplitude) dos diversos canais, havendo, portanto, uma diferença entre estes. Mas é importante que tais diferenças não sejam significativas, porque se houver um canal muito diferente dos demais, este produzirá sempre valores extremos, escondendo mudanças sofridas pelos outros canais.

Na prática, essas premissas muitas vezes não são verificadas. Além disso, os gráficos de controle de grupos, em sua forma clássica, apresentam uma série de desvantagens que os torna uma ferramenta de aplicação limitada, como por exemplo, o fato de não serem muito práticos quando o processo apresenta o número de canais muito grande, dado que todos os canais devem ser considerados a cada período de amostragem. Uma possível solução para esse tipo de problema é alternar observações, coletando a cada instante de amostragem, observações de apenas parte dos canais, de maneira cíclica. Ver Ott e See (1973). Outra desvantagem é uma limitação do critério de corridas de L.S Nelson (1986), quando há mais de um canal fora de controle simultaneamente. Neste caso, os valores extremos podem se alternar entre esses canais, impedindo que seja gerada uma seqüência suficientemente longa (de comprimento igual ou menor que *r*) de máximos ou mínimos oriundos de um só canal, como sinal de descontrole.

Outra desvantagem, mencionada por Montgomery (2004, p.288), do critério de corridas está relacionada ao fato de o NMA_0 do mesmo ser discreto.

A Tabela 2.2 mostra, em função do número de canais do processo (para diversos valores de *r*), o número médio de amostras até que se observe uma seqüência de *r* valores máximos ou mínimos consecutivos de um mesmo canal, supondo o processo em controle (todos os canais com a mesma média e mesma variância).

Valores consideráveis para o NMA_0 de um esquema de CEP costumam variar entre 200 e 500. O valo de 370 é um "padrão", que corresponde ao NMA_0 nominal no gráfico de $\overline{X}$ com limites de 3σ. O valor de 200 é o mínimo recomendado quando se deseja uma grande sensibilidade do gráfico de controle. Já o valor de 500, é o máximo que se vê em trabalhos de pesquisa.

Tabela 2.2 – NMA_0 para Processos sob Controle com Critério de Corridas em PMC

Número de	Comprimento de Corrida Significativo (*r*)					
Canais (*s*)	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	3	7	15	31	63	127
3	4	13	40	121	364	1093
4	5	21	85	341	1365	5461
5	6	31	156	781	3906	19531
6	7	43	259	1555	9331	55987
7	8	57	400	2801	19608	137257
8	9	73	585	4681	37449	
9	10	91	820	7381	66430	
10	11	111	1111	11111		
15	16	241	3616	54241		
20	21	421	8421			
30	31	931	27931			
50	51	2551				
100	101	10101				

Fonte: própria

É fácil observar que, para vários valores de *s*, e um NMA_0 de 370, por exemplo, o critério de corridas não fornece NMA_0's nesta faixa e muito menos, o valor exato. Considere, por exemplo, um processo com 10 canais. Os valores mais próximos de 370 são 111 ou 1111 amostras. A adoção dos parâmetros associados ao menor NMA ($r = 3$) acarretará um grande número de alarmes falsos. Por outro lado, a escolha dos parâmetros associados ao maior NMA ($r = 4$) implicará na retirada de um grande número de amostras até que a situação real de fora de controle seja detectada, aumentando assim o tempo de detecção. Maiores NMA_0's correspondem também a maiores NMA_1's. Assim, o valor selecionado para *r* consiste num *trade-off* entre o número de alarmes falsos produzidos pelo gráfico e o tempo de detecção de uma causa especial; mas, dependendo do número de canais do processo, pode-se não chegar a uma boa solução de compromisso. Isso pode ocorrer para qualquer valor de NMA_0 especificado como desejável, não apenas para 370.

2.2. Métodos Alternativos às *Group Charts*

2.2.1. Método de Mortell e Runger

Reconhecendo as limitações do esquema de corridas e do cenário de validade dos seus pressupostos, bem como dos pressupostos do gráfico controle de grupos clássico, Mortell e Runger (1995), desenvolveram um esquema de controle para PMC em que há correlação cruzada entre os canais.

Para controlar os dois tipos de causas comuns aos PMC (aquelas que afetam todos os canais simultaneamente e aquelas que afetam um único canal), os autores citados utilizaram um modelo que decompõe a variabilidade do processo em duas partes, e propuseram controlar separadamente, por meio de dois gráficos de controle distintos, cada uma dessas partes.

O modelo de processo por eles adotado é:

$$Y_{tjk} = \mu + A_t + e_{\mathrm{tjk}} \tag{2.3}$$

onde

Y_{tjk} = variável aleatória que representa a o valor esperado da k-ésima observação do canal j no instante t.média do subgrupo[2] do canal j no instante t;

μ = média global do processo (constante);

A_t = variável aleatória normalmente distribuída com média igual a zero e variância igual a σ_a^2, que representa o valor esperado das medidas de todos os canais no instante de tempo t. Pode ser interpretada como a parcela da variação que é comum a todos os canais (nível-base);

---

[2] Os subgrupos representam um conjunto de dados gerados por um único canal quase num mesmo instante de tempo. Considere, por exemplo, um processo de cinco canais, sendo que, a cada amostragem, amostras de duas unidades são retiradas de cada um dos canais do processo. Nesse caso, para cada amostragem, tem-se cinco subgrupos de tamanho dois, sendo que estas duas unidades advindas de um mesmo canal foram amostradas em instantes muito próximos (que podem, para efeito de modelagem, ser considerados como um mesmo instante t).

e_{tjk} = variáveis i.i.d para $\forall t, j$, com média zero e variância igual a σ^2, que representa o desvio da média do canal j em relação à média de todos os canais no instante t. Pode ser interpretada como a parcela de variação individual de cada canal.

Daqui em diante, por simplicidade, será adotada a nomenclatura M&R para representar a referência Mortell e Runger (1995).

Para a detecção de mudanças comuns a todos os canais (mudanças em A_t), M&R utilizam uma variação do gráfico de controle de Shewhart, no qual a estatística plotada Y_t representa a média dos subgrupos de todos os canais $\left(Y_t = \sum_{j=1}^{s} Y_{tj} \big/ s \right)$. Como conseqüência, este gráfico apresentará limites de controle mais estreitos do que as *group charts*, para um mesmo NMA_0, o que o torna uma ferramenta mais sensível à detecção de causas especiais que afetem a média de todos os canais simultaneamente. De fato, pelo modelo apresentado em (2.3) a variância de Y_{tj} é igual a $V(Y_{tj}) = \sigma_a^2 + \sigma^2 \big/ n$, e uma *group chart* tem seus limites baseados nessa variância, enquanto a estatística Y_t tem variância dada por $V(Y_t) = \sigma_a^2 + \sigma^2 \big/ ns$. Note-se que, a cada instante t, A_t assume um único valor; por isso a componente σ_a^2 da variância não é reduzida ao se calcular Y_t como a média dos s valores de Y_{tj} nos diversos (s) canais.

Para detectar alterações na componente do processo referente a um canal individual (ou em mais de uma dessas componentes individuais dos canais), isto é, mudanças nos parâmetros dos $e_{tj}'s$, eles utilizam a amplitude das médias dos fluxos no instante t para detectar mudanças na média de um ou poucos canais, denotada por:

$$R_t = MaxY_{tj} - MinY_{tj} \tag{2.4}$$

onde,

$MaxY_{tj}$ = máximo valor obtido dentre as médias de todos os subgrupos;

$MinY_{tj}$ = mínimo valor encontrado dentre as médias de todos os subgrupos.

O gráfico da amplitude tem a característica de ser sensível apenas a variações que afetem os canais individualmente e não a variações na parcela A_t, comum a todos os canais. De fato, em (2.4) as parcelas $(\mu + A_t)$ em $MaxY_{tj}$ e em $MinY_{tj}$ se anulam mutuamente, o que resta é $Max(e_{t_j})$- $Min(e_{t_j})$. Desta maneira, a parcela σ_a^2 da variância de Y_{tj} é eliminada, o gráfico de R_t tem desempenho superior às *group charts*, principalmente quando a variação nas médias do processo ao longo do tempo é superior à parcela de variação individual de cada fluxo, ou seja, quando $\sigma_a^{\,2} > \sigma^2$.

No mesmo artigo, M&R propuseram também a abordagem do resíduo máximo como alternativa ao uso de R_t como variável de controle. Para obter o resíduo máximo subtrai-se a média global (Y_t) de todos os canais da máxima média observada em todos os canais $(\max(Y_{tj}))$. Se este resíduo estiver abaixo do limite superior de controle, LSC, todos os demais resíduos também estarão. Análise semelhante é válida para o resíduo mínimo comparado com o limite inferior de controle, LIC, não sendo necessário, portanto, plotar os resíduos de todos os canais. Da mesma forma que o gráfico de R_t, o gráfico de controle dos resíduos máximos e mínimos (que corresponde a uma *group chart* dos resíduos) é insensível a variações na parcela comum A_t, sendo, portanto, uma forma de isolar a variação dos $e_{tj}'s$. Com isso, os limites do gráfico dos resíduos se tornam mais estreitos que os limites de uma *group charts* dos $Y_{tj}'s$, tornando tal gráfico, portanto, mais sensível a alterações na média de algum canal individualmente.

Através de estudos analíticos e simulações, M&R compararam o desempenho de diversos esquemas de controle para detectar mudanças que afetem um ou poucos canais. Gráfico de Shewhart, CUSUM e EWMA (com constantes de amortecimento iguais a 0,1; 0,3 e 0,8) da estatística R_t foram comparados ao esquema de corridas e ao CUSUM do resíduo máximo. Para cada método foram considerados processos com 2, 3, 5, 10 e 20 canais, sendo que a média de um dos canais foi alterada de 0 para 0,5; 1; 1,5 e 2, e o desempenho dos diversos esquemas, foi então comparado.

Não houve uma uniformidade dos resultados: o esquema de melhor desempenho variou conforme o número de canais do processo e a magnitude da mudança sofrida pelo canal; a saber:

- O gráfico de Shewhart apresentou o pior desempenho para mudanças menores que 2σ, não sendo indicado, portanto, para detecção de pequenas variações.
- O gráfico de EWMA com fatores de ponderação menores apresentou melhor desempenho na detecção de pequenas mudanças, enquanto o gráfico EWMA com fatores de ponderação maiores apresentou melhor desempenho na detecção de mudanças maiores. Ainda assim, e, apesar da escolha de um fator correto de ponderação torná-lo um candidato viável para a detecção de mudanças em um ou poucos canais, seu desempenho foi inferior ao desempenho do CUSUM e do esquema de corridas.
- O CUSUM que utiliza a estatística R_t como variável de controle apresentou melhor desempenho tanto para poucos canais e grandes mudanças, como para muitos canais (acima de 20) e pequenas mudanças.
- O esquema de corridas apresentou melhor desempenho tanto para poucos canais e pequenas mudanças como para muitos canais (acima de 20) e grandes mudanças.

Desta forma, os autores apresentam um esquema de controle que sintetiza em um par de gráficos as informações provenientes de todos os canais de um processo, o que permite o controle de dados que apresentem correlação serial no nível-base.

O trabalho de Mortell e Runger (1995) representa um grande passo, ao reconhecer explicitamente em seu modelo as duas parcelas independentes do valor da variável medida em cada canal – parcela comum e parcela individual do canal – e também ao propor esquemas de controle que decomponham as medidas nessas duas parcelas para monitorá-las separadamente. Todos os trabalhos posteriores seguem essa linha.

2.2.2. Runger, Alt e Montgomery

Como visto na seção anterior, M&R apresentaram uma alternativa ao gráfico de controle de grupos tradicional que garante a superação de algumas de suas limitações. O método de controle descrito baseia-se no modelo apresentado pela equação (2.3).

Runger, Alt e Montgomery (1996) aproveitam o modelo de PMC descrito por M&R ($Y_{tj}= \mu + A_t + e_{tj}$) e descrevem uma técnica de controle para PMC com dados autocorrelacionados baseada na Análise de Componentes Principais, PCA. ("... *PCA is a statistical technique for transforming a set of* s *random variables into a new set of* s *Principal Components Variables, PCVs, that are mutually independent, where each PCV is a linear combination of the original variables*" - Runger, Alt e Montgomery 1996, pag. 2993).

Tratam os processos multicanais como um caso particular de processos multivariados e, assim como M&R, utilizam dois gráficos de controle distintos para monitorar as diferentes fontes de variação desse tipo de processo.

O primeiro gráfico de controle monitora a variável "primeira componente principal" que é, fundamentalmente, a média de todos os canais num determinado instante de tempo. Este gráfico é responsável por detectar causas especiais que afetem todos os canais, e nada mais é que o gráfico do "nível-base" Y_t sugerido por M&R para o controle desse tipo de causa.

O segundo gráfico de controle se baseia na estatística T^2 de Hotelling (estatística utilizada para o controle da média de processos multivariados, análoga à estatística $\overline{X}$, do caso univariado) dos outros s-1 componentes principais, onde s representa o número de canais do processo. Este gráfico corresponde ao gráfico de S^2 (qui-quadrado), e é responsável pelo monitoramento de causas especiais que afetem a uniformidade entre canais. Um sinal nesse gráfico é resultado de uma causa especial que tenha alterado a média de um ou alguns canais. É, essencialmente, um gráfico de Shewhart, no qual a decisão de controle é baseada apenas nos dados mais recentes e, apresenta a vantagem de ser insensível às mudanças que afetem a média global do processo.

Os autores sugerem ainda a aplicação de um esquema EWMA a fim de obter uma melhoria no desempenho gráfico de S^2 para a detecção de pequenas mudanças. O gráfico resultante, MEWMA, é uma extensão do EWMA univariado, porém com abordagem um pouco diferente da abordagem MEWMA tradicional para processos multivariados: no MEWMA proposto, primeiro os dados são amortecidos e só depois incorporados à estatística S^2, enquanto no MEWMA convencional a estatística S^2 é amortecida. Os autores constatam que, à medida que o número de canais aumenta, obtêm um grande aumento da sensibilidade do gráfico de S^2 a pequenas variações, especialmente quando o *shift* (magnitude da mudança sofrida pelo canal) ocorre em mais da metade dos canais do processo, caso em que seu desempenho é maximizado.

Embora esse esquema de controle possa ser apresentado e compreendido dentro dessa formalização de CEP multivariado, no caso particular do modelo de processo multicanal considerado, o fato de haver apenas uma componente principal e o fato de todas as parcelas residuais dos canais possuírem, por hipótese, o mesmo desvio-padrão, faz com que (como se viu) o gráfico de T^2 degenere em um gráfico de S^2, já preexistente, ainda que pouco utilizado pela indústria (que prefere o gráfico de S que é totalmente equivalente). Assim, o esquema de Runger *et al.* (1996) pode ser compreendido como semelhante ao esquema de M&R, controlando a "uniformidade" entre canais por um gráfico de S^2 no lugar de um gráfico da amplitude R.

2.2.3. Colbeck

Colbeck (1999) apresenta quatro métodos distintos para controle de dados provenientes de um processo multicanal e compara o seu desempenho através de estimativas para NMA_0 e NMA_1, geradas por simulações computacionais.

O critério adotado para análise do desempenho baseia-se na idéia de que quando o processo está sob controle não é esperado observar com freqüência sinais fora de controle, pois estes seriam alarmes falsos. Assim, é desejável que o método analisado apresente valores altos para NMA_0. Por outro lado, quando o processo está fora de controle, o ideal é que esta situação seja detectada o quanto antes. Neste caso, é desejável que o método analisado produza valores baixos para NMA_1. Desta forma, o método de controle ideal seria aquele que produzisse ao mesmo tempo o maior valor para NMA_0 e o menor valor para NMA_1.

O primeiro método proposto consiste em estabelecer os limites para as *group charts* em função da média e do desvio-padrão das distribuições do máximo e mínimo de uma amostra da normal padrão. Colbeck (1999) obtém estes parâmetros por simulação de Monte Carlo e demonstra que, apesar do formato das distribuições dos valores máximo e mínimo não se distanciar muito do formato de uma distribuição normal, sua média é diferente de zero e seu desvio-padrão diferente de um. A implicação disso é que os limites resultantes são mais afastados da linha média que os limites que os limites do gráfico de controle de grupos tradicionais, principalmente quando há um grande número de canais.

O segundo método, intitulado "Fatores de Correção", leva em conta que a taxa de alarme falso global é maior que a taxa de alarme falso de cada canal individualmente, e com base neste modelo, determina os limites de controle que produzirão uma taxa de alarme falso global especificada; tais limites variam em função do número de canais do processo. O Apêndice A apresenta o detalhamento deste método e aponta um erro diagnosticado em seu desenvolvimento.

O terceiro método utiliza o gráfico de controle de grupos tradicional com "limites de três sigma", independentes do número de canais que compõem o processo. Este método foi apresentado como uma referência de comparação para as medidas de desempenho dos outros métodos a serem testados.

O quarto método, denominado "Limites de Controle Simulados" determina experimentalmente, por simulação de Monte Carlo, os valores para os limites de controle que produzam uma taxa de alarme falso global especificada (no caso de 0,27%).

Os limites de controle resultantes dos quatro métodos podem ser visualizados na Tabela 2.3. Os termos LSC^i_s e LIC^i_s, utilizados para cálculo dos limites de controle dos métodos um, dois e quatro, representam os limites de controle superior e inferior respectivamente, para o *i*-ésimo método (i =1, 2 e 4) para processos com *s* canais (s = 2 até 10). É nestes termos que reside a peculiaridade de cada método. Para o método um, por exemplo, são limites de 3σ calculados a partir das médias e dos desvios-padrão das distribuições dos valores máximos e mínimos plotados no *group chart*. Colbeck extrai os valores de $\mu_{\max}$, $\mu_{\min}$ e $\sigma_{\max/\min}$, que variam em função do número de canais do processo, da distribuição de máximos e mínimos de amostra de tamanho *n* de uma distribuição normal padrão, tabelada por Godwin (1949).

Tabela 2.3 – Limites de Controle para os Quatro Métodos

MÉTODO ANALISADO	LIMITES DE CONTROLE	LIMITES DE CONTROLE$_s^i$
1-Distribuição dos Máximos e Mínimos	$LSC = \mu + LSC_S^1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $LC = \mu$ $LIC = \mu + LIC_S^1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$LSC_s^1 = \mu_{máx} + 3\sigma_{máx/mín}$ $LIC_s^1 = \mu_{mín} - 3\sigma_{máx/mín}$
2- Fatores de Correção	$LSC = \mu + LSC_s^2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $LC = \mu$ $LIC = \mu - LIC_s^2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$LSC_s^2 = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{p}{2}\right)$ $LIC_s^2 = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{p}{2}\right)$ onde Φ representa a distribuição acumulada da normal padrão.
3- *Group Charts* Tradicional	$LSC = \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $LC = \mu$ $LIC = \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	
4- Limites de Controle Simulados	$LSC = \mu + LSC_s^4 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $LC = \mu$ $LIC = \mu - LIC_s^4 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	LSC_s^4 = limite superior de controle estimado para um processo normal padrão, via simulação $LIC_S^4 = LSC_S^4$

Fonte: Própria

Vale ressaltar que, para o método dos fatores de correção a probabilidade *p* presente nas fórmulas dos limites de controle representa a probabilidade de alarme falso por um canal individual, calculada a partir da probabilidade de alarme falso global 0,0027 e em função de *s*.

Quando a média e o desvio-padrão do processo em questão forem desconhecidos, devem ser substituídos por suas estimativas, o que implica numa alteração dos limites de controle que passariam a ser escritos da seguinte forma:

$$LSC = \overline{\overline{X}} + LSC_s^i \left(\frac{\overline{\overline{R}}}{d_2\sqrt{n}} \right) \tag{2.5}$$

$$LC = \overline{\overline{X}} \tag{2.6}$$

$$LIC = \overline{\overline{X}} - LIC_s^i \left(\frac{\overline{\overline{R}}}{d_2\sqrt{n}} \right) \tag{2.7}$$

No caso da *group chart* tradicional em particular, os termos LSC^i_s e LIC^i_s devem ser substituídos pelo valor 3.

Valores de NMA_0 e NMA_1 dos métodos propostos foram calculados a partir de simulações computacionais para que seus desempenhos pudessem ser comparados.

O Método 1, que utiliza a distribuição dos máximos e mínimos para cálculo dos limites de controle, apresentou um bom NMA_1 e NMA_0 considerado aceitável. O Método 2, que utiliza fatores de correção, apresentou valores de NMA_0 muito altos mas um pobre poder de detecção indicado por altos valores de NMA_1. Isso se explica devido ao erro de Colbeck no cálculo dos limites, ver Apêndice A. A *group chart* tradicional, (Método 3), apesar de demonstrar um excelente potencial associado ao NMA_1, teve um NMA_0 considerado inaceitável, ou seja, produz muitos alarmes falsos quando o processo está sob controle (o que já era de se esperar, dado que a taxa de alarme falso global é maior que a individual, e cresce com o número de canais). Por fim, o Método 4, dos limites de controle simulados apresentou o melhor desempenho tanto em termos de NMA_0 quanto de NMA_1.

Esses resultados e conclusões, porém, são conseqüências de vários erros e equívocos. Sem dúvida, os limites de 3σ só poderiam levar a uma taxa de alarmes falsos que cresce com o número de canais; Colbeck mostrou isso. Porém, o método dos fatores de correção só não resultou no NMA_0 desejado devido ao erro de cálculo cometido pelo autor.

Quanto ao Método 1, que considera as distribuições do máximo e do mínimo, a grande diferença encontrada por Colbeck entre os NMA_0's obtidos e os desejados deve-se ao uso de limites de controle baseados na média e no desvio-padrão das distribuições, o que é inadequado, pois as distribuições são assimétricas. A semelhança visual, observada por Colbeck (1999), do seu histograma (gerado por simulação) com a forma de uma distribuição normal é enganosa: nas caudas (justamente na região além dos três desvios-padrão) a diferença é muito grande. O autor deveria trabalhar com limites baseados nos quantis das distribuições $\left(\text{quantis de } 1-\alpha/2\right)$. Neste caso, seus limites coincidiriam com os limites calculados com fatores de correção (se tivessem sido calculados corretamente), pois os eventos "máximo e mínimo dentro dos limites" e "todos os pontos dentro dos limites" são equivalentes. Ele ignorou as expressões das distribuições acumuladas de máximo e mínimo, que são construídas exatamente a partir das equivalências entre os eventos "$\max X_i \le b$" e $\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \le b)$ e entre os eventos "$\min X_i \le a$" e o complemento de $\bigcap_{i=1}^{n}(X_i > a)$.

Portanto, seria desnecessário trabalhar com as distribuições de máximo e mínimo, pois chegar-se-ia aos limites estabelecidos pelo método dos fatores de correção. Por exemplo, a distribuição acumulada do máximo é:

$$F_{\max X}(b) = [F_x(b)]^s \tag{2.8}$$

onde,

s = ao número de canais do processo e, fazendo $b = F_{\max X^{-1}}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$

então

$$[F_x(b)]^s = \left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \therefore b = F_x^{-1}\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{s}}\right] \tag{2.9}$$

o que significa que ambos os métodos levam ao mesmo limite.

Fica claro então, porque os limites obtidos por simulação forneceram melhor resultado: neles Colbeck (1999) não comete nenhum erro. Apenas, possuem a imprecisão inerente à simulação. Seus valores exatos poderiam ter sido calculados pelo método de fatores de correção.

A Tabela 2.4 a seguir apresenta os valores dos limites superiores de controle estimados, $LSC_s{}^4$, obtidos para $\alpha = 0{,}0027$ e os valores exatos para os mesmos, calculados por:

$$k = \Phi^{-1}\left(0{,}99865^{\frac{1}{s}}\right) \tag{2.10}$$

Tabela 2.4 – Comparação dos Limites de Controle obtidos por Simulação (Método 4) e Limites de Controle exatos (obtido por 2.10)

Número de canais	LSC exatos obtidos por (2.10)	$LSC_s{}^4$
2	3,21	3,23
3	3,32	3.35
4	3,40	3.41
5	3,46	3.47
6	3,51	3.51
7	3,55	3.55
8	3,58	3.59
9	3,62	3.62
10	3,64	3.65

Fonte: Própria

De qualquer forma, mesmo os limites corretamente corrigidos (calculados como mostrado no Apêndice A), aplicam-se ao caso de observações independentes, o modelo de processo adotado pela *group charts* tradicionais, e não consideram a existência de correlação cruzada entre os valores dos diversos canais, em decorrência da parcela comum de variação, situação que é mais típica dos processos multicanal reais.

2.2.4. Passos

Passos (2005) desenvolveu uma técnica para o controle estatístico de um processo de enchimento com múltiplos canais de uma multinacional da região Sudeste, que apresentava autocorrelação e correlação cruzada entre os canais.

Para tanto, propôs a decomposição dos valores da característica de qualidade em cada canal em duas parcelas: uma, representando o nível-base e outra, representando a diferença individual de cada canal em relação ao nível-base. Tal estratégia foi utilizada como alternativa para a eliminação da correlação cruzada existente entre os canais (decorrente da parcela comum), fazendo com que cada uma das parcelas correspondentes fosse apenas autocorrelacionada. Para monitorar essas duas parcelas de variação foram utilizados dois pares de gráficos:

- Um par de gráficos de X (gráfico de observações individuais), e MR (*moving range*) das médias (em cada instante de tempo) dos *s* canais, para o monitoramento de variações no nível-base, a fim de detectar mudanças que afetem o processo como um todo.
- Um par de *group charts* de X e MR para as diferenças calculadas de cada canal em relação ao nível-base, a fim de detectar variações individuais em um ou poucos canais. Esse par de gráficos corresponde ao esquema de controle alternativo indicado por M&R (do "resíduo máximo" e "resíduo mínimo"), porém com algumas particularidades no que se refere aos limites de controle utilizados.

O processo em questão, além de apresentar correlação cruzada entre os canais e correlação serial do nível-base, apresentou também correlação serial das diferenças em relação ao nível-base, o que inviabilizou o uso das *group charts* tradicionais. Nem mesmo o esquema proposto por M&R considerou a questão da correlação serial das diferenças em relação ao nível-base, também não sendo uma alternativa viável para o processo em questão. Desta forma, Passos (2005) trabalhou com uma adaptação das *group charts* tradicionais, modificando as fórmulas de cálculo dos limites de controle para considerar tal correlação.

Outra peculiaridade do processo analisado é que seus canais não tinham mesma média e mesma variância, e que tais médias não foram ajustadas antes de se calcular os limites de controle para as *group charts*. Na verdade, não havia a possibilidade de ajuste individual dos canais, dado que, por se tratar de mangueiras, podiam no máximo ser trocadas. Em contrapartida, a capacidade do processo, segundo a empresa, era alta. A alternativa adotada para controlar as diferenças em um mesmo par de *group charts* foi usar, em cada *group chart*, o maior dentre os LSC's calculados para todos os canais individualmente (de acordo com seus parâmetros) e, o menor dentre todos os LIC's.

Especificamente, o procedimento adotado foi, a partir de uma série histórica de observações individuais em cada um dos (20) canais:

- Estimar o nível-base a cada instante t, pela média aritmética das observações individuais dos 20 canais;
- Calcular as diferenças de cada observação individual de cada canal em relação ao nível-base;
- Estudar a série do nível-base e as 20 séries de diferenças, quanto a autocorrelação e correlações cruzadas;
- Tendo sido identificadas autocorrelações, sendo porém as séries estacionárias, estimaram-se as médias e desvios-padrão totais de cada série de dados (i.e., do nível-base e de cada uma das 20 diferenças), diretamente a partir dos dados. Vale a pena repetir que as séries de diferenças possuíam médias não nulas e distintas entre si, bem como diferentes desvios-padrão;
- Com base nesses parâmetros, calcularam-se limites "de três-sigma" para gráficos de observações individuais e de amplitude móvel para cada uma das séries de diferenças e para o nível-base; conseqüentemente, obtiveram-se diferentes limites para as diferentes séries (canais); vale ainda explicitar que, dada a autocorrelação, os limites para os gráficos de observações individuais não foram calculados em função da amplitude móvel média mas sim do desvio-padrão de longo prazo obtido diretamente dos dados;
- Os gráficos de observações individuais possuíam dois limites (superior e inferior), os de amplitude móvel, somente limite superior (ou pode-se considerar que todos possuíam limite inferior em zero); em qualquer caso, chamando de LSC_j e LIC_j os limites superior e inferior, respectivamente, calculados para o canal j, então os limites adotados para a *group chart* de todos os canais foram:

$$LSC_{group\,chart} = Max(LSC_j) \text{ para } j = 1, 2, 3 \ldots s \quad (2.11)$$

$$LIC_{group\,chart} = Min(LIC_j) \quad \text{para } j = 1, 2, 3 \ldots s \qquad (2.12)$$

As equações (2.11) e (2.12) valem tanto para a *group chart* de observações individuais quanto para a de amplitude móvel, desde que com os limites LSC_j e LIC_j correspondentes a cada caso.

É fácil observar, pelas equações (2.11) e (2.12) que a distância dos limites de controle à média de cada diferença individual (de cada canal), em número de desvios-padrão das diferenças do canal em questão, variava de canal para canal, sendo, em geral, maior que a distância obtida pelas fórmulas tradicionais de limites de 3σ ou de probabilidade. A empresa justificou a escolha de tal procedimento pela simplicidade e pela alta capacidade do processo.

Por essa mesma constatação de que a distância, para a maioria dos canais, era superior a 3σ, Passos não se preocupou em “corrigir” a abertura dos limites: tal correção seria desnecessária e mesmo excessiva.

A dissertação deixou em aberto a questão da avaliação do desempenho do esquema proposto, que não pôde ser realizada por falta de tempo. Outra direção de prosseguimento também indicada por Passos (2005), foi a avaliação da alternativa de se trabalhar com *group charts* para as diferenças padronizadas (com média zero e desvio-padrão um) em relação ao nível-base, o que permitiria o uso de limites de controle com fatores de abertura (distância à média em número de desvios-padrão), equivalentes para todos os canais.

A partir das direções de prosseguimento indicadas por Passos (2005), a presente dissertação desenvolve um esquema de controle baseado nas diferenças de cada canal em relação ao nível-base para processos cujos canais apresentem mesma média e mesma variância, analisa o seu desempenho e compara-o com o desempenho do esquema de M&R. O esquema também pode ser aplicado ao monitoramento das diferenças padronizadas no caso de canais com diferentes médias e variâncias. Apenas na interpretação dos resultados aqui presentes, para este caso é importante ter em mente que um mesmo *shift* padronizado corresponde a diferentes magnitudes de *shift* na unidade de medida da característica de qualidade para canais com diferentes desvios-padrão.