7
Seleção de Carteiras de Projetos via *Value-at-Risk*

A alocação ótima de capital deve ser dividida em duas etapas: primeiro, deve-se reduzir o conjunto das potenciais alternativas de investimento, excluindo as opções indesejadas, ou ineficientes, com base em um determinado critério de eficiência. Segundo, faz-se a escolha dos projetos da carteira de acordo com as preferências individuais do investidor.

Este capítulo mostra como construir o conjunto eficiente com base em dois critérios de eficiência: (i) Dominância Estocástica de Primeira Ordem e (ii) Dominância Estocástica de Segunda Ordem. Em seguida, são apresentados três modelos para seleção de carteiras que permitem incorporar o critério do VaR no processo de otimização do *portfolio*: (i) Média Variância, (ii) Minimax e (iii) *Conditional Value at Risk.*

7.1.
Conjunto Eficiente das Alternativas de Investimento

De acordo com Levy e Sarnat [21], o critério de eficiência pode ser definido como uma regra de decisão que permite dividir o conjunto das alternativas de investimento em duas classes: o conjunto eficiente e o conjunto ineficiente.

A forma pela qual um determinado critério de eficiência pode reduzir o tamanho do conjunto eficiente depende da quantidade de informações a respeito da classe de investidores analisados, ou seja, do formato da sua função utilidade. Por exemplo, poder-se-ia construir um conjunto eficiente com a premissa de que a classe de investidores possui uma função de utilidade quadrática. No entanto, as conclusões da análise seriam válidas somente para essa classe de investidores, perdendo a aplicabilidade para os investidores com funções de utilidade diferentes. Portanto, para aumentar a aplicabilidade do critério de eficiência, deve-se buscar a maior generalidade possível em relação às preferências dos investidores.

Nesta dissertação, serão utilizados dois critérios para a construção do conjunto eficiente: o primeiro (Dominância Estocástica de Primeira Ordem - DEP), mais geral, assume apenas que a função utilidade dos investidores é não decrescente, isto é, assume que para os investidores, quanto mais dinheiro, melhor. Nenhuma restrição em relação ao risco é imposta. O segundo (Dominância Estocástica de Segunda Ordem - DES), assume uma função de utilidade côncava, ou seja, considera que os investidores são avessos a risco. Aversão a risco implica que entre duas alternativas de igual retorno, o investidor prefere a de menor risco.

7.1.1.
Dominância Estocástica de Primeira Ordem - DEP

O critério da DEP não impõe nenhuma restrição em relação à função utilidade além da premissa de que ela deve ser não decrescente em relação aos retornos, isto é, a primeira derivada da função utilidade não pode ser negativa (restrição de primeira ordem). Assim, a função utilidade pode conter partes côncavas e convexas. A regra da DEP pode ser enunciada como:

> *Dadas duas distribuições de probabilidade A e B, a opção A será preferível em relação à opção B, por DEP, independentemente do comportamento em relação ao risco do investidor, se $F_A(R) \leq F_B(R)$[14] para todos os retornos R, sob a condição de que, para pelo menos um valor de R ($R=R_0$) a desigualdade $F_A(R_0) < F_B(R_0)$ é válida.*

Uma condição necessária e suficiente para que uma opção *A* domine uma opção *B*, por DEP, é que as funções de distribuição acumulada não tenham nenhum ponto de cruzamento. Assim, a função de distribuição acumulada da opção *A* deve estar sempre à direita da distribuição acumulada da opção *B*. A Figura 7.1 apresenta as distribuições acumuladas de quatro potenciais alternativas de investimento: *A*, *B*, *C* e *D*. Claramente, a opção *A* domina a opção *B*, pois em todo domínio de retornos *R*, a função de distribuição acumulada de *A* está à direita de *B*, ou seja, $F_A(R) \leq F_B(R)$. As opções *C* e *D* também são preferíveis em relação

[14] $F_A(R)$ e $F_B(R)$ representam as probabilidades acumuladas até o ponto *R* das opções *A* e *B*, respectivamente.

à opção *B*, na medida em que $F_C(R) \leq F_B(R)$ e $F_D(R) \leq F_B(R)$, para todos os valores de *R*. A opção *C* é preferível em relação à opção *A*, pois mesmo tendo pontos em comum, suas distribuições acumuladas não se cruzam. A distribuição de *D* intercepta as distribuições de *C* e *A*, portanto a regra da DEP não vale para esses pares.

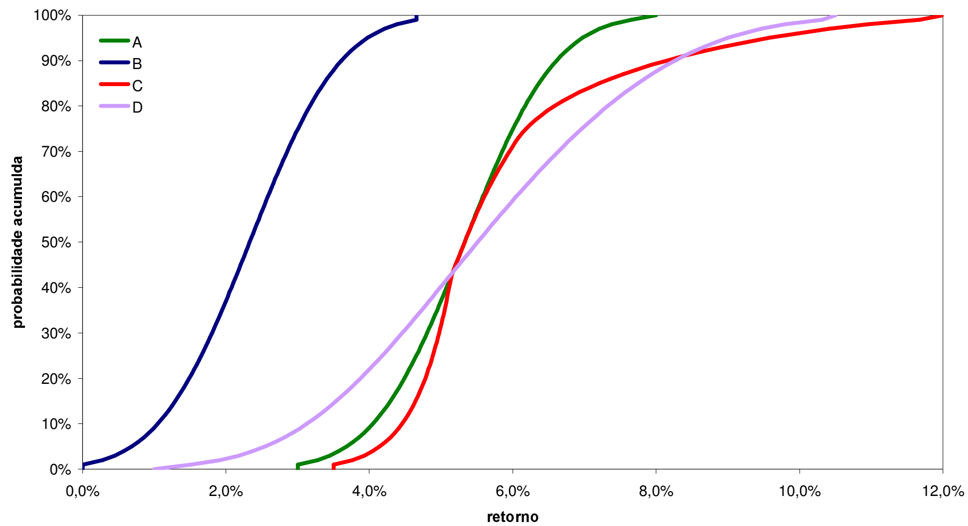

Figura 7.1 – Distribuições Acumuladas - DEP

No exemplo apresentado, o critério da DEP foi aplicado para reduzir o número das alternativas de investimento e separá-las em dois grupos: o conjunto eficiente contemplando as opções *C* e *D*, e o conjunto ineficiente com as opções *A* e *B*.

7.1.2. Dominância Estocástica de Segunda Ordem - DES

O critério da DES restringe a análise do conjunto eficiente para a classe dos investidores avessos a risco. Por ser mais restritivo que o critério da DEP, permite uma pré-seleção mais eficiente das alternativas de investimento, reduzindo substancialmente o conjunto eficiente. O critério assume que a função utilidade é côncava (segunda derivada negativa). De fato, o conjunto eficiente obtido com critério da DES é um subconjunto daquele obtido com o critério da DEP. A regra da DES pode ser enunciada como:

Dadas duas distribuições de probabilidade F_A e F_B, a opção A será preferível em relação à opção B, para todos os investidores avessos a risco, se e somente se, a área sob a distribuição acumulada de A não exceder a área sob a distribuição acumulada de B para todos os valores de R, ou seja, se para todo R

$$\int_{-\infty}^{R} F_A(t)dt \leq \int_{-\infty}^{R} F_B(t)dt \tag{7.1a}$$

ou equivalentemente

$$\int_{-\infty}^{R} \left[F_B(t) - F_A(t)\right]dt \geq 0 \tag{7.1b}$$

De acordo com a regra da DES, as distribuições acumuladas podem se cruzar, mas a diferença acumulada entre as opções de investimento deve permanecer não negativa para qualquer valor de R, no domínio de todos os possíveis valores de R. Na Figura 7.2 as diferenças entre as duas distribuições estão marcadas com o sinal "+" onde $F_A < F_B$ (contribuição positiva para a integral da Equação 7.1b), e com o sinal "–" onde $F_A > F_B$ (contribuição negativa para a integral). Pode-se observar que, para todo o domínio de possíveis retornos, a área acumulada entre as duas distribuições permanece positiva, ou seja, a opção A domina a opção B, para todos os investidores avessos a risco. Mesmo estando a distribuição de A acima da distribuição de B entre os pontos R_0 e R_1, a área "negativa" não é suficiente para exceder a área "positiva".

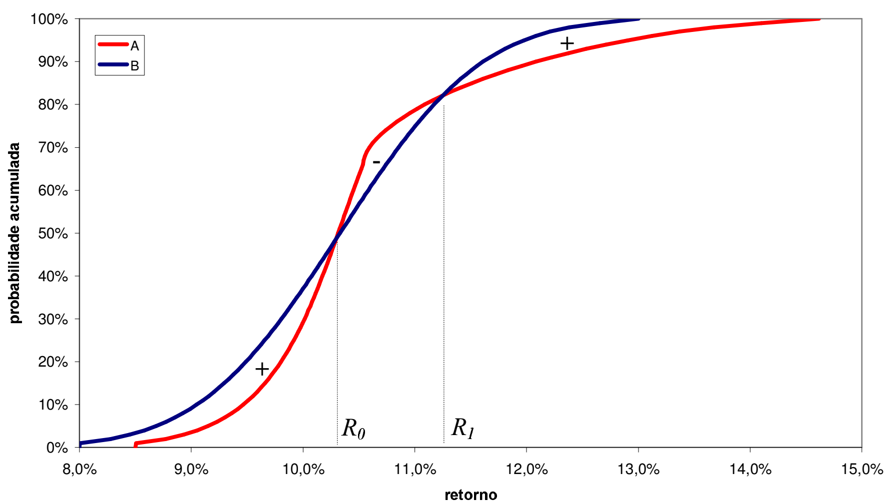

Figura 7.2 – Distribuições Acumuladas - DES

7.2. Modelos para Seleção de Carteiras

Em geral, os modelos para seleção de carteiras procuram resolver o problema de alocação ótima de capital com base em dois indicadores de desempenho: risco e retorno. A estrutura básica dos modelos consiste em um processo de maximização/minimização de retorno/risco sujeito as restrições de risco/retorno.

Nesta dissertação serão estudados três modelos para seleção de carteiras: (i) Média-Variância, (ii) Minimax e (iii) *Conditional Value at Risk*. O primeiro, desenvolvido por Markowitz [24][25], utiliza os dois primeiros momentos da distribuição dos retornos (média e variância) e resolve um problema de programação quadrática. O segundo, proposto por Young [55], utiliza como medida de risco o retorno da carteira no pior cenário simulado e resolve um problema de programação linear. O último, aplicado por Hiller e Eckstein [16], se baseia no *Conditional Value at Risk* da carteira e incorpora a medida de risco na função objetivo, resolvendo um problema não linear.

A abordagem utilizada ainda incorpora o critério do VaR no processo de otimização de *portfólio* [39]. Entretanto, é importante observar, que o resultado pode não convergir para uma solução viável do VaR especificado. É possível que o modelo ache como solução ótima a carteira de menor risco, com o retorno percentil-p menor que a TIR-VaR especificada, ou seja, com o risco da carteira maior que o desejado. Essa situação torna-se mais provável quanto maior a assimetria negativa da distribuição de retornos e quanto maior a aversão a risco do investidor. Por outro lado, a solução ótima pode ser a carteira de maior risco, com o retorno percentil-p maior que a TIR-VaR, resultando em carteiras excessivamente prudentes. Esse caso torna-se mais provável quanto maior a assimetria positiva da distribuição de retornos e quanto menor a aversão a risco do investidor.

7.2.1. Modelo Média-Variância

O modelo Média-Variância (MV) busca a diversificação eficiente dos investimentos, assumindo como medida de retorno a média da distribuição de retornos e como medida de risco a variância da distribuição. O modelo procura minimizar a variância da carteira sujeito a restrição de que o retorno médio da carteira deve ser maior ou igual a um valor pré-estabelecido *G*.

A carteira MV é obtida pela solução do seguinte problema:

$$\min \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N} x_i x_j \sigma_{i,j} \quad (7.2a)$$

s.a

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \overline{R}_i \geq G \quad (7.2b)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \quad (7.2c)$$

$$x_i \geq 0 \, , \, i = 1,2,\ldots,N \quad (7.2d)$$

onde,

x_i = percentual do projeto i na carteira;

σ^2_i = variância do retorno do ativo i;

$\sigma_{i,j}$ = covariância entre os retornos dos ativos i e j;

$\overline{R}_i$ = retorno médio do ativo i;

G = retorno médio *target* da carteira.

Para incorporar o critério do VaR na seleção de carteiras pelo método da MV, o retorno médio *target G* deve ser ajustado até o que o VaR especificado seja atingido (o algoritmo de cálculo da carteira MV é detalhado no Apêndice B - Algoritmos de Cálculo da Carteira Ótima Incorporando o Critério do VaR). Essa metodologia utiliza a relaxação da restrição de VaR e calcula a carteira MV por um processo iterativo de convergência, a partir do máximo retorno médio possível (projeto com maior retorno esperado).

Suponha, por exemplo, o problema de seleção de dois projetos *A* e *B* com as distribuições ilustradas na Figura 7.3. Para um nível de confiança de 90%, a TIR-VaR do projeto *B* é inferior a 10% (utilizado como premissa de menor retorno admitido pelo investidor). Dessa forma, o retorno médio *G* da carteira MV deve ser reduzido, diminuindo a participação de *B* na carteira (reduzindo o risco e aumentando a TIR-VaR). O resultado do modelo MV com restrição de VaR é a carteira formada por 40% de *A* e 60% de *B*. Essa combinação dos projetos resulta na carteira de menor variância (desvio padrão igual a 1,6%) para o maior retorno *target G* possível (12,0%) satisfazendo a restrição de TIR-VaR maior ou igual a 10%.

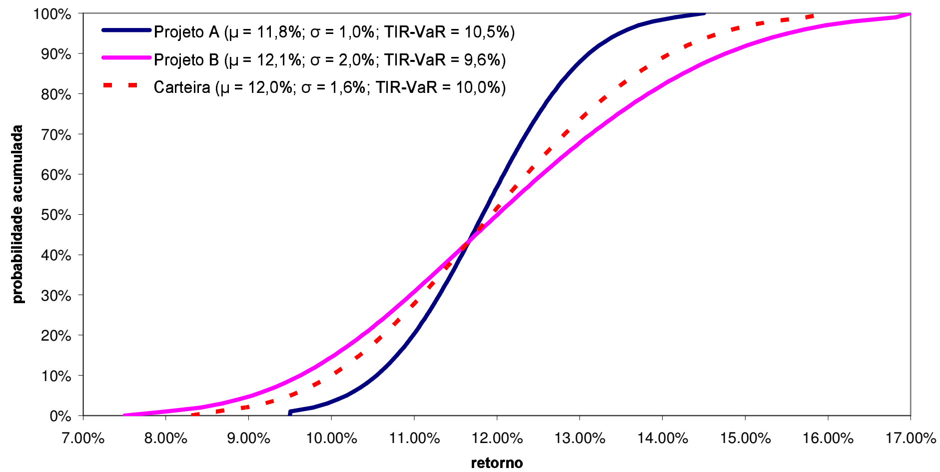

Figura 7.3 – Distribuição de Retornos da Carteira MV

A grande vantagem do método da MV é que ele permite selecionar carteiras olhando unicamente para os dois primeiros momentos da distribuição de retornos: a média e a variância (ou desvio padrão). No entanto, as premissas relacionadas às preferências dos investidores, discutidas na seção anterior, impõem certas restrições na aplicação do modelo MV. Os casos em que se pode assegurar a eficiência do modelo dependem do formato da função utilidade do investidor e/ou da distribuição de probabilidade dos retornos. Particularmente, pode-se assegurar que modelo MV fornece decisões relevantes somente se a função utilidade for quadrática ou se os retornos forem normalmente distribuídos [21]. Essas premissas restringem a aplicabilidade do modelo para uma classe menor de investidores ou para uma classe menor de alternativas.

7.2.2.
Modelo MiniMax

A grande vantagem do modelo Minimax (MM) é que ele permite encontrar a carteira ótima de projetos através da solução de um problema de programação linear. A medida de risco utilizada no modelo é o mínimo retorno entre os possíveis cenários. Em particular, a carteira é escolhida com o objetivo de minimizar a máxima perda, que ocorre no pior cenário, para uma determinada exigência de retorno médio do projeto.

O modelo MM procura maximizar a quantidade M, onde M é o retorno da carteira no pior cenário, sujeito a restrição de que o retorno médio da carteira deve ser maior ou igual a um valor pré-estabelecido G. Ou seja, a carteira MM minimiza a máxima perda, ou equivalentemente, maximiza o pior retorno.

A carteira MM é obtida pela solução do seguinte problema:

$$\max \ M \tag{7.4a}$$

s.a

$$\sum_{i=1}^{N} x_i R_{i,s} - M \geq 0, \ s = 1,2,...,S \tag{7.4b}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \overline{R}_i \geq G \tag{7.4c}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \tag{7.4d}$$

$$x_i \geq 0, i = 1,2,...,N \tag{7.4e}$$

onde,

x_i = percentual do projeto i na carteira;

M = retorno da carteira no pior cenário;

$R_{i,s}$ = retorno do ativo i na série s;

$\overline{R}_i$ = retorno médio do ativo i;

G = retorno médio *target* da carteira.

Young [55] prova que, no caso de retornos normalmente distribuídos, a medida de risco do modelo MM (retorno da carteira no pior cenário) é equivalente à variância do modelo MV. Nesse caso, a carteira com menor variância também é a com o maior retorno para o pior cenário. No entanto, para outras distribuições de retorno, o modelo MM se mostra superior ao modelo MV, que só fornece decisões relevantes para distribuições normais. Suponha, por exemplo, os retornos de dois ativos A e B mostrados na Tabela 7.1. Claramente o ativo B é dominado pelo ativo A, pois o ativo A tem retornos maiores em qualquer cenário escolhido. No entanto, o ativo B é eficiente pelo critério MV, na medida em que tem menor variância que o ativo A. Dessa forma, olhando apenas pela ótica da MV, poder-se-ia escolher uma estratégia de colocar 100% do orçamento disponível no ativo B, o que não é razoável. O motivo pelo qual a análise da MV falha em situações de retornos com distribuições assimétricas é porque penaliza não só os *downsides* (baixos retornos), mas também os *upsides* (altos retornos). A carteira MM, por outro lado, resulta na estratégia correta de colocar 100% no ativo A.

Tabela 7.1 – Retornos dos Ativos A e B

Cenário	Probabilidade	Retornos	
		Ativo A	Ativo B
1	0,25	0,20	0,10
2	0,50	0,40	0,20
3	0,25	0,60	0,30

A incorporação do critério do VaR na seleção de carteiras MM segue a mesma linha utilizada no modelo MV: o retorno médio da carteira G é ajustado até o VaR especificado ser atingido (o algoritmo é detalhado no Apêndice B - Algoritmos de Cálculo da Carteira Ótima Incorporando o Critério do VaR).

A principal desvantagem na utilização desse modelo no contexto do VaR, é que no processo de otimização, somente o pior cenário é considerado. Isso implica em uma grande dependência da carteira ótima em relação ao pior cenário. No caso de distribuições leptocúrticas (caudas pesadas) ou com assimetria negativa, a abordagem MM resulta em carteiras excessivamente prudentes para o nível de VaR especificado, sacrificando retorno esperado da carteira.

7.2.3. Modelo *Conditional Value at Risk*

O modelo proposto por Hiller e Eckstein [16] incorpora o risco diretamente na função objetivo do problema de otimização. O risco é representado pelo *Conditional Value at Risk* (CVaR) da carteira. O CVaR da distribuição de retornos é o valor esperado das perdas abaixo do VaR especificado [47][48].

A carteira ótima é obtida pela solução do seguinte problema:

$$\max \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{R}_i - \lambda \frac{\sum_{s=1}^{S} \frac{1}{S} d_s}{1-p} \tag{7.5a}$$

s.a

$$\sum_{i=1}^{N} x_i R_{i,s} + d_s \geq R^*\ ,\ s = 1,2,...,S \qquad (7.5b)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \qquad (7.5c)$$

$$x_i \geq 0\ ,\ i = 1,2,...,N \qquad (7.5d)$$

onde,

x_i = percentual do projeto i na carteira;

$R_{i,s}$ = retorno do ativo i na série s;

$\overline{R}_i$ = retorno médio do ativo i;

R^* = TIR-VaR especificada;

$d_s = \max[0, R^* - \sum_{i=1}^{N} x_i R_{i,s}]$. Máximo entre zero e a diferença entre a TIR-VaR e o retorno da carteira na série s;

p = percentil especificado pelo investidor.

O termo d_s é o montante (em % a.a.), em cada cenário s, abaixo do retorno *target* R^* especificado. O valor esperado desse montante (CVaR da carteira) é representado na função objetivo por $\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} d_s \Big/ (1-p)$. O CVaR é ponderado pelo termo λ, que representa a intensidade de aversão a risco do investidor.

Para incorporar o critério do VaR no modelo, o parâmetro λ deve ser ajustado até que a probabilidade do retorno da carteira ser menor que R^* seja igual a $(1 - p)$ (o algoritmo é detalhado no Apêndice B - Algoritmos de Cálculo da Carteira Ótima Incorporando o Critério do VaR).