6
Modelo de Roteirização Multiobjetivo

6.1
Considerações gerais do modelo multiobjetivo

A rede de transporte considerada neste trabalho é representada por um grafo dirigido *G(N, A)*, onde *N* é o conjunto de nós e *A* é o conjunto de arcos. Além disso, *O* é o ponto de origem (armazenamento de combustíveis) e *D* é o destino (posto de revenda de combustíveis). Assume-se que todo transporte de combustível é realizado por uma rota *R*, que os combustíveis são transportados de *O* a *D*, tal que a probabilidade de que ocorra um acidente catastrófico num arco *a* da rota *R* seja p_a, a conseqüência (custo) num arco a seja C_a e que a distância percorrida num arco a seja L_a. Como definido anteriormente, um acidente catastrófico é aquele que tem uma conseqüência maior ou igual a C^*, um valor predeterminado chamado “valor ou nível crítico”.

Dessa forma, o modelo que segue ilustra os quatros objetivos desse projeto, assim como as restrições estabelecidas. Respectivamente, o primeiro objetivo é minimizar a Esperança Condicional da Conseqüência, dado que ocorra um acidente, o segundo é minimizar a probabilidade de ocorrer um acidente, o terceiro é minimizar a conseqüência esperada e o quarto objetivo é minimizar a distância percorrida durante o transporte dos MP.

$$Minimizar\left\{\left(\frac{\sum_{a\in A} p_a C_a f_a}{\sum_{a\in A} p_a f_a}\right);\sum_{a\in A} p_a f_a;\sum_{a\in A} p_a C_a f_a;\sum_{a\in A} L_a f_a\right\} \tag{6.1}$$

Sujeito a:

$$\sum_{a\in F(i)} f_a - \sum_{a\in E(i)} f_a = \begin{cases} T_{OD}, & se\ i \equiv O \\ -T_{OD}, & se\ i \equiv D \quad \forall i \in N \\ 0, & \forall i\ se\ não. \end{cases} \tag{6.2}$$

$$\sum_{a \in Z_k} \rho_{Z_k}(a) + B_k \leq \phi \quad \forall k = 1,...,K \tag{6.3}$$

$$f \equiv (f_a : a \in A) \in F \tag{6.4}$$

$$f_a \geq 0 \quad \forall a \in A \tag{6.5}$$

A restrição (6.2) indica que a rede de transporte deve estar balanceada. Por sua vez, a restrição (6.3) representa a eqüidade do risco na distribuição de MP. A condição (6.4) indica a eliminação de *subtours* e, finalmente a condição (6.5) representa uma restrição de não-negatividade para a variável de decisão (fluxo). *F* representa restrições (lineares) para a eliminação de *subtours.*

Seguindo com a análise metodológica, é importante mencionar que no problema proposto surge a necessidade de determinar o grau de importância ou preferência de cada um dos objetivos. Essa necessidade deve-se a que não é correto pensar que cada um dos objetivos tem a mesma importância no momento de determinar qual ou quais as rotas que devem ser escolhidas para o transporte de MP. Assim, o método desenvolvido transforma-se em um problema decisório no qual é necessário incluir ponderadores que reflitam a relevância e preferência que é dada a cada atributo no processo de otimização. Por outro lado, existem conflitos que surgem entre cada objetivo, o qual reflete em que alguns desses carecem de homogeneidade dimensional e que os valores absolutos dos resultados dos diferentes objetivos podem ser muito diferentes.

Diante dessa problemática, propõe-se resolver o problema mediante o desenvolvimento de uma análise decisório multicritério através de um programa multiobjetivo, o qual é descrito na seção que segue.

6.2
Análise Multicritério para a Roteirização para Materiais Perigosos

6.2.1
Aspectos Básicos da Análise Multicritério

Segundo Romero (1996), a análise multicritério pode ser visualizada como uma ferramenta analítica de uma grande potencialidade nos processos de engenharia de sistemas. Esta característica dos enfoques multicritério e sistêmico pode se dar tanto a um nível conceitual como a um nível operativo ou de resultados concretos.

A um nível conceitual, Romero (1996) comenta que o homem desenvolve os sistemas com o propósito de alcançar uma ampla gama de objetivos de diferentes naturezas. Em muitos casos estes objetivos entram em conflito ente si. Portanto, se faz necessário encontrar um compromisso ou equilíbrio entre os mesmos. Já a um nível operativo, a engenharia de sistemas pode ser concebida como uma seqüência de passos ou atividades, nas que a todo momento é necessário eleger entre diferentes alternativas.

Como primeiro passo para expor a estrutura multicritério é necessário introduzir alguns conceitos e definições. O conceito de *atributo* refere-se a valores dentro do centro decisor relacionados com uma realidade objetiva. Estes valores podem ser medidos independentemente dos desejos do centro decisor e podem também serem expressos como uma função matemática das variáveis de decisão. Os *objetivos* representam direções de melhoria dos atributos. A melhora pode ser interpretada no sentido “mais do atributo melhor” ou “menos do atributo melhor”. O primeiro caso corresponde a um processo de maximização e o segundo a um processo de minimização (Romero, 1996).

Ainda segundo Romero (1996), um *nível de aspiração* representa um nível aceitável de logro para o atributo correspondente. *Meta* é a combinação de um atributo com um nível de aspiração. E por fim, *critério* é um termo que engloba os três conceitos precedentes. Em outras palavras, critérios constituem os atributos, objetivos ou metas que são considerados importantes para um certo problema decisório.

6.2.2 Otimalidade Paretiana

O economista italiano Vilfredo Pareto introduziu em 1896 um conceito de otimalidade que recebeu seu nome e que pode ser considerado crucial na teoria econômica. Romero (1996) relata que, em sua formulação inicial, Pareto considera que: "*uma coletividade se encontra num estado ótimo se nenhuma pessoa dessa coletividade pode melhorar sua situação sem que piore a situação de alguma outra pessoa da mesma*". Esta classe de otimalidade se denomina também eficiência paretiana.

O critério de otimalidade paretiana possui um peso considerável nos diferentes enfoques desenvolvidos dentro da análise multicritério. Pode-se dizer que a eficiência paretiana é uma condição exigida como necessária para poder garantir a racionalidade das soluções geradas pelos diferentes enfoques multicritérios.

O conceito de otimalidade paretiana dentro de decisões multicritérios pode ser definida como: "*Um conjunto de soluções é eficiente (ou Pareto ótimas) quando está formado por soluções factíveis (isto é, que cumprem as restrições), tais que não existe outra solução factível que proporcione uma melhora num atributo sem produzir uma piora em ao menos um dos outros atributos*" (Romero, 1996).

Dessa forma, todos os aspectos multicritério buscam obter soluções que sejam eficientes no significado paretiano. Incluso dentro da programação multiobjetivo o primeiro passo consiste em obter soluções factíveis e eficientes. Isso significa que o conjunto de possíveis soluções se divide em dois subconjuntos independentes, um de soluções factíveis não eficientes e outro de soluções factíveis e eficientes. Depois de realizada essa divisão, é introduzida de diversas formas as preferências do centro decisor com o objetivo de alcançar um compromisso entre as soluções factíveis e eficientes.

6.2.3
Principais Enfoques Multicritérios

Bronfman e Garrido (2004) definem a teoria de decisão multicritério como um modelo de decisão onde existem diferentes *atributos, objetivos e metas*. Quando um tomador de decisões está num contexto de múltiplos objetivos, a aproximação multicriterio a ser considerada é a *Programação Multiobjetivo*, por exemplo, o Método das Ponderações e o Método das Restrições. E esse contexto multiobjeitvo consiste em segregar o conjunto de possíveis soluções em subgrupos, cujos elementos fazem parte da definição de otimalidade paretiana. Assim, o primeiro passo dentro deste enfoque é a geração do conjunto eficiente e o segundo é a busca de um compromisso ótimo para o centro decisor dentre as soluções eficientes.

Se o centro decisor tem que tomar uma decisão em um conjunto de metas múltiplas, o enfoque multicritério a considerar é a *Programação por Metas*. Exemplos deste enfoque são a Programação por Metas MINIMAX, Ponderadas e Lexicográfica. Este tipo de otimização é abordada por meio da minimização dos desvios entre os logros realmente alcançados e os níveis de aspiração fixados previamente. Com esse propósito, são introduzidas variáveis de desvios positivas e negativas que permitem tanto o excesso como a falta de logro para cada meta (Bronfman and Garrido, 2004).

Finalmente, se o contexto dentro do qual o centro decisor tem que tomar sua decisão está caracterizado por vários atributos, o enfoque, segundo Bronfman e Garrido (2004), a considerar é a *Teoria da Utilidade com Atributos Múltiplos*. Neste caso, o propósito é construir uma função de utilidade com um número de argumentos igual ao número de atributos que são considerados relevantes para o problema decisório que está sendo analisado. Este enforque é mais aplicado a problemas de decisão com um número discreto de decisões factíveis.

Como mencionado anteriormente, o foco central do aspecto multiobjetivo consiste em segregar o conjunto de soluções possíveis em subconjuntos cujos elementos gozem de otimalidade paretiana. Este propósito é abordado utilizando informações estritamente técnicas (restrições, expressões matemáticas dos atributos etc.) sem incorporar à análise nenhuma informação sobre as preferências do centro decisor. Tratando-se de um problema formulado nesses termos, a Programação Multiobjetivo desenvolverá uma série de técnicas que permitem gerar este conjunto de soluções eficientes ou pareto ótimas. Na proposta apresentada nesse trabalho, isto será possível através do Método das Ponderações, o qual será descrito juntamente com sua aplicação.

6.2.4 Avaliação Multicritério

Assim como sugere Romero (1996), o processo ou enfoque tradicional para abordar este tipo de problemas pode se resumir da seguinte maneira: Os valores da variável de decisão que satisfazem as restrições constituem o que se denomina conjunto factível ou alcançável que determina o que se entende por "soluções possíveis". Uma vez determinadas estas soluções, o interesse se concentra em identificar a melhor solução.

Partindo da metodologia descrita por Romero (1996), na primeira fase, e a partir de informações técnicas, definem-se as "possíveis soluções", enquanto que na segunda fase as escolhas preferenciais definem a "melhor solução". A intersecção de ambas fases determina a solução ótima. Para determinar o conjunto de soluções possíveis é utilizado o conceito de Otimalidade Paretiana descrito anteriormente. Pode-se dizer que a eficiência paretiana é uma condição exigida e necessária para garantir a racionalidade das soluções geradas pelos diferentes enfoques multicritério, que pretendem obter soluções que sejam eficientes no sentido paretiano sem considerar a possibilidade de encontrar uma solução ótima, senão um conjunto de soluções eficientes não dominadas.

Fazendo uso dos conceitos recém expostos, o próximo passo é identificar uma metodologia concreta que permita resolver o problema proposto. Em primeiro lugar, definem-se os atributos do problema, que correspondem aos valores funcionais que se apresentam em um determinado problema decisório. É necessário que estes atributos possam ser medidos de forma independente das preferências associadas a cada um, e sejam expostos como uma função das variáveis de decisão. Dessa forma, os atributos do problema correspondem à esperança condicional da conseqüência de uma rota R (f_1), a probabilidade de ocorrer um acidente na rota R (f_2), a conseqüência esperada (f_3), e a distância percorrida entre um par *O-D* (f_4).

$$f_1 = \frac{\sum_{a \in A} p_a C_a f_a}{\sum_{a \in A} p_a f_a} \tag{6.6}$$

$$f_2 = \sum_{a \in A} p_a f_a \tag{6.7}$$

$$f_3 = \sum_{a \in A} p_a C_a f_a \tag{6.8}$$

$$f_4 = \sum_{a \in A} f_a L_a \tag{6.9}$$

A próxima seção aborda o tema da Programação Multiobjetivo.

6.2.5
Programação Multiobjetivo

Como a otimização simultânea de todos os objetivos é usualmente impossível, de acordo com Broffman (2001), o enfoque multiobjetivo pretende estabelecer o conjunto de soluções eficiente ou pareto ótimas, segundo os conceitos apresentados anteriormente. Em termos matemáticos, o problema é expressado como segue.

$$\begin{aligned} &Otimizar\ f(F_a) = \left[f_1(f_a), f_2(f_a), f_3(f_a), f_4(f_a) \right] \\ &Sujeito\ a : F_a \in J \end{aligned} \tag{6.10}$$

onde *J*, nesse caso, representa o conjunto de restrições definidas no modelo multiobjetivo apresentado anteriormente.

Formulado o modelo geral, o passo seguinte consiste em encontrar o conjunto eficiente ou pareto ótimo para o problema proposto. Dentro das metodologias existentes para gerar tal conjunto, optou-se pelo método das ponderações, já que, para os objetivos e restrições propostas, permite uma boa análise dos dados.

6.2.6
Método das Ponderações

Este método consiste em multiplicar cada objetivo por um peso ou fator não negativo, para em seguida incluir todos os objetivos ponderados em única função agregada. A otimização dessa função ponderada e agregada gera um elemento do conjunto eficiente. Por meio da parametrização dos pesos associados aos objetivos, vai se aproximando o conjunto de soluções pareto ótimas. No entanto, é essencial proceder com a normalização dos diferentes critérios em consideração. Uma forma de cumprir com essa necessidade é dividindo os valores encontrados de cada critério pela diferença entre o melhor e o pior valor encontrado por cada um, os quais são obtidos através da otimização individual de cada atributo (mostrado detalhadamente no item que segue e no capítulo 7 deste trabalho). A aplicação do método conduz ao seguinte programa linear paramétrico normalizado (Romero, 1996 e Broffman, 2001).

$$Min\ F(F_a) = \alpha_1\left(\frac{f_1}{f_{*1} - f_1^*}\right) + \alpha_2\left(\frac{f_2}{f_{*2} - f_2^*}\right) + \alpha_3\left(\frac{f_3}{f_{*3} - f_3^*}\right) + \alpha_4\left(\frac{f_4}{f_{*4} - f_4^*}\right) \quad (6.11)$$

$$Sujeito\ a:$$

$$f_1 = \frac{\sum_{a \in A} p_a C_a f_a}{\sum_{a \in A} p_a f_a}$$

$$f_2 = \sum_{a \in A} p_a f_a$$

$$f_3 = \sum_{a \in A} p_a C_a f_a$$

$$f_4 = \sum_{a \in A} f_a L_a$$

$$F_a \in J$$

Para cada vetor de pesos α obtém-se um elemento do conjunto eficiente. O método garante soluções eficientes só quando os pesos são estritamente positivos $(\alpha_i \geq 0)$. O termo f_{*i} é o valor anti-ideal do dado objetivo, ou seja, o pior valor possível para o objetivo *i*-ésimo, e f_i^* é o valor ideal do dado objetivo, ou seja, melhor valor possível para o objetivo *i*-ésimo. As primeiras quatro restrições correspondem aos atributos definidos na seção 7.2.4, representadas pelas expressões (6.6), (6.7), (6.8) e (6.9). Assim, define-se J^* é o conjunto de restrições *J* e as expressões dos atributos recém mencionados.

Até o momento, só foi apresentada a primeira etapa do processo decisório. A aplicação do método recém descrito permite dividir o conjunto factível em um subconjunto de soluções parametricamente eficientes e não dominadas, sem considerar as decisões de preferência. Uma forma eficiente de incorporar estas preferências, segundo Romero (1996) e Broffman (2001), é mediante a *programação compromisso*, a qual é exposta na continuação.

6.2.7 Método de Programação Compromisso

Baseadas nas afirmações encontradas em Romero (1996) e Broffman (2001), o primeiro passo dentro do enfoque da programação compromisso é estabelecer o ponto ou alternativa ideal. As coordenadas da alternativa ideal vêm dadas pelos valores ótimos dos objetivos, forçando o processo de otimização ao cumprimento das restrições do problema. Essa alternativa ideal pode ser representada por meio do seguinte vetor.

$$\begin{aligned} & f^* = \left(f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*\right) \\ & Sujeito\ \ a : F_a \in J^* \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$Com \quad f_i^* = Min\ \ f_i(.) \tag{6.13}$$

Através dessa metodologia é obtido cada elemento do vetor f^* que se denomina “ponto ou valor ancora”, além de obter o valor anti-ideal (f_*) para cada atributo. Isto se dá por meio de um programa de otimização linear, o qual encontra a solução tanto para as variáveis de decisão como para os atributos do modelo multiobjetivo, como ilustrado abaixo:

$$\begin{array}{ll} Min \;\; f_1 & \\ Sujeito \;\; a: & \\ f_2 & Com \;\; solução: \\ f_3 & f_1^*, \;\; f_{2*}, \;\; f_{3*} \;\; e \;\; f_{4*} \\ f_4 & \\ F_a \in J & \end{array}$$

Por ser o ponto ou alternativa ideal inalcançável, o valor ótimo ou a melhor solução compromisso vem dada pela solução eficiente mais próxima do ponto ideal. Esta regra de comportamento é normalmente denominada de *axioma de Zeleny*. De acordo com este postulado, dadas duas soluções, a solução eleita (ótima) será aquela que estiver mais próxima do ponto ideal. Dependendo da métrica que seja escolhida serão obtidas diferentes funções de distância, o que permitirá estabelecer diferentes conjuntos compromisso. Para abordar essa tarefa, é definido o grau de proximidade d_i existente entre o objetivo *i*-ésimo e seu ideal ou valor ancora.

$$d_i = \left[f_i^* - f_i(.) \right] \qquad (6.14)$$

Como próximo passo devem-se agregar os graus de proximidade para todos os objetivos do problema e tal como foi mencionado anteriormente, é necessário levar em conta o problema da homogeneidade dimensional entre alguns objetivos, e os valores absolutos dos diferentes objetivos podem produzir soluções desniveladas. Portanto, deve-se fazer a normalização. Além disso, torna-se mais fácil o procedimento de tomada de decisão das preferências ao comparar entre critérios normalizados em vez de seus correspondentes valores originais. Uma forma possível de normalizar os objetivos é a seguinte.

$$d_i = \frac{f_i^* - f_i(.)}{f_i^* - f_{*i}} \qquad (6.15)$$

onde d_i passa a representar o grau de proximidade do objetivo *i*-ésimo normalizado. O f_{*i} é o valor *anti-ideal* do objetivo *i*, ou seja, o pior valor possível para o objetivo *i*-ésimo sobre o conjunto eficiente. O grau de proximidade normalizado está limitado entre 0 e 1. Assim, quando um objetivo alcança seu valor ideal, seu grau de proximidade é zero. Ao contrário, esse grau é um quando o objetivo em questão alcança um valor igual ao *anti-ideal*. Agora, se W_i são pesos que representam as decisões preferenciais que se associam à discrepância existente entre a realização do objetivo *i*-ésimo e seu ideal, a programação compromisso se converte no seguinte problema de otimização (Romero, 1996).

$$\begin{aligned} &Min\ L_\pi = \left[\sum_{i=1}^{4} W_i^\pi \left[\frac{f_i^* - f_i(.)}{f_i^* - f_{*i}} \right]^\pi \right]^{1/\pi} \\ &Sujeito\ a: \qquad\qquad (6.16) \\ &F_a \in J^* \end{aligned}$$

Desenvolvendo o problema acima para cada critério considerado, se obtém a seguinte expressão.

$$\begin{aligned} &Min\ L_\pi = \left[W_1^\pi \left(\frac{f_1^* - f_1}{f_1^* - f_{*1}} \right)^\pi + W_2^\pi \left(\frac{f_2^* - f_2}{f_2^* - f_{*2}} \right)^\pi + W_3^\pi \left(\frac{f_3^* - f_3}{f_3^* - f_{*3}} \right)^\pi + W_4^\pi \left(\frac{f_4^* - f_4}{f_4^* - f_{*4}} \right)^\pi \right]^{1/\pi} \quad (6.17) \\ &Sujeito\ a: \\ &F_a \in J^* \end{aligned}$$

O parâmetro π representa a métrica que define a família de funções de distâncias. Ou seja, para cada valor do parâmetro π tem-se uma métrica para a distância. Assim, a distância tradicional ou euclidiana é um caso particular da expressão anterior, isto é, o que corresponde a $\pi = 2$. Para $\pi = 1$, a melhor solução compromisso, ou ponto mais próximo do ideal pode ser obtido resolvendo o seguinte problema de otimização:

$$Min \ L_1 = \sum_{i=1}^{4} W_i . \frac{f_i^* - f_i(.)}{f_i^* - f_{*i}}$$
$$Sujeito \ a: \qquad (6.18)$$
$$F_a \in J^*$$

Para a métrica $\pi = \infty$, minimiza-se o máximo desvio dentre todos os desvios individuais. Para esta métrica, a melhor solução compromisso ou ponto mais próximo ao ideal pode ser obtido resolvendo o seguinte problema de otimização.

$$Min \ L_\infty = D \qquad (6.19)$$
$$Sujeito \ a:$$
$$W_1 . \left(\frac{f_1^* - f_1}{f_1^* - f_{*1}} \right) \leq D$$
$$W_2 . \left(\frac{f_2^* - f_2}{f_2^* - f_{*2}} \right) \leq D$$
$$W_3 . \left(\frac{f_3^* - f_3}{f_3^* - f_{*3}} \right) \leq D$$
$$W_4 . \left(\frac{f_4^* - f_4}{f_4^* - f_{*4}} \right) \leq D$$
$$F_a \in J^*$$

A solução associada ao ponto L_∞ é uma solução bem equilibrada, pois as discrepâncias ponderadas e normalizadas entre o valor alcançado por cada objetivo e seus respectivos ideais são iguais. Pode-se dizer que a solução L_1 corresponde a uma situação em que se minimiza a soma ponderada dos valores de cada objetivo, traduzindo-se em algo como um ponto de máxima eficiência, mas que pode estar fortemente desequilibrado. Ao contrário, a solução L_∞ possui uma lógica de equilíbrio em vez de uma lógica de eficiência. Para obter a melhor solução compromisso para métricas distintas de $\pi = 1$ e $\pi = \infty$, é necessário recorrer a algoritmos de programação matemática não linear (Romero, 1996 e Broffman, 2001).

Mediante esta metodologia é possível comparar cada alternativa do conjunto eficiente encontrado pelo método das ponderações. Calculando os valores L_1, L_2 e

L_∞ para cada alternativa pareto ótima é possível classificar as soluções em ordem ascendente aos valores encontrados para cada métrica, resolvendo desta forma o segundo passo do problema formulado.

O método das ponderações, seguido do método da programação compromisso apresentado nesse capítulo, será a metodologia aplicada ao exemplo numérico por melhor se adequar aos objetivos do modelo proposto. Pois, como descrito anteriormente, a solução ótima do problema multiobjetivo formulado será obtida através das técnicas que permitem gerar um conjunto de soluções eficientes ou pareto ótimas.

A metodologia utilizada para solucionar o problema de otimização multiobjetivo apresentado neste trabalho foi sintetizada no pseudo-código que segue:

Passo 0: resolver o modelo de roteirização proposto por Sherali *et al.*, o qual reduz $\hat{CE}_R = \frac{\sum_{i \in R_c} p_{a_i} C_{a_i}}{\sum_{i \in R_c} p_{a_i}}$ ao mínimo.

Passo 1: determinar a preferência de cada um dos objetivos no processo de otimização segundo a distância de CE_R:

- Para rota que minimiza CE_R, calcular C_R^* (conseqüência), $P(R^*)$ (probabilidade) e $L(R^*)$ (distância).

- Resolver o algoritmo de Dijkstra, utilizando como custos a conseqüência (***C$_a$)***, probabilidade (***p$_a$)*** e distância (***L$_a$)***.

- Comparar os valores de C_R, $P(R)$ e $L(R)$ com os valores análogos obtidos para a rota R^* para obter o grau de importância de cada objetivo.

Passo 2: Resolver o problema de otimização proposto para cada objetivo individualmente com o propósito de obter o valor ideal ou ancora, assim como o anti-ideal para todos os atributos.

Passo 3: Aplicar o Método das Ponderações, especificando os pesos para os objetivos em 10 casos distintos e resolver o programa linear paramétrico normalizado, modelo 6.11 deste trabalho, gerando assim o conjunto eficiente ou pareto ótimo.

Passo 4: Aplicar a Programação Compromisso, resolvendo o programa linear paramétrico normalizado para as métricas $\pi = 1$, $\pi = 2$ e $\pi = \infty$.

Passo 5: A solução ótima é aquela que obtiver o menor valor para todas as métricas.