

2. Fundamentação Teórica

2.1. Dimensionamento da frota - Kirby, Wyatt e Gould

O problema de dimensionamento da composição e do tamanho da frota de veículos foi primeiramente abordado por Kirby (1959) e em seguida Wyatt (1961). Os autores consideraram uma frota homogênea a se compor levando em conta uma demanda com uma variação sazonal conhecida, o fato que todas as entregas deveriam ser feitas preferencialmente com a frota própria e a possibilidade de serem contratados veículos terceirizados para cobrir a uma eventual falta de cobertura de demanda.

Os casos abordados por Kirby (1959) e Wyatt (1961) não se aplicam quando se deseja dimensionar uma frota heterogênea, isto é, quando a frota é composta por veículos de diferentes tipos e/ou tamanhos. O trabalho apresentado por Gould (1969), traz uma contribuição nesse sentido, ao abordar o problema da composição de uma frota heterogênea na sua natureza (tipos e tamanhos dos veículos). O trabalho trata também o fato que as entregas possam ser realizadas por mais de um tipo de operador logístico.

O modelo proposto por Gould foi formulado como programação linear inteira.

Onde

X_i = número de entregas realizadas por terceiros no dia i ;

h_i = número de entregas realizadas por veículos contratados no dia i .

D_i =demanda de cargas no dia i .

Onde o objetivo é minimizar os custos fixos e variáveis anuais próprios e os custos com terceiros.

Função Objetivo:

$$\min \quad C_f YN + C_v \sum_i X_i + H \sum_i h_i \quad (1)$$

Sujeito à:

$$X_i + h_i = d_i \quad \text{para todo } i \quad (2)$$

$$X_i \leq N \quad (3)$$

C_f = custo fixo/ dia que inclui depreciação de veículos, IPVA, mão de obra

C_v = custo variável/dia (custos que são decorrentes do uso, itens que variam por quilometro rodado, combustível, manutenção, pneus.

H = custo do veículo terceirizado;

Y = dias de trabalho;

N = número de veículos próprios;

Em cada dia as cargas transportadas pelos veículos próprios são limitadas pelos número de veículos da frota própria.

Gould indica que o tamanho da programação linear pode ser reduzido pela distribuição de frequência $f(d_r)$ da demanda d_r diária.

Seja

X_r = a quantidade de cargas transportadas nos dias em que a demanda é d_r .

H_r = quantidade de cargas transportadas pelos veículos terceirizados nos dias em que a demanda é d_r .

A formulação para frota própria considerando as frequências é dada por

Função Objetivo

$$\min \quad C_f YN + C_v \sum_r X_r f(d_r) + H \sum_r h_r \quad (4)$$

$$X_r + h_r = d_r \quad \forall r \quad (5)$$

$$X_r \leq N \quad \forall r \quad (6)$$

Para reduzir o tamanho da programação linear inteira, a distribuição de frequência pode ser agrupada. O d_r pode representar o ponto médio e $f(d_r)$ a soma de frequências do grupo.

Este procedimento equivale a fazer uma aproximação linear da função de frequência cumulativa da demanda.

O modelo apresentado acima visava identificar se os altos custos com transporte da empresa em estudo eram provenientes do número excessivo de veículos da frota própria.

No âmbito da presente dissertação, o estudo de caso abordado se relaciona com o modelo proposto por Gould e portanto, servirá de base na resolução dos problemas envolvidos nos estudos de casos. Existem outros autores como Eilon (1977), Mole (1975) e Alsbury (1972) que tratam do problema de dimensionamento e composição da frota de veículos e utilizam como base o modelo proposto por Wyatt (1961).

2.2.

O Problema de Roteirização de Veículos – VRP (Vehicle Routing Problem)

O VRP tem por objetivo encontrar um conjunto de rotas ao menor custo (agregando os custos fixos e variáveis de transporte) respeitando as restrições e atendendo a demanda. Cada rota corresponde a uma viagem efetuada por um veículo v de capacidade $k_v > 0$ limitada. Uma viagem inicia-se num depósito, visita um subconjunto de clientes em I , e termina no depósito de partida. Considera-se que todas as demandas são conhecidas, cada cliente é atendido uma única vez e por um único veículo desde que a sua demanda seja menor ou igual a uma das capacidades k_v de veículos disponíveis pra o roteiro.

Dada uma rede $G = (N, A)$, onde N é o conjunto dos nós e A o dos arcos ponderados pela função de custo $c: A \rightarrow R^+$. Sejam O e Q respectivamente, o conjunto das origens o_i e destinos q_i , dos fluxos em G . Seja $D = \{d_i\}$ o conjunto das demandas dos clientes i , onde cada i é representado pelo ternário (o_i, q_i, d_i) .

Dado um conjunto finito $I=\{i\}$ de clientes, o problema de roteirização de veículos em G , denotado VRP (da sua expressão inglesa “Vehicle Routing Problem”), consiste em planejar viagens a custo mínimo, para satisfazer os clientes i segundo o ternário (o_i, q_i, d_i) informado. As origens o_i representam os depósitos de armazenamento dos produtos (fluxos) a serem transportados. Dependendo do caso, pode existir um único depósito chamado de Centro de Distribuição. A demanda d_i de um cliente i representa a quantidade em volume de produtos encomendada pelo respectivo cliente.

O VRP se apresenta como um problema central num sistema logístico combinando o transporte e a distribuição física (Dantzig & Ramser, 1959). Em alguns setores, a contribuição do transporte no valor final do produto pode chegar a um alto percentual. No entanto, na organização e gestão de transporte, o uso das novas tecnologias e de métodos computacionais avançados, resultou em economias significativas de 5% a 20% (Toth & Vigo, 2001).

Na literatura foram propostos modelos e variantes do VRP. Alguns, na sua resolução, podem levar em conta a otimização da composição da frota Beasley(1985), Golden *et al.* (1984), Gheysens *et al.* (1986), (Gheysens & Golden (1984) e (Desrochers & Verhoog (1991). Porém, na sua maioria, busca-se principalmente, apenas a otimização da roteirização.

O VRP é conhecido como um problema de programação inteira da categoria de problemas NP-Hard (Não Polinomial Difícil), isto é o esforço computacional requerido para solucionar o problema aumenta exponencialmente com o seu tamanho Belfiore (2006), Duallert *et al.*, (2002), Gendreau *et al.* (1999) e Taillard (1999). Logo no espaço de busca do problema estão todas as possíveis soluções e percorrer todas, seria inviável do ponto de vista de tempo.

Na literatura encontram-se alguns artigos que tratam o VRP capacitado (CVRP – “capacitated Vehicle Routing Problem”), onde a frota é composta por veículos de mesma capacidade, ou seja, homogênea podendo ela ser ilimitada Tarantilis *et al.* (2005) ou limitada Tarantilis & Kiranoudis (2004).

As variantes mais abordadas do VRP consideram uma frota heterogênea sendo composta por veículos do mesmo tipo com capacidades diferentes, ou de tipos e capacidades diferentes. Pode-se citar o VRP com:

- Frota limitada (HFFVRP – “Heterogeneous fixed fleet Vehicle Routing Problem”) (Tarantilis *et al.* 2004; Liu & Shen, 1999);
- Frota ilimitada (HVRP - Heterogeneous Vehicle Routing Problem) (Belfiore 2006;, Choi & Tcha 2007; Li *et al.* 2007; Parlaktuna *et al.*, 2007);
- Frota mista (FSMVRP – “Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem”) (Dell’Amico *et al.*, 2006; Sahli, & Rand, 1993; Golden *et al.*, 1984; Gheysens *et al.*, 1984).

A variante FSMVRP se diferencia das demais apresentadas, pois trata simultaneamente o problema da roteirização com o de dimensionamento de uma frota heterogênea de veículos de tipos e capacidades diferentes (Dell’Amico *et al.*, 2006).

A formulação do modelo para VRP abordado neste trabalho será o FSMVRP (“Fleet size mix vehicle routing problem”), pois o objetivo é o dimensionamento da frota e como apresentado anteriormente o FSMVRP trata simultaneamente o problema da roteirização com o de dimensionamento de uma frota heterogênea de veículos de tipos e capacidades diferentes.

O modelo a seguir formulado por Salhi & Rand (1993), trata de uma programação linear inteira mista considerando uma frota ilimitada.

Seja N o número de clientes, “0” o depósito e K o número de tipos de veículos. O custo fixo, a capacidade e o tempo máximo por tipo K de veículo são dados respectivamente por F_k , Q_k , T_k . A demanda do i -ésimo cliente é dada por q_j . O tempo e o custo variável de viagem de i para j são denotados respectivamente por t_{ij} e C_{ij} .

As variáveis de decisão são:

$X_{ijk} = 1$, se o veículo do tipo K viaja de i - j , no caso contrário, vale 0.

Y_{ij} é a variável contínua que denota a quantidade de bens transportados do cliente i para o cliente j .

R_{ij} é também a variável contínua que denota o tempo gasto pelo veículo para percorrer a distância de i para j .

O problema tem como objetivo minimizar o custo total agregando os custos variáveis e fixos.

$$\text{Min} \sum_{k=1}^K F_k \sum_{j=1}^N X_{0jk} + \sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N C_{ij} X_{ijk} \quad (7)$$

Sujeito à:

$$\sum_{k=0}^K \sum_{i=0}^N X_{ijk} = 1, \quad j = 1, \dots, N, \quad (8)$$

$$\sum_{i=0}^N X_{ijk} - \sum_{l=0}^N X_{jlk} = 0, \quad j = 0, \dots, N \quad k = 1, \dots, K, \quad (9)$$

$$\sum_{i=0}^N Y_{ij} - \sum_{l=0}^N Y_{jl} = q_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^N Y_{i0} = 0, \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^N Y_{0j} = \sum_{i=1}^N q_i \quad (12)$$

$$Y_{ij} \leq \sum_{j=1}^N X_{ijk} Q_k, \quad i \neq j = 0, \dots, N, \quad (13)$$

$$R_{ij} \leq \sum_{k=1}^K T_k X_{ijk}, \quad i \neq j = 0, \dots, N, \quad (14)$$

$$R_{0j} = \sum_{k=1}^K X_{0jk} T_k - \sum_{k=1}^K X_{0jk} t_{0j}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (15)$$

$$\sum_{i=0}^N R_{ip} - \sum_{j=0}^N R_{pj} = \sum_{k=1}^K \sum_{j=0}^N X_{pjk} t_{pj}, \quad p = 1, \dots, N, \quad (16)$$

$$X_{ijk} \in \{0,1\}, \quad Y_{ij} \geq 0, \quad Y_{ii} = 0 \quad R_{ij} \geq 0, \quad (17)$$

$$i = 0, \dots, N \quad j = 0, \dots, N \quad k = 1, \dots, K. \quad (18)$$

O dimensionamento da frota de veículos é obtido a partir da seguinte equação: $\sum_{j=1}^N X_{0jk}$, representando o número de veículos por cada tipo k de veículo.

A restrição (8) indica que cada cliente tem que ser visitado uma única vez e (9) garante que todos os clientes serão visitados. A restrição (10) denota que a diferença de quantidade entre os bens totais de um veículo quando chega a um cliente e sai, é igual a quantidade demanda por ele. A restrição (11) mostra que nenhum bem retornará ao depósito, ou seja, os veículos retornam vazios ao depósito. A restrição (12) denota que a quantidade total de bens saindo do depósito seja igual a demanda total dos clientes. A restrição (13) garante que os bens transportados de i para j sejam feitos somente quando há um veículo viajando de i para j . Isto mostra que o carregamento total do par ij não deve exceder a capacidade máxima do veículo (incluindo o par $0j$). As restrições de (10) a (13) são de capacidade e subtour da eliminação das restrições.

A Restrição (14) indica que existe um tempo de viagem entre o par ij que deve ser inferior ao tempo máximo do veículo do tipo K . A restrição (15) garante que o tempo gasto, depois de cobrir os pares saindo do depósito, não deve exceder ao tempo máximo permitido menos o tempo requerido para viajar até o primeiro cliente. A restrição (16) indica que toda vez que um veículo viajar entre dois clientes o tempo gasto é reduzido pela a distância do par.

Na literatura encontra-se também outro modelo que aborda o problema de dimensionamento da frota através da resolução do Problema de empacotamento, denotado BPP da sua versão inglesa (“*Bin Packing Problem*”).

2.3.

Problema de Bin Packing (The Bin Packing Problem - BPP)

Dado um conjunto finito $L = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ de objetos p_i associados a pesos respectivos $w(p_i)$ e um conjunto infinito de *Bins* de capacidade uniforme C . O BPP consiste em arrumar objetos que podem ser de diferentes dimensões em um número infinito de bins (contêineres, paletes, caixas, aviões, navios, trens, caminhões) de capacidade e volume limitados, e em geral uniformes. O objetivo do BPP consiste em minimizar o número de *bins* que conteriam todos os objetos (Alvim, 2004).

O problema de *Bin Packing* pertence à classe de problemas de NP- Hard (Chen *et al.*, 1995) e possui três variantes: unidimensional, bidimensional e tridimensional.

A primeira variante é a mais simples, chamada BPP unidimensional (1-D BPP) que objetiva particionar uma lista de objetos em sublistas (*bins*) de comprimento limitado (C), de maneira a minimizar o número de partições. Este tipo está relacionado a problemas de sequenciamento de tarefas e máquinas e empacotamento Bernardi (2001), Flestzar & Hindi (2000), Verweij (1996), Martello & Toth (1990) e Coffman *et al.* (1997).

A segunda variante chamada *BPP bidimensional* (2-D BPP) já foi estudada por diversos autores. O problema está relacionado a problemas de corte e empacotamento Dyckhoff & Finke, 1992; Berkley & Wang, 1989; Sleator, 1980; Beasley, 1985). Problemas de corte e problemas de empacotamento guardam uma estrutura lógica similar, uma vez que empacotar itens pequenos (caixas) em objetos maiores (paletes) é análogo a cortar o espaço vazio dos objetos maiores (chapas) em partes de espaços vazios, alguns dos quais ocupados pelos itens (Yamassaki & Pureza, 2003). Quando o objetivo é corte deseja-se minimizar a perda ou resíduo de materiais (Costa *et al.* 2005).

A terceira variante é a mais abordada na literatura conhecida como o problema de *Bin Packing Tri-dimensional* (3-D BPP). Ela está relacionada a problemas de carregamento de paletes Bischoff *et al.* (1995), containeres (Han *et al.*, 1989), (Martello *et al.*, 2000), trens (Hasseler & Talbolt, 1990), aviões (Chan *et al.*, 2006). Alguns autores tratam casos especiais como paletes de diferentes formas e tamanhos (Chan *et al.*, 2006), assim como em containeres consideram diferentes tamanhos e formatos de caixa, variando apenas na forma de alocação dos produtos dentro do container (Han *et al.*, 1989; George, 1992; Portman, 1991; George & Robinson, 1980; Ngoi *et al.*, 1994) e outros tratam junto ao carregamento, o balanceamento das cargas (Liu *et al.*, 2007).

Seja n o número de itens, $N:=\{1, \dots, n\}$ a lista de itens e $M:=\{1, \dots, m\}$ a lista de bins disponíveis. O peso do item j , $j \in N$, na primeira e segunda dimensão são w_j e v_j , respectivamente, e a capacidade dos *bins* na primeira e segunda dimensão são w e v , respectivamente.

Uma formulação para o bin packing bi-dimensional

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} \quad (19)$$

Sujeito á:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (20)$$

$$\sum_{j=1}^n w_j x_{ij} \leq w \quad \forall \quad i = 1, \dots, m \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^n v_j x_{ij} \leq v \quad \forall \quad i = 1, \dots, m \quad (22)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (23)$$

$$x_{ij} \text{ int} \quad \forall \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \quad (24)$$

A restrição 20 garante que todos os itens sejam alocados nos bins. As restrições 20 e 21 indicam que a somatória dos pesos da primeira e segunda dimensão dos itens alocados no *bin* i , não devem exceder a capacidade. As restrições 23 e 24 indicam que a variável x_{ij} é binária.