5
Método dos mínimos quadrados de Monte-Carlo

5.1
Introdução

Um método desenvolvido por "*Longstaff Schwartz*" (2001) permite estimar o valor de continuação da opção americana usando uma regressão “*cross-section*” que utiliza os mínimos quadrados. Esse método é conhecido como "*Least Squares Monte Carlo*".

Opções americanas são mais flexíveis que as européias. **Uma opção americana pode ser exercida em qualquer tempo antes do vencimento da opção**, se tornando mais valiosa que a européia. Procedendo *backwards*, em cada tempo antes da expiração, podemos exercer a opção. Mas qual é a regra de decisão ótima? Para sabê-la devemos avaliar em cada tempo duas coisas:

- O valor do exercício imediato
- O valor de espera, ou seja, o valor de continuação.

Assim, comparando os dois valores, podemos escolher qual é a decisão ótima. Se o valor de exercício imediato for maior que o valor de continuação estimado, a opção deveria ser exercida. Se for o caso de esperar, deveríamos avaliar esses valores de novo num tempo anterior.

Na simulação, a avaliação da opção é feita do final para o início. Praticamente, os preços no período inteiro e em cada data de exercício são simulados. Analisando *backwards* do vencimento até o início do período, podemos em cada momento tomar a decisão ótima.

A velocidade de convergência desse método depende de vários parâmetros: a função usada para realizar a regressão e achar o valor de continuação, ou a seleção dos caminhos usados na regressão por exemplo.

Através de um exemplo simples podemos ver o funcionamento desse método e os melhoramentos que foram implementados no programa computacional.

5.2
Apreçamento das opções americanas

O problema quando queremos avaliar uma opção americana é que essa opção pode ser exercida em todos os momentos até o vencimento. De fato devemos decidir em cada momento se a opção é exercida ou não.

Podemos agora ver que a precisão do cálculo depende do número de datas simuladas para cada caminho. Para simular eficientemente a propriedade da opção americana a ser exercida em qualquer momento, devemos ter o valor do ativo em cada momento. Mas numericamente no computador, o processo no tempo contínuo deve ser discretizado. Então, quanto menor for o intervalo de discretização, maior será a precisão do cálculo da opção americana.

Para tomar a decisão ótima no tempo "t-1", o método dos Mínimos Quadrados de Monte-Carlo usa uma regressão dos payoffs da opção do período "t" descontados no período "t-1", sobre os preços do período "t-1".

5.3
Exemplo numérico dos "Mínimos Quadrados"

No exemplo consideramos uma opção de compra (uma call). O ativo objeto não paga dividendos e tem as seguintes características:

Preço do ativo no início	S=10
Strike da opção	k=10.5
Tempo à expiração (ano)	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0

Para entender o funcionamento desse método, o tempo de 1 ano da opção será dividido em 3 períodos, sejam cada 4 meses. 3 é o número de datas de exercício simuladas no período total. Os preços são simulados usando o mesmo método que no capítulo 3 usando um movimento geométrico browniano escrito na medida de Martingale. Simulando 10 caminhos:

Caminho	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	Payoff em t = 3
1	*10*	*8,2452*	*7,7990*	*8,1615*	***0***
2	*10*	*9,5905*	*7,6580*	*8,4797*	***0***
3	*10*	*10,4917*	*9,3992*	*7,6605*	***0***
4	*10*	*9,7570*	*10,4250*	*10,3200*	***0***
5	*10*	*11,4015*	*11,3580*	*10,6652*	***0,1652***
6	*10*	*12,3116*	*13,2126*	*12,8167*	***2,3167***
7	*10*	*10,5845*	*13,4559*	*12,3357*	***1,8357***
8	*10*	*10,6203*	*10,9632*	*13,6547*	***3,1547***
9	*10*	*10,4040*	*9,4321*	*10,1360*	***0***
10	*10*	*8,9034*	*9,0725*	*9,8078*	***0***

Tabela 9 – Tabela dos preços do ativo nos 3 períodos – Payoff no tempo 3

Tempo 3

A análise da decisão ótima começa no tempo final. Dependendo do valor do ativo, temos na ultima coluna o payoff da opção de compra com valor de preço de exercício de 10.5.

Tempo 2

Agora devemos saber no tempo 2 se o exercício da opção é ótimo. O exercício somente ocorre quando a opção esta "*in-the-money*" no tempo 2, e que o valor imediato é maior que o valor de esperar.

Os caminhos "*in-the-money*" ITM, no momento 2 são os "5-8":

Caminho	t = 0	t = 1	t = 2	Exercício imediato t = 2
1	*10*	*8,2452*	*7,7990*	***0***
2	*10*	*9,5905*	*7,6580*	***0***
3	*10*	*10,4917*	*9,3992*	***0***
4	*10*	*9,7570*	*10,4250*	***0***
5	*10*	*11,4015*	*11,3580*	***0,8580***
6	*10*	*12,3116*	*13,2126*	***2,7126***
7	*10*	*10,5845*	*13,4559*	***2,9559***
8	*10*	*10,6203*	*10,9632*	***0,4632***
9	*10*	*10,4040*	*9,4321*	***0***
10	*10*	*8,9034*	*9,0725*	***0***

Tabela 10 – Caminhos "*in-the-money*" e exercício imediato no tempo 2

Para cada caminho ITM temos que calcular o valor de continuação. Só os valores dos caminhos ITM são selecionados para calcular os valores de continuação e achar os parâmetros da regressão.

- X representa o vetor dos preços do título no momento do estudo, ou seja, no período 2.
- Y representa o vetor dos valores do payoff futuro (período 3) descontado ao período presente, se a opção não for exercida.

O desconto é de $e^{-O.O5*(1/3)}$ e é feito sobre um terço do ano.

Y	X
-	-
-	-
-	-
-	-
$0{,}1652 \times e^{-O.O5*(1/3)}$	*11,3580*
$2{,}3167 \times e^{-O.O5*(1/3)}$	*13,2126*
$1{,}8357 \times e^{-O.O5*(1/3)}$	*13,4559*
$3{,}1547 \times e^{-O.O5*(1/3)}$	*10,9632*
-	-
-	-

Tabela 11 – Vetores da primeira regressão no tempo 2

O valor de continuação é estimado por meio de uma regressão do vetor Y sobre uma constante, o vetor X e X² da seguinte forma: $E[Y/X] = a.X^2 + b.X + c$ (O segundo grau foi usado aqui para simplificar o exemplo, mas qualquer grau maior pode ser usado). Usando o método dos Mínimos Quadrados de Monte-Carlo, e os dados acima para estimar os parâmetros "a,b,c":

$$E[Y/X] = 2{,}2474.X^2 - 54{,}9253.X + 334{,}7113$$

E finalmente os valores de continuação são calculados com a fórmula acima e o vetor X:

$E[Y/X]$	**Exercício imediato t = 2**	**Decisão ótima**
-	-	-
-	-	-
-	-	-
-	-	-
0,7854	***0,8580***	***Exercer***
1,3354	***2,7126***	***Exercer***
2,5577	***2,9559***	***Exercer***
2,6703	*0,4632*	***Esperar***
-	-	-
-	-	-

Tabela 12 – Comparação dos valores de exercício imediato e de continuação. Decisão ótima no tempo 2

Os valores do payoff da opção no tempo 2 são:

Payoff em t = 2
0
0
0
0
0,8580
2,7126
2,9559
$3{,}1547 \times e^{-0.05*(1/3)}$
0
0

Tabela 13 – Payoff da opção no tempo 2

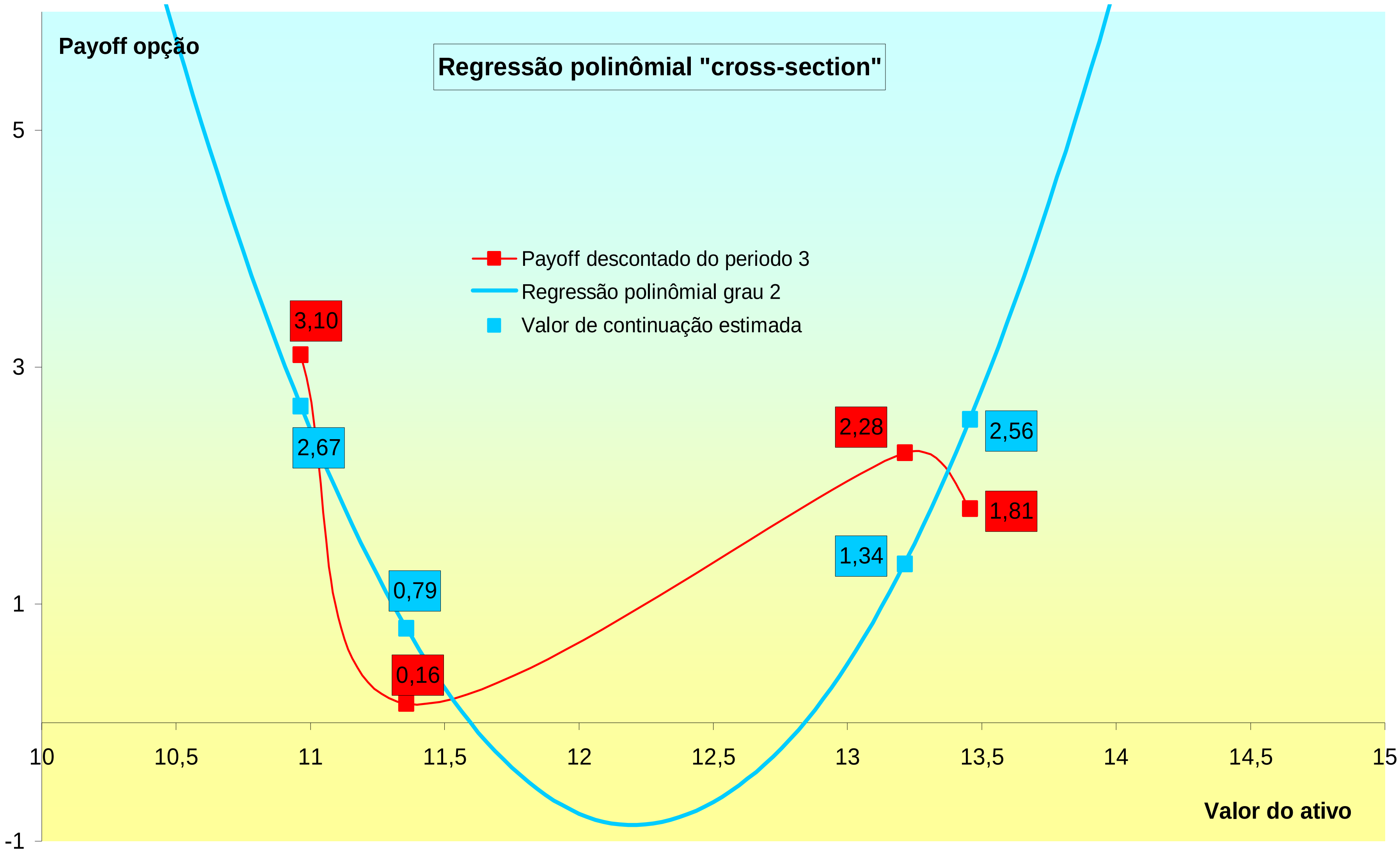

Figura 7 – Regressão polinomial no tempo 2

Tempo 1

Da mesma forma devemos escolher os caminhos ITM no momento 1 para realizar o cálculo dos valores estimados.

Caminho	t = 0	t = 1	Exercício imediato t = 1
1	*10*	*8,2452*	***0***
2	*10*	*9,5905*	***0***
3	*10*	*10,4917*	***0***
4	*10*	*9,7570*	***0***
5	*10*	*11,4015*	***0,9015***
6	*10*	*12,3116*	***1,8116***
7	*10*	*10,5845*	***0,0845***
8	*10*	*10,6203*	***0,6203***
9	*10*	*10,4040*	***0***
10	*10*	*8,9034*	***0***

Tabela 14 – Caminhos "*in-the-money*" e exercício imediato no tempo 1

X representa o vetor dos preços do título no momento do estudo, ou seja, no período 1.

Y representa o vetor dos valores do payoff futuro (período 3 e 2) descontado ao período presente, se a opção não for exercida. O desconto de $e^{-O.O5*(1/3)}$ é feito sobre um terço do ano, e de $e^{-O.O5*(2/3)}$ para o caminho 8, porque o valor deve ser descontado sobre 2 períodos consecutivos.

Y	X
-	-
-	-
-	-
-	-
$0{,}8580 \times e^{-O.O5*(1/3)}$	*11,4015*
$2{,}7126 \times e^{-O.O5*(1/3)}$	*12,3116*
$2{,}9559 \times e^{-O.O5*(1/3)}$	*10,5845*
$3{,}15457 \times e^{-0.05*(2/3)}$	*10,6203*
-	-
-	-

Tabela 15 – Vetores da segunda regressão no tempo 1

Realizando de novo a estimação do valor de Y esperado $E[Y/X]$ para uma regressão polinomial de grau 2:

$$E[Y/X] = 2{,}6911.X^2 - 61{,}8534.X + 356{,}2609$$

Com os seguintes resultados:

$E[Y/X]$	**Exercício imediato t = 1**	**Decisão ótima**
-	-	-
-	-	-
-	-	-
-	-	-
0,8567	***0,9015***	***Exercer***
2,6650	*1,8116*	***Esperar***
3,0586	*0,0845*	***Esperar***
2,8895	*0,6203*	***Esperar***
-	-	-
-	-	-

Tabela 16 – Comparação dos valores de exercício imediato e de continuação. Decisão ótima no tempo 1

Os valores do payoff da opção no tempo 1, e o instante de exercício são:

Payoff a t = 1	**Período de exercício**
0	-
0	-
0	-
0	-
0,9015	***1***
$2{,}7126 \times e^{-0.05*(1/3)}$	***2***
$2{,}9559 \times e^{-0.05*(1/3)}$	***2***
$3{,}1547 \times e^{-0.05*(2/3)}$	***3***
0	-
0	-

Tabela 17 – Payoff da opção no tempo 1

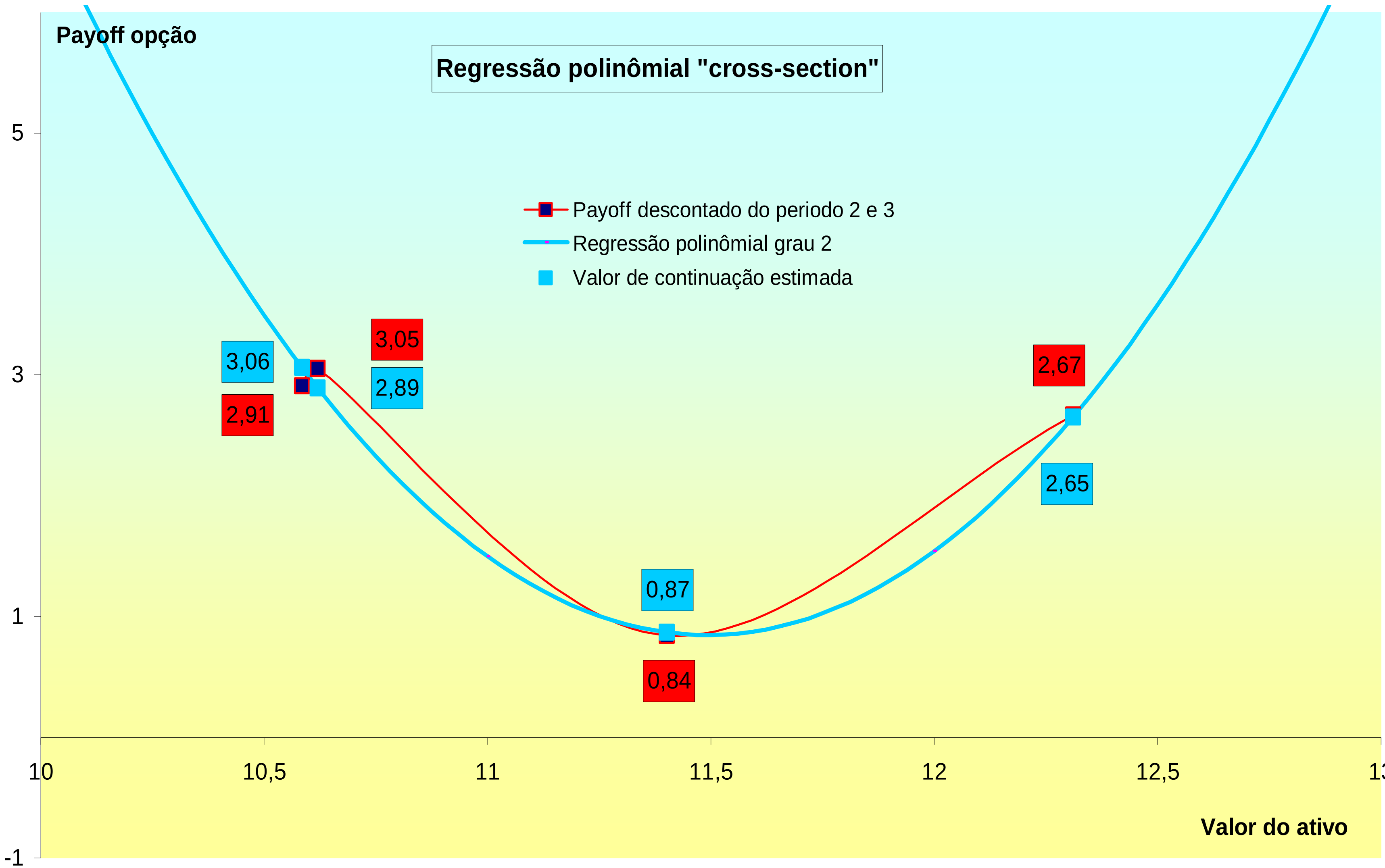

Figura 8 – Regressão polinomial no tempo 1

Finalmente podemos obter o valor da opção descontando os valores dos payoff para cada caminho até o instante 0 e calcular a média sobre todos os caminhos simulados. Nesse exemplo, calculando a média dos valores dos payoffs da tabela 16:

$$ValorCall = 2{,}3425$$

Para uma opção americana, a precisão desse método depende do número de datas de exercício simulado, para simular eficientemente a possibilidade de exercer uma opção americana no qualquer momento. O número de caminhos simulados, como em cada simulação de Monte-Carlo, entra em consideração.

5.4
Análise de sensibilidade

O uso das funções polinomiais é muito intuitivo para aproximar com precisão uma função *a priori* não conhecida. Podemos entender que um grau muito grande no polinômio aumenta o tempo de cálculo e a precisão da aproximação. Os números manipulados são do tamanho 100^j com j sendo o grau escolhido. O melhor compromisso, no conjunto precisão-tempo computacional, é obtido com os graus entre 3 e 5.

Para conferir os valores numéricos, uma call sem dividendos será usada. Sabemos que uma opção de compra americana sem dividendos tem o mesmo valor que uma opção de compra européia, porque nunca é ótimo o seu exercício antecipado. Ao contrário, o valor da opção de venda americana sem dividendos é maior que a opção de venda européia.

Usando a definição da opção (call) e do título objeto seguinte e com os parâmetros padrões:

Preço do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=105
Tempo à expiração (ano)	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0
Número de datas de exercício	m=100
Grau polinomial	g=2

5.4.1
Análise de sensibilidade no grau polinomial

O ano de exercício da opção foi dividido em 50 datas diferentes de exercício para o cálculo. A média e o desvio-padrão são calculados sobre 10 valores calculados pelo programa computacional:

Call	**Número de simulações**	10	100	1000	2000	5000
Grau polinomial	**Número de datas de exercício**	10	50	50	50	50
2	μ	*9,9365*	*8,5305*	*8,0952*	*8,0264*	*8,0121*
	σ	*3,0217*	*0,6224*	*0,3667*	*0,2761*	*0,1266*
3	μ	*10,5401*	*9,2395*	*7,9133*	*7,9442*	*7,9845*
	σ	*2,4399*	*0,9143*	*0,2541*	*0,1223*	*0,0767*
4	μ	*9,8056*	*8,8637*	*8,2256*	*8,0576*	*8,0098*
	σ	*2,2185*	*1,0053*	*0,2519*	*0,1228*	*0,0643*
5	μ	*10,8438*	*9,2781*	*8,0201*	*7,9595*	*8,0078*
	σ	*2,3660*	*0,5943*	*0,2522*	*0,1365*	*0,0621*

Tabela 18 – Valores das opções – Sensibilidade em grau polinomial

Geralmente, o desvio-padrão cai com o aumento do grau polinomial da regressão. Uma regressão polinomial com alto grau aumenta a precisão do cálculo do valor da opção, mas aumenta também o tempo computacional.

No retângulo marcado foi encontrado problemas de aproximação no cálculo. Esses parâmetros para a simulação não permitem uma regressão precisa, as matrizes são quase singulares (números aproximados da ordem 10^{-6}). O grau 2 pode ser usado assim como o grau 3, sem problemas de aproximação nem grande tempo computacional. O grau 2 será usado nos outros cálculos, seguindo ao método original de "*Longstaff Schwartz*" (2001).

O preço da opção de compra americana obtida pelo método binomial é de $0{,}80207$, e da opção de compra européia sem dividendos (do mesmo valor) dado pela formula de *Black-Scholes* é de $0{,}80213$, a comparar com os resultados da tabela acima.

5.4.2
Análise de sensibilidade no número de simulações

O ano foi dividido em 100 datas de exercício, ou seja, um valor do ativo simulado a cada 3 dias aproximadamente.

A média e desvio-padrão são calculados sobre 10 valores calculados pelo programa computacional:

Número de simulações	Opção de compra		Opção de venda	
	μ	σ	μ	σ
500	*7,9957*	*0,5607*	*8,8880*	*0,2495*
1000	*8,1697*	*0,3114*	*8,8533*	*0,1817*
5000	*7,9348*	*0,1859*	*8,7373*	*0,0796*
10000	*7,9865*	*0,0455*	*8,7354*	*0,0332*
20000	*8,0187*	*0,0104*	*8,7397*	*0,0123*

Tabela 19 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações

Com 100 datas de exercícios simuladas, a discretização escolhida permite aproximar com precisão a característica da opção americana de ser exercida em qualquer momento. Assim, em média, o valor calculado fica próximo do valor real.

Aumentando o número de simulações, o desvio-padrão cai, tornando a simulação mais precisa, até encontrar o valor teórico com 20 000 simulações. Usando um computador com grande capacidade de cálculo, esse algoritmo pode ser usado com 50000 simulações e 365 datas de exercícios proporcionando um resultado muito preciso.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.4.

5.4.3
Análise de sensibilidade no número de datas de exercício

Efetuando 5000 simulações para conservar a precisão do cálculo, podemos estudar a convergência da simulação com o número de datas de exercício variando de 10 a 150. A média e desvio-padrão são estimados sobre 10 valores calculados pelo programa:

Número de datas de exercício	**Opção de compra**		**Opção de venda**	
	μ	σ	μ	σ
10	*7,3912*	*0,1946*	*8,5059*	*0,0648*
20	*7,7398*	*0,1552*	*8,6237*	*0,0319*
50	*7,9418*	*0,1623*	*8,6936*	*0,0698*
100	*7,9855*	*0,1476*	*8,7022*	*0,0556*
150	*8,0254*	*0,1245*	*8,7276*	*0,0678*

Tabela 20 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de datas de exercício simuladas

Variando somente o número de datas de exercício, podemos ver a convergência da simulação para o valor teórico da opção americana. Usando um número de datas de exercício baixo, *10* e *20*, os valores da opção de compra e de venda são subestimados**.** A característica da opção de poder ser exercida em qualquer momento é mal simulada. Logo, a opção assim simulada se torna menos valiosa. Aumentando esse número, a simulação se aproxima em média do valor real da opção americana, o exercício antecipado é simulado de uma forma mais próxima da realidade.

Os parâmetros básicos que funcionam sem aproximação de cálculo e que realizam uma boa estimação do valor da opção são: "10000 simulações, 150 datas de exercícios, grau 2" para *T=1*, seja um ano. Quanto maior for o número de simulações e o número de datas de exercício, maior será a precisão do resultado.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.5.