7
Opção cash-or-nothing

7.1
Definição

A opção "cash-*or-nothing*" paga um prêmio definido, se a opção expira "*in-the-money*" no vencimento. Caso contrário, o payoff é zero.

Sendo P o prêmio definido na opção e k o strike:

$$PayoffCall = \begin{Bmatrix} P & S > k \\ 0 & caso\,contrário \end{Bmatrix}$$

$$PayoffPut = \begin{Bmatrix} P & S < k \\ 0 & caso\,contrário \end{Bmatrix}$$

Nesse tipo de opção, o preço de exercício não entra no cálculo do payoff, mas somente na condição de exercício da opção. (opção "*in-the-money*" ou "*out-of-the-money*"). O valor do prêmio logicamente influi sobre o preço da opção no momento da compra, seja uma opção de compra ou de venda, sendo mais alto quanto maior for o prêmio.

7.2
Exemplo numérico

Seja uma opção com os parâmetros seguintes:

Preço do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=100
Prêmio	P=40
Tempo à expiração	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0

Exemplo da opção de compra:

No vencimento, o preço do ativo $S = 113{,}21$.

A opção de compra expira "*in-the-money*", sendo o preço final maior que o strike, podendo ser exercida. Essa opção paga um prêmio de 40.

Exemplo da opção de venda:

No vencimento, o preço do ativo $S = 87{,}49$.

A opção de venda com strike $k = 100$ expira "*in-the-money*", sendo preço final menor que o strike e pagando o prêmio de 40.

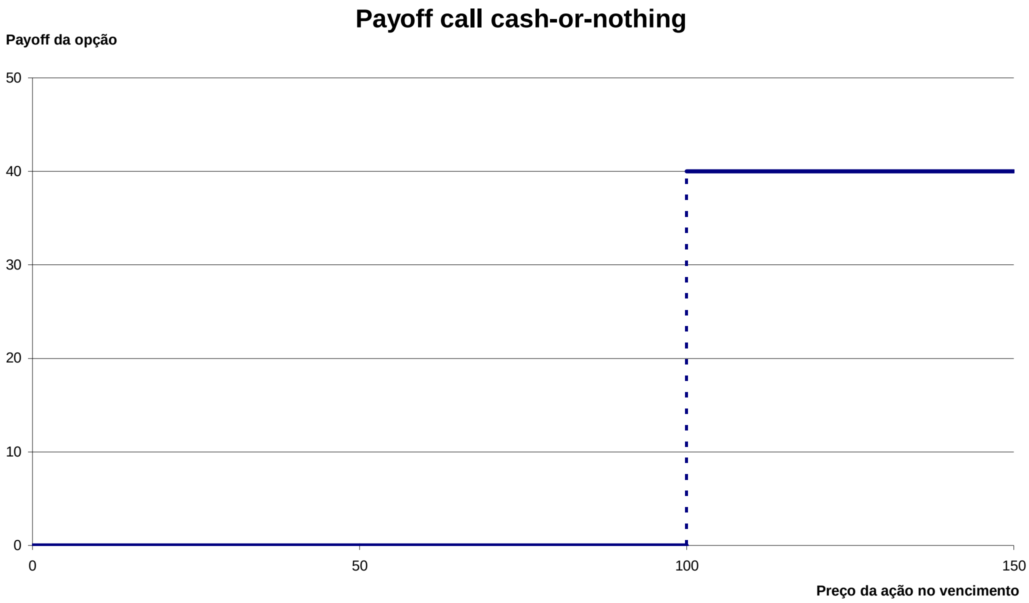

Figura 11 – Payoff da opção de compra “*cash-or-nothing*”

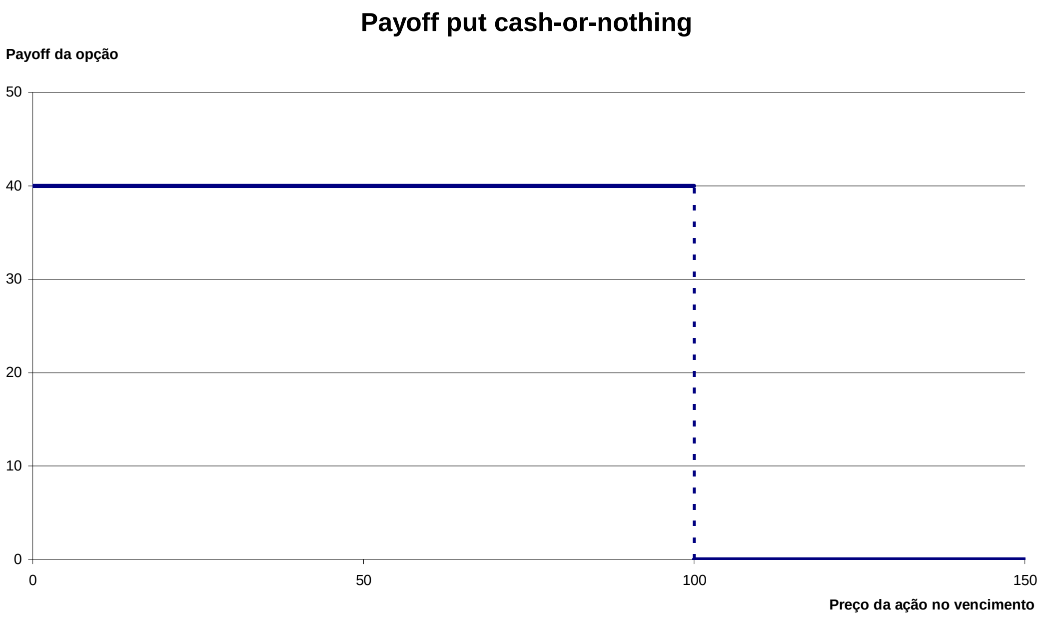

Figura 12 – Payoff da opção de venda “*cash-or-nothing*”

7.3
Formula exata de cálculo

Reiner & Rubinstein (1991) mostraram que apreçar esse tipo de opção pode ser feito usando a trabalho de Black & Scholes:

Usando $$d = \frac{\ln\left(S/k\right) + (r - y - \frac{v^2}{2}).T}{v.\sqrt{T}}$$

$$\Pr eçoCall = P \times e^{-r.T} \times N(d) \qquad \Pr eçoPut = P \times e^{-r.T} \times N(-d)$$

O valor da opção é o valor presente do payoff da opção (prêmio), multiplicado pela probabilidade de exercício da opção no vencimento. (no mundo neutro ao risco). Independentemente dos outros parâmetros, podemos ver que a soma das opções de compra e de venda é constante.

Usando as formulas exatas:

$$\Pr eçoCall + \Pr eçoPut = P \times e^{-r.T} \times N(d) + P \times e^{-r.T} \times N(-d)$$

Sabemos que para uma distribuição normal centrada padronizada:

$$N(-d) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{-d} e^{\frac{-Z^2}{2}} .dZ$$

E, conseqüentemente, pela simetria da função integrada:

$$N(-d) + N(d) = 1$$

Então: $$\Pr eçoCall + \Pr eçoPut = P \times e^{-r.T}$$

7.4
Análise de sensibilidade

Os parâmetros padrões da opção usados pelas analises de sensibilidade são:

Preço do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=100
Prêmio	P=40
Tempo à expiração (ano)	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0

7.4.1
Sensibilidade em mudança no numero de simulações

A média é calculada sobre *10* valores dados pelo programa computacional com os parâmetros dados no quadro acima:

Numero de simulações	**Opção de compra**		**Opção de venda**	
	μ	σ	μ	σ
100	*21,4978*	*1,1093*	*17.1982*	*1.4321*
1000	*21,3912*	*0,3043*	*16.6579*	*0.2564*
10 000	*21,2448*	*0,1041*	*16.8044*	*0.1041*
100 000	*21,2945*	*0,0343*	*16.7547*	*0.0403*
1 000 000	*21,2935*	*0,0115*	*16.7556*	*0.0123*
Preço teórico	***21,2930***		***16,7562***	

Tabela 25 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações

Observamos uma convergência em média do resultado para o valor teórico, aumentando o número de simulações. A queda do desvio-padrão prova que o preço simulado fica perto do valor teórico e que esse modelo converge para a solução teórica.

7.4.2
Sensibilidade em mudança no valor do strike

A simulação foi feita usando *100 000* simulações:

Preços de exercício	Opção de compra	Opção de venda
75	*35,9070*	*2,1422*
80	*34,2176*	*3,8316*
85	*31,6269*	*6,4223*
90	*28,5449*	*9,5043*
95	*25,1094*	*12,9398*
100	*21,3182*	*16,7310*
105	*17,6156*	*20,4335*
110	*14,1356*	*23,9135*
115	*11,0289*	*27,0202*
120	*8,4739*	*29,5752*
125	*6,4063*	*31,6428*

Tabela 26 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao valor do preço de exercício

O valor da opção e bastante sensível a mudanças do preço de exercício. Como visto acima, a soma das opções de compra e de venda fica constante.

Quando o strike cai para zero, a opção de compra tem mais probabilidade de estar "*in-the-money*".

Se $k \to 0$, então $\ln(S/k) \to \infty$. Conseqüentemente, $d \to \infty$, e

$N(d) \to 1$. O valor é: $\Pr eçoCall = P \times e^{-rT}$.

Ao contrário, quando o strike tende ao infinito, a opção de venda tem mais chances de ser exercida:

Se $k \to \infty$, então $\ln(S/k) \to -\infty$. Conseqüentemente, $d \to -\infty$, e

$N(d) \to 0$. O valor é: $\Pr eçoPut = P \times e^{-rT}$.

Uma simetria das curvas pode ser vista no gráfico dado no anexo 3.9, com valor mínimo 0 e máximo $P \times e^{-r.T}$.

7.4.3
Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade

A simulação foi feita usando *100 000* simulações:

Volatilidade	Compra	Venda	Volatilidade	Compra	Venda
5	31,7893	6,2599	53	16,4395	21,6096
9	26,3898	11,6594	57	16,0393	22,0099
13	23,7480	14,3012	61	15,6687	22,3805
17	22,1754	15,8737	65	15,2684	22,7808
21	21,0633	16,9859	69	14,9408	23,1084
25	20,1390	17,9101	73	14,6257	23,4235
29	19,4378	18,6114	77	14,2072	23,8420
33	18,8256	19,2236	81	13,9302	24,1190
37	18,2526	19,7966	85	13,5033	24,5459
41	17,7903	20,2589	89	13,3613	24,6878
45	17,2937	20,7554	93	12,9439	25,1052
49	16,8493	21,1999	97	12,6765	25,3427

Tabela 27 – Valores das opções - Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade

Para esses parâmetros escolhidos, a volatilidade influi sobre o preço da opção. A variação do preço fica mais importante quanto menor for o valor da volatilidade, especialmente para os valores fracos de volatilidade (em torno de 5%). Depois do valor *20*, a relação entre volatilidade e preço é linear, com uma boa aproximação.

Da mesma forma, a soma call-put fica constante, pois as curvas são simétricas.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.10.

7.4.4
Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco

A simulação foi feita usando *100 000* simulações:

Taxa livre de risco (%)	Opção de compra	Opção de venda
1	18,9998	20,6021
2	19,6040	19,6040
3	20,1666	18,6512
4	20,7388	17,6927
5	21,2177	16,8314
6	21,7713	15,8992
7	22,3182	14,9776
8	22,8453	14,0794
9	23,2705	13,2867
10	23,7154	12,4781
11	24,0861	11,7473

Tabela 28 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco

O aumento da taxa livre de risco aumenta o preço da call e diminui o preço da put. O *drift* na simulação dos preços (Ver anexo 1.5) aumenta o valor esperado médio no tempo.

Aumentar a taxa livre de risco aumenta o *drift*, e como o strike fica constante, os cenários do exercício da call ficam mais prováveis, e os da put menos prováveis, explicando a evolução dos preços.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.11.