

## 9

### Opção asiática

#### 9.1

##### Definição

A opção asiática não usa o valor do ativo no cálculo do payoff, mas o valor médio do ativo no período de exercício da opção. Desse modo, as opções asiáticas têm menor volatilidade que as opções europeias, deixando elas menos caras. A opção asiática é uma opção "path-dependent", e a evolução do ativo na vida da opção influi no payoff dela. Essas opções são usadas com ativos "money exchange", ou ativos que têm pequeno volume negociado no mercado. Elas foram usadas pela primeira vez em 1987 pelo *Banker's Trust Tokyo* e assim ganharam o nome de "Asian option".

Podemos calcular a média de duas formas: a forma geométrica e a forma aritmética. O payoff geométrico usa a média geométrica e é dado por:

$$PayoffCall = \max\left(\left(\prod_{i=1}^n S_i\right)^{1/n} - k, 0\right) \quad PayoffPut = \max\left(k - \left(\prod_{i=1}^n S_i\right)^{1/n}, 0\right)$$

e o payoff aritmético usa a média aritmética clássica dada por:

$$PayoffCall = \max\left(\frac{\sum_{i=1}^n S_i}{n} - k, 0\right) \quad PayoffPut = \max\left(k - \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{n}, 0\right)$$

onde os  $S_i$  são os valores consecutivos do ativo no período considerado. O método de cálculo da média está incluído como informação na definição da opção asiática.

## 9.2 Formula exata: forma geométrica

Kemna e Vorst (1990) conseguiram uma solução analítica para apreçar as opções asiáticas, usando a média geométrica. O ativo seguindo uma distribuição lognormal, a média geométrica segue também essa mesma distribuição, mas com parâmetros diferentes.

Com os parâmetros iniciais seguintes:

Preço do ativo no início	S
Strike da opção	k
Tempo à expiração	T
Taxa livre de risco	r
Volatilidade do ativo	v
Dividend Yield do ativo	y

$$\text{PreçoCall} = S.e^{-(r-b)T} .N(d_1) - k.e^{-rT} .N(d_2)$$

$$\text{PreçoPut} = -S.e^{-(r-b)T} .N(-d_1) + k.e^{-rT} .N(-d_2)$$

Com

$$d_1 = \frac{\ln(S/k) + (b + \frac{w^2}{2}).T}{w.\sqrt{T}} \quad d_2 = \frac{\ln(S/k) + (b - \frac{w^2}{2}).T}{w.\sqrt{T}} = d_1 - w.\sqrt{T} \text{ e}$$

$$w = \frac{v}{\sqrt{3}} \quad b = \frac{1}{2}(r - d - \frac{v^2}{6})$$

e  $b$  são os novos parâmetros da volatilidade e do *dividend yield* ajustados para o cálculo da opção asiática na forma geométrica.

### 9.3 Exemplo numérico

Sendo uma opção asiática com os seguintes parâmetros:

Preço do ativo no início	$S=100$
Strike da opção	$k=100$
Tempo à expiração	$T=1$
Taxa livre de risco	$r=5\%$
Volatilidade do ativo	$v=20\%$
Dividend Yield	$y=0$
Número de datas de exercício	$m=365$

O programa computacional divide o tempo total (1 ano) em 365 períodos e simula um preço para cada dia. Usando a média geométrica:

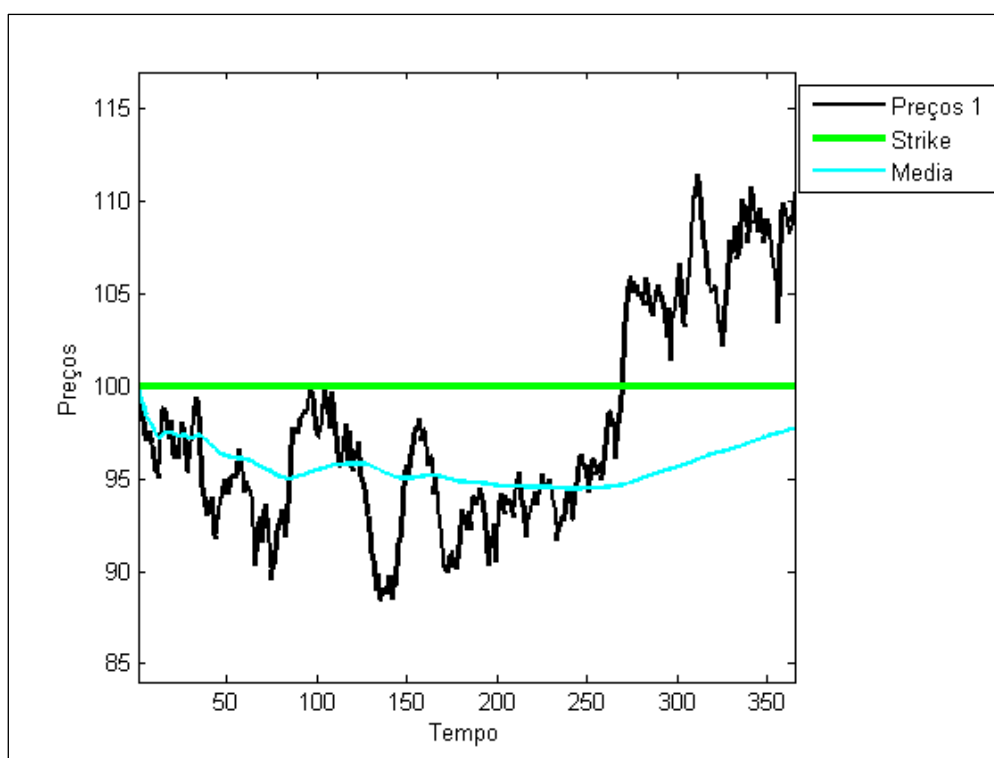


Figura 14 – Gráfico de simulação do preço do ativo objeto no ano e a média no ano

No vencimento, o preço do ativo é maior que o valor do preço de exercício. Mas em média no ano, o ativo ficou abaixo do strike. A opção asiática usando a média para calcular o payoff, dá um payoff nulo para a opção de compra e positivo para a opção de venda (média menor que o preço de exercício). Graficamente podemos ver que a volatilidade da média é menor que a do ativo. A média tem variações menores no período.

## 9.4 Análise de sensibilidade

Os parâmetros padrões da opção usados pelas análises de sensibilidade são:

Preço do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=100
Tempo à expiração	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0
Número de datas de exercício	m=365

O ano foi dividido em 365 dias e a simulação calcula um preço para cada dia. As sensibilidades foram calculadas para os dois tipos de cálculo da média, geométrico e aritmético.

### 9.4.1 Sensibilidade em relação ao número de simulações

Número de simulações	Opção de compra				Opção de venda			
	Aritmético		Geométrico		Aritmético		Geométrico	
	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
100	5,89	0,56	5,27	0,44	3,43	0,40	3,26	0,34
500	5,64	0,26	5,49	0,27	3,25	0,19	3,42	0,18
1000	5,66	0,21	5,52	0,17	3,29	0,16	3,45	0,12
2000	5,75	0,14	5,66	0,11	3,38	0,13	3,47	0,09
5000	5,73	0,10	5,55	0,07	3,36	0,07	3,49	0,05
10 000	5,67	0,07	5,63	0,04	3,42	0,04	3,47	0,03

Tabela 38 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações

A convergência do valor médio dos resultados existe, tanto pelo método aritmético quanto pelo geométrico. O desvio-padrão cai com o aumento do número de simulações. O método geométrico tem sempre um desvio-padrão menor que o método aritmético, para qualquer número de simulações consideradas. Os valores teóricos da opção de compra e de venda são respectivamente: 5,94 e 3,20.

### 9.4.2

#### Sensibilidade em mudança no valor do preço de exercício

A simulação foi feita usando 5 000 simulações:

Preços do Strike	Opção de compra		Opção de venda	
	Aritmético	Geométrico	Aritmético	Geométrico
90	12,58	12,38	0,65	0,76
92	11,08	10,71	1,03	1,03
94	9,49	9,40	1,38	1,56
96	8,08	7,76	1,89	1,91
98	6,94	6,61	2,61	2,64
100	5,83	5,60	3,40	3,51
102	4,80	4,50	4,28	4,33
104	3,95	3,89	5,33	5,57
106	3,12	3,03	6,43	6,64
108	2,50	2,30	7,70	7,85
110	1,80	1,79	8,97	9,24

**Tabela 39 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao valor do preço de exercício**

Os dois métodos em geral dão um resultado próximo, tanto para a opção de compra quanto para a opção de venda. Como previsto, o valor da opção de compra cai com a diminuição do preço de exercício (a opção tem maior chances de expirar *in-the-money*) e o valor da opção de venda aumenta com o aumento do preço de exercício. Esses valores das opções asiáticas são comparados com o valor da opção europeia de mesmos parâmetros na tabela seguinte:

Preço de exercício	Opção de compra	Opção de venda
90	16,74	2,33
110	6,02	10,65

**Tabela 40 – Valores das opções europeias com mesmos parâmetros**

A média tem uma volatilidade menor que a do ativo, as expectativas de retorno são menores e o preço das opções fica menor para o tipo asiático em comparação com o tipo europeu.

Existe uma relação quadrática entre valor do strike e preço da opção que pode ser visto no gráfico do anexo 3.17.

### 9.4.3 Sensibilidade em mudança na volatilidade

A simulação foi feita usando 5 000 simulações:

Volatilidade	Opção de compra		Opção de venda	
	Aritmético	Geométrico	Aritmético	Geométrico
5	2,71	2,70	0,30	0,31
9	3,43	3,36	1,02	1,03
13	4,22	4,18	1,81	1,90
17	4,93	4,93	2,55	2,76
21	5,94	5,70	3,53	3,67
25	6,81	6,46	4,42	4,59
29	7,87	7,42	5,41	5,65
33	8,77	8,11	6,27	6,57
37	9,63	8,85	7,16	7,40
41	9,97	9,70	7,72	8,56
45	11,34	9,94	8,84	9,31

Tabela 41 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade

Os preços das opções de compra e de venda aumentam com o aumento da volatilidade. As variações dos valores do ativo são mais fortes, e assim a probabilidade de expirar “*in-the-money*” aumenta.

Comparando com os valores da opção europeia com os mesmos parâmetros:

Volatilidade (%)	Opção de compra	Opção de venda
5	2,05	1,93
45	17,86	17,74

Tabela 42 – Valores das opções europeias com mesmos parâmetros

O cálculo da média em cada data, no período considerado, deve incluir todos os preços passados. Assim, quando o tempo passa, o número de valores considerados aumenta. Cada valor tem um peso menor, e a influencia de um valor a mais fica menor. A opção asiática fica muito menos cara que a europeia, para valores de volatilidade altos.

Existe uma relação linear entre volatilidade e preço da opção que pode ser visto no gráfico do anexo 3.18.

#### 9.4.4 Sensibilidade em mudança na taxa livre de risco

A simulação foi feita usando 5 000 simulações:

Taxa livre de risco	Opção de compra		Opção de venda	
	Aritmético	Geométrico	Aritmético	Geométrico
1	4,77	4,63	4,29	4,46
2	5,12	4,94	4,12	4,26
3	5,33	5,15	3,86	3,99
4	5,56	5,32	3,61	3,72
5	5,77	5,52	3,35	3,44
6	6,10	5,81	3,20	3,26
7	6,25	5,98	2,92	2,99
8	6,55	6,30	2,76	2,85
9	6,84	6,52	2,60	2,64
10	7,15	6,77	2,45	2,45
11	7,32	6,94	2,21	2,22

Tabela 43 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco

O aumento da taxa livre de risco faz aumentar o preço da call e diminuir o preço da put. O *drift* da simulação aumenta com o aumento da taxa livre de risco. (ver Anexo 1.5 e 1.6).

A mudança da taxa livre de risco não influi sobre a volatilidade, e a volatilidade da média fica menor que a do ativo. De novo, os valores das opções call e put asiáticas são menores neste nível de volatilidade, comparadas com a opção europeia de mesmos parâmetros:

Taxa livre de risco (%)	Opção de compra	Opção de venda
1	6,29	10,25
11	11,05	5,11

Tabela 44 – Valores das opções europeias com mesmos parâmetros

Uma relação linear existe entre taxa livre de risco e preço da opção que pode ser visto no gráfico do anexo 3.19.