

3 Equações Excepcionais

Neste capítulo continuaremos a descrição dos conjuntos singulares associados a equações da forma

$$z'(t) = z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + a_1(t)z(t) + a_0(t) \quad (3-1)$$

Na primeira seção trataremos de equações genéricas. Isso justificará os exemplos que serão apresentados na seção 2. Por fim, na seção 3, trataremos de equações com infinitas soluções periódicas.

3.1

Descontinuidades de Γ_k

No final do capítulo 2, passamos a interpretar as descontinuidades das aplicações Γ_k , $k = 0, \dots, 2n-3$, como autointerseções dos conjuntos singulares. Os conjunto singulares, estável e instável, devem possuir o mesmo número (podendo ser infinito) de autointerseções.

Para ver isso, considere o problema

$$\begin{cases} w'(t) = -(w(t)^{2-n} + a_{n-1}(t)w(t)^{3-n} + \dots + a_1(t)w(t) + a_0(t)w(t)^2) \\ w(a) = z_e \end{cases}$$

para $t \in [a, b]$, onde $z_e \in S^e$. Se alguma trajetória generalizada de z_e alcança infinito mais de uma vez, devem existir $t_0, t_1 \in [a, b]$ e uma trajetória generalizada α tal que $\alpha(t_0) = \bar{\phi}_{2k}(t_0; a, z_e) = 0$ e $\alpha(t_1) = \bar{\phi}_{2k}(t_1; a, z_e) = 0$. Se $t_0 < t_1$, pela definição, Γ_{2k} é descontínua em t_1 .

Agora observe que, como $z_e \in S^e$, temos que $\bar{\phi}_{2k}(b; a, z_e) = z_i \in S^i$ para alguma solução generalizada. Assim, z_i também possui uma trajetória generalizada que alcança infinito pelo menos duas vezes, ou seja, para algum m entre $0, \dots, (n-2)$, Γ_{2m+1} também é descontínua. Isso nos dá a seguinte proposição.

Proposição 3.1 *Para cada autointerseção em S^e , existe uma autointerseção em S^i . ■*

Como consequência direta da proposição (2.10), temos que os conjuntos X_{2k} e X_{2k+1} são abertos. Mais ainda, em geral esses conjuntos serão subconjuntos abertos e densos do intervalo $[a, b]$. O próximo exemplo apresenta uma equação onde X_p não é denso, isto é, as parametrizações Γ_p não estão definidas em subconjunto aberto do intervalo, que, neste caso, será o intervalo $[0, 1]$. Isso é verificado mostrando que um aberto de pontos em S^e alcança infinito mais de uma vez.

Exemplo 3.2 Para equação $z'(t) = z(t)^3 + 4\pi iz(t)$, existe um subintervalo de $[0, 1]$ onde as parametrizações Γ_m , $m = 0, 1, 2$ e 3 , não estão definidas. De fato, primeiro considere o problema

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^3 + 4\pi iz(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

com solução

$$z(t) = \frac{2\pi iz_0}{\sqrt{(-z_0^2 + 4\pi ie^{-8\pi it} + z_0^2 e^{-8\pi it})\pi i}},$$

logo as condições iniciais $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ que alcançam infinito em tempo $t \in [0, 1]$ são dadas por

$$z_0 = \pm \sqrt{-\frac{4\pi ie^{-8\pi it}}{e^{-8\pi it} - 1}}.$$

Lembramos que a parametrização Γ_{2k} não está definida num tempo $t_1 \in [0, 1]$ se existe $t_0 < t_1$ e uma solução generalizada, $z(t)$, de

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^3 + 4\pi iz(t) \\ z(t_1) = \infty \end{cases}$$

satisfazendo $z(t_0) = \infty$.

Uma vez que a equação $z'(t) = z(t)^3 + 4\pi iz(t)$ é autônoma, podemos dizer que todos os pontos que alcançam infinito descrevem a mesma trajetória. Pelo lema de existência de soluções generalizadas o problema deve possuir duas soluções em um intervalo do tipo $[t_0, t_0 + \epsilon]$. Assim, neste exemplo, vamos fixar sempre a mesma raiz toda vez que uma trajetória generalizada alcançar infinito para podermos fazer as contas. Assim, por exemplo, para $t = \frac{1}{4}$

$$z_0 = \sqrt{-\frac{4\pi ie^{-2\pi i}}{e^{-2\pi i} - 1}} = \infty,$$

ou seja, uma trajetória da condição inicial $z_0 = \infty$ também alcança infinito em tempo $t = \frac{1}{4}$. Portanto, para ϵ suficientemente pequeno, temos

$$-\frac{4\pi i e^{-8\pi i \epsilon}}{e^{-8\pi i \epsilon} - 1} = -\frac{4\pi i e^{-8\pi i(\epsilon + \frac{1}{4})}}{e^{-8\pi i(\epsilon + \frac{1}{4})} - 1}.$$

Logo, todos os pontos $z_0 = \sqrt{-\frac{4\pi i e^{-8\pi i t}}{e^{-8\pi i t} - 1}}$ para $t \in [0, \epsilon]$ alcançam infinito pelo menos duas vezes e, portanto, Γ_{2k} não está definida em algum subintervalo de $[0, 1]$ para algum k .

Esse exemplo motiva mais uma definição.

Definição 3.3 Dizemos que a equação

$$z'(t) = z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + a_1(t)z(t) + a_0(t),$$

definida no intervalo $[a, b]$, é **excepcional de 1º tipo** se, para algum k , X_k não é um conjunto denso do intervalo $[a, b]$.

Dividiremos o conjunto singular estável em dois subconjuntos. O primeiro deles, $X_{t \geq t_0}$, é formado pelo pontos de S^e cujas trajetórias generalizadas alcançam infinito em algum tempo $t \in [t_0, b]$. O outro, $X_{t \leq t_0}$, será formado pelos pontos que a trajetória generalizada alcança infinito em tempo $t \in [a, t_0]$. Com isso, definimos

$$S_{t_0}^e = \{z_* \in \overline{\mathbb{C}} : z_* = \overline{\phi}(t_0; a, z), z \in X_{t \geq t_0}\}$$

e

$$S_{t_0}^i = \{z_* \in \overline{\mathbb{C}} : z_* = \overline{\phi}(t_0; a, z), z \in X_{t \leq t_0}\}.$$

Os conjuntos $S_{t_0}^e$ e $S_{t_0}^i$ serão chamados de t_0 -estados dos conjuntos singulares, estável e instável, respectivamente.

No exemplo (3.2), vimos que existe um aberto onde Γ_k não está definida. Isso significa que existe um aberto de pontos de S^e que alcançam infinito pelo menos duas vezes. Assim, para algum $t_0 \in [a, b]$, $S_{t_0}^e \cap S_{t_0}^i$ contém um aberto de pontos. Geometricamente, $S_{t_0}^e$ e $S_{t_0}^i$ estão sobrepostos.

Suponha que as funções a_i sejam suaves. As parametrizações Γ_{2k, t_0} e Γ_{2m+1, t_0} das pernas dos t -estados, $S_{t_0}^e$ e $S_{t_0}^i$ respectivamente, podem ser definidas de maneira análoga às parametrizações das pernas dos conjuntos singulares do capítulo anterior. Ou seja, para uma determinada perna do t_0 -estado estável, $\Gamma_{2k, t_0}(\tilde{t})$ é tal que por $\overline{\phi}_k(\tilde{t}; t_0, \Gamma_{2k, t_0}(\tilde{t})) = \infty$ para $\tilde{t} \in [t_0, b]$. Já para uma perna do t_0 -estado instável temos que $\Gamma_{2k+1, t_0}(\tilde{t})$ é tal que

$\bar{\phi}_k(\tilde{t}; t_0, \Gamma_{2m+1, t_0}(\tilde{t})) = \infty$ para $\tilde{t} \in [a, t_0]$. Dessa forma, essas parametrizações também serão suaves, desde que as funções a_i sejam.

Suponha que os t_0 -estados $S_{t_0}^e$ e $S_{t_0}^i$ se interceptem, isto é, existem $t_b \in (t_0, b]$ e $t_a \in (a, t_0]$ tais que $\Gamma_{2k, t_0}(t_b) = \Gamma_{2m+1, t_0}(t_a)$ para algum k e m entre $1, \dots, (n-1)$. Ou seja, os t_0 -estados se interceptam em alguma de suas pernas.

Se $\Gamma'_{2k, t_0}(t_b) \neq \Gamma'_{2m+1, t_0}(t_a)$ para todos os pontos de interseção entre os t_0 -estados, dizemos que os t_0 -estados da equação (3-1) se interceptam transversalmente e escrevemos $S_{t_0}^e \pitchfork S_{t_0}^i$. Em particular, se $S_{t_0}^e \cap S_{t_0}^i = \{\infty\}$, também dizemos que os t_0 -estados se interceptam transversalmente. Com isso definimos o conceito de equação transversal.

Definição 3.4 *Suponha que as funções a_i sejam suaves. Dizemos que a equação (3-1) é **transversal** se, para cada $t \in [a, b]$, tivermos $S_t^e \pitchfork S_t^i$. Caso contrário, dizemos que a equação é **não transversal**.*

Lema 3.5 *Considere a equação*

$$z'(t) = z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + (a_0(t) + sb_0(t)),$$

com s um parâmetro complexo e funções a_i de classe C^1 . Suponha que $z(t)$ seja uma solução generalizada de

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + a_1(t)z(t) + a_0(t) + sb_0(t) \\ z(t_0) = \infty \end{cases}$$

para $s = 0$ satisfazendo $z(t) \neq \infty$ para $t \in (t_0, t_1)$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que, se $b_0(t)$ é uma função suave no intervalo $[a, b]$ com suporte compacto em $(t_b - \epsilon, t_b + \epsilon)$, $t_b \in (t_0, t_1)$ e satisfazendo $\int_a^b b_0(t)dt = 1$, então existem $\delta > 0$ e $\mathcal{Z} : (t_0, t_1) \times B(0, \delta) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo $s \in B(0, \delta)$, $\mathcal{Z}(t_0, s) = \infty$ e, para todo $t \in (t_0, t_1]$, $\mathcal{Z}(t, s) \neq \infty$ com

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{Z}(t; s)) = \mathcal{Z}(t; s)^n + a_{n-1}(t)\mathcal{Z}(t; s)^{n-1} + \dots + a_1(t)\mathcal{Z}(t; s) + (a_0(t) + sb_0(t))$$

e

$$\frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{Z}(t; 0)) \neq 0.$$

para $t > t_b + \epsilon$.

Prova. A existência de ϵ e uma função b_0 com suporte compacto em satisfazendo $(t_b - \epsilon, t_b + \epsilon)$, $t_b \in (t_0, t_1)$ e $\int_a^b b_0(t)dt = 1$ é garantida pela existência de *bump functions*. Uma referência para esse fato pode ser encontrada em [9], apêndice C.

Seja $\mathcal{Z}(t; s)$ solução de

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + a_1(t)z(t) + a_0(t) + sb_0(t) \\ z(t_0) = \infty. \end{cases}$$

Por hipótese temos que, no sistema w , $\mathcal{W}(t; 0) \neq 0$ para $t \in (t_0, t_1)$. Pela continuidade da equação com relação às funções a_i , lema (2.6), dado $\tilde{\epsilon} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\mathcal{W}(t; s) - \mathcal{W}(t; 0)| \leq \tilde{\epsilon}$$

para $|s| \leq \delta$. Isso nos dá $\mathcal{Z}(t; s) \neq \infty$ para $t \in (t_0, t_1)$ e

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{Z}(t; s)) = \mathcal{Z}(t; s)^n + a_{n-1}(t)\mathcal{Z}(t; s)^{n-1} + \dots + a_1(t)\mathcal{Z}(t; s) + (a_0(t) + sb_0(t)).$$

Precisamos agora ver que $\frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{Z}(t; 0)) \neq 0$. Escrevendo $\mathcal{Z}(t; s)$ e $z(t)$ na forma de equação integral, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(t; s) - z(t) &= \int_{t_0}^{t_1} [\mathcal{Z}(\tau; s)^n - z(\tau)^n] + \dots + a_1(\tau)[\mathcal{Z}(\tau; s) - z(\tau)] + sb_0(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_b - \epsilon}^{t_1} [\mathcal{Z}(\tau; s)^n - z(\tau)^n] + \dots + a_1(\tau)[\mathcal{Z}(\tau; s) - z(\tau)] d\tau + s. \end{aligned}$$

Pois, para $t \leq t_b - \epsilon$, temos $\mathcal{Z}(t; s) = z(t)$ e, portanto, a EDO não foi alterada no intervalo. Uma vez que $|s| < \delta$, devemos ter $\mathcal{Z}(t; s) \approx z(t) + s$ e, portanto, pela suavidade da solução $\mathcal{Z}(t; s)$ nas funções a_i , lema (2.7), $\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{Z}(t_1; 0) \approx 1$. Assim, temos $\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{Z}(t_1; 0) \neq 0$. ■

O lema nos diz que uma pequena perturbação nas funções a_i nos dá $\mathcal{Z}(t; s) \neq \mathcal{Z}(t; \tilde{s})$, para $t > t_b + \epsilon$ desde que s seja suficientemente pequeno. Essencialmente o que mostramos com o lema é que podemos desviar parte dos conjuntos singulares com a perturbação. Ou seja, se os t_0 -estados se interceptam de forma não transversal, a perturbação, da maneira que foi feita, desloca apenas as pernas de $S_{t_0}^i$. Assim, a equação perturbada passa a ser transversal. Em particular, caso $S_{t_0}^e$ e $S_{t_0}^i$ coincidam num aberto, isto é, a equação associada a eles é *excepcional de 1º tipo*, existe naturalmente uma não

transversalidade. Dessa forma, uma equação excepcional de 1º tipo é também sensível as perturbações.

Isso nos dá a seguinte proposição

Proposição 3.6 *Se a equação (3-1) é excepcional do 1º tipo então ela é não-transversal. ■*

A ideia essencial do lema (3.5) é que o conjunto das equações transversais é um subconjunto aberto e denso no espaço das equações.

Para formalizar esse fato, diremos que o espaço das equações do tipo de (3-1), denotado por \mathcal{E} , é o espaço de Banach formado pelas n -uplas $(a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$, com $a_i \in C^r([a, b]; \mathbb{C})$, $r \geq 1$, com norma

$$E_A = \max_{i=1 \dots (n-1)} \{ \|a_i\|_{C^r} \},$$

onde E_A é a equação associada à n -upla $A = (a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$. Com isso podemos enunciar a seguinte proposição que é uma consequência direta do lema (3.5).

Proposição 3.7 *O conjunto das equações transversais é um subconjunto aberto e denso do espaço \mathcal{E} . ■*

Uma consequência da transversalidade de certas equações é que as parametrizações dos conjuntos singulares apresentam um número finito de descontinuidades. Mais precisamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.8 *Suponha que as funções a_i sejam suaves. Se a equação (3-1) é transversal então Γ_k , $k = 0, \dots, 2n - 3$, possui um número finito de descontinuidades.*

Prova. Suponha que Γ_k possua infinitos pontos de descontinuidade para algum k , ou seja, os conjuntos singulares se autointerceptam infinitas vezes. Uma vez que os conjuntos singulares são compactos, as autointerseções devem se acumular em algum ponto do conjunto singular.

Seja z_∞ ponto de acumulação cuja trajetória generalizada alcança infinito em tempo t_∞ . Seja $t_0 > t_\infty$ tal que todas as trajetórias generalizadas de uma vizinhança de z_∞ já tenham alcançado infinito.

Nesse caso, os t_0 -estados estável e instável possuem infinitos pontos de interseção que devem se acumular em um ponto, digamos, z_{∞, t_0} . Como a equação é transversal, as interseções entre os t_0 -estados devem ser transversais. Mas, numa vizinhança do ponto de acumulação, Γ'_{k, t_0} , a parametrização dos t_0 -estados, deixa de ser suave. Logo, se as funções a_i são suaves e a equação é transversal, o número de autointerseções deve ser finito. ■

3.2

Exemplos

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos. Mas, antes vamos descrever o modo como os conjuntos singulares foram gerados numericamente.

Seja z_* pertencente a uma vizinhança de infinito. Dessa forma, o comportamento da solução do problema

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^n + a_{n-1}(t)z(t)^{n-1} + \dots + a_1(t)z(t) + a_0(t) \\ z(t_*) = z_* \end{cases}$$

pode ser aproximado pelo comportamento da solução de

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^n \\ z(t_*) = z_* \end{cases}$$

desde que $t \in (t_* - \epsilon, t_* + \epsilon)$, para ϵ suficientemente pequeno.

Vamos fixar $n = 3$. Considere uma partição do intervalo $[0, 1]$, $[0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_{l-1}, 1]$ tal que cada $[t_i, t_{i+1}]$ tenha comprimento $\frac{1}{l}$.

Seja l é suficientemente grande e z_* pertencente a uma vizinhança de infinito. Considere o problema

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^3 \\ z(t_i) = z_* \end{cases} \quad (3-2)$$

com solução dada por

$$z(t) = \frac{z_*}{\sqrt{-2tz_*^2 + 1 + 2t_iz_*^2}}.$$

Uma vez que estamos fixando $n = 2$, existem apenas dois pontos, z^+ e z^- , que alcançam infinito em tempo t_{i+1} . Esses pontos são dados por

$$z^\pm = \pm \sqrt{\frac{-1}{2t_i - 2t_{i+1}}}.$$

Pela proposição (3.7) podemos assumir que todas as equações são transversais, ou seja, os conjuntos singulares das equações possuem um número finito de auto-interseções. Portanto, a menos de um número finito de pontos, dado um tempo \tilde{t} , existe sempre \tilde{z} tal que $\bar{\phi}(\tilde{t}; 0, \tilde{z}) = \infty$, ou seja, Γ_k , $k = 0, 1, 2, 3$ é descontínua apenas num número finito de pontos.

Assim, se resolvermos, numericamente, o problema

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^3 + a_2(t)z(t)^2 + a_1(t)z(t) + a_0(t) \\ z(t_i) = z^\pm, \end{cases} \quad (3-3)$$

para cada $i = 1, \dots, l$ e denotando por $z_i^\pm(t)$ suas respectivas soluções, podemos obter uma aproximação para o conjunto singular estável da equação (3-1) calculando $z_i^+(0)$ e $z_i^-(0)$ para cada i . Seguindo este mesmo raciocínio, também encontramos uma aproximação do conjunto singular instável.

Os exemplos deste capítulo estão desenhados da maneira que foram gerados. Utilizamos também a mudança de variáveis $w = \frac{1}{z}$, portanto, a origem em cada uma das figuras representa o infinito. Os demais exemplos da tese foram corrigidos com programas gráficos para ser tornarem mais fáceis de visualizar.

Exemplo 3.9 Os conjuntos singulares, estável e instável, para a equação

$$z'(t) = z(t)^3 + (2 + i)(\cos(4\pi t))^2 z(t)^2 + (2 + i)z(t) + 1$$

estão representados pela figura (3.1). As pernas que tangenciam o eixo x em 0 são as pernas do conjunto singular estável. Mais especificamente, como estamos tratando de equações com $n = 3$, essas são 0-perna e a π -perna e as pernas que tangenciam o eixo y em 0 são as $\frac{\pi}{2}$ -perna e $\frac{3\pi}{2}$ -perna.

Podemos ver também que os conjuntos singulares não se autointerceptam, portanto, todos os pontos são regulares.

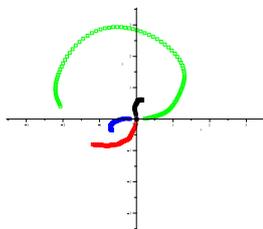


Figura 3.1: Todos os pontos dos conjuntos singulares são regulares.

Exemplo 3.10 Considere a equação

$$z'(t) = z(t)^3 + (2 + i) \cos(2\pi t) z(t)^2 + (1 + i)z(t) + ((2 + i) \sin(8\pi t))^2.$$

Neste exemplo podemos ver que existe um ponto de autointerseção; o que implica uma descontinuidade na parametrização Γ_0 . Podemos observar também os $\frac{1}{2}$ -estados dos conjuntos singulares na figura (3.2). A interseção transversal entre o $\frac{1}{2}$ -estado estável e o $\frac{1}{2}$ -estado instável garante que uma pequena perturbação nas funções a_i ainda apresentará $\frac{1}{2}$ -estados com interseção transversal.

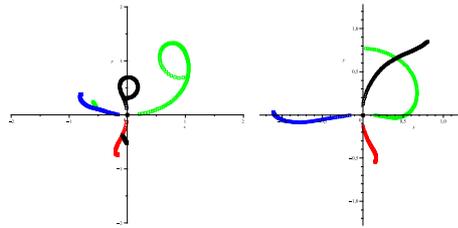


Figura 3.2: Uma autointerseção; Os $\frac{1}{2}$ -estados se interceptam transversalmente.

Exemplo 3.11 Foi mostrado no exemplo (3.2) que os conjuntos X_k associados à equação

$$z'(t) = z(t)^3 + 4\pi iz(t)$$

não são densos. A figura (3.3) mostra os conjuntos singulares e os $\frac{1}{2}$ -estados do conjunto singular estável. Como X_k não é denso, existe uma sobreposição dos $\frac{1}{2}$ -estados com o conjunto singular, ou seja, todos os pontos alcançam infinito mais de uma vez. Nesse caso, os $\frac{1}{2}$ -estados coincidem. Podemos ver também que conjunto singulares também coincidem; assim, a equação é não transversal.

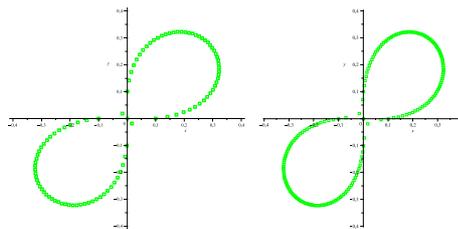


Figura 3.3: Equação é não transversal.

Exemplo 3.12 Agora considere a família de equações, no parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, dada por

$$z'(t) = z(t)^3 + \lambda z(t)^2 + [(1 + i) \text{sen}(2\pi t)]^2 + 0.3] z(t) + 3((2 + i) \text{cos}(2\pi t))^2.$$

Se escolhermos $\lambda = 3$, os $\frac{1}{2}$ -estados da equação podem ser vistos na figura (3.4). Para esse valor de λ , os $\frac{1}{2}$ -estados não se interceptam. Na figura são mostradas duas vistas dos conjuntos singulares para $\lambda = 3$. Isso significa que não existem pontos em que alguma trajetória generalizada alcança infinito mais de uma vez, ou seja, os conjuntos singulares não se autointerceptam, figura (3.5).

Para $\lambda = 1.5$, se observarmos a figura (3.6), veremos que uma das pernas do $\frac{1}{2}$ -estado do conjunto singular estável praticamente tangencia uma das pernas do $\frac{1}{2}$ -estado do conjunto singular instável. Então, nos conjuntos

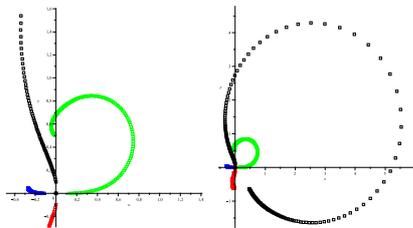


Figura 3.4: $\frac{1}{2}$ -estados para $\lambda = 3$

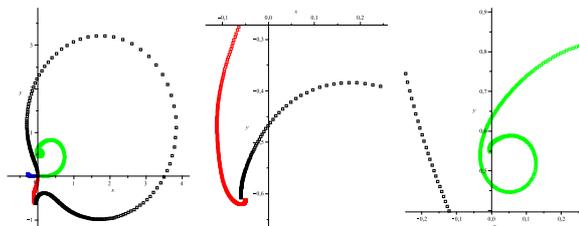


Figura 3.5: Conjuntos singulares para $\lambda = 3$

singulares devemos ter, se não uma autointerseção, uma aproximação das pernas. Pois interseção nos t -estados significa que existe pelo menos uma trajetória generalizada que alcança infinito mais de uma vez, ou seja, os conjuntos singulares se auto-interceptam. Podemos confirmar essa expectativa observando a figura (3.7).

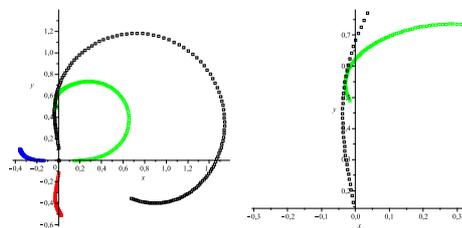


Figura 3.6: $\frac{1}{2}$ -estados para $\lambda = 1.5$.

Se $\lambda = 0.5$, os $\frac{1}{2}$ -estados se interceptam transversalmente, figura (3.8). Essa interseção transversal das pernas deixa claro, visualmente, a auto-interseção dos conjunto singulares. Nesse caso, pela figura (3.9), apenas a descontinuidade no conjunto singular instável pode ser observada numericamente.

Assim, podemos dizer que deve existir um valor de $\lambda \in [0, 3]$ tal que os $\frac{1}{2}$ -estados se interceptam de maneira não transversal.

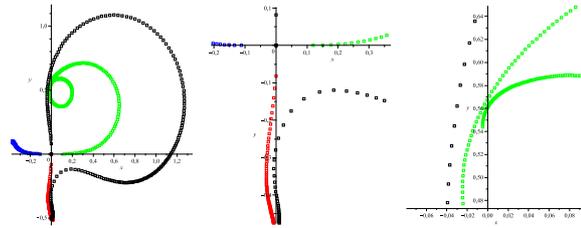


Figura 3.7: Conjuntos singulares para $\lambda = 1.5$.

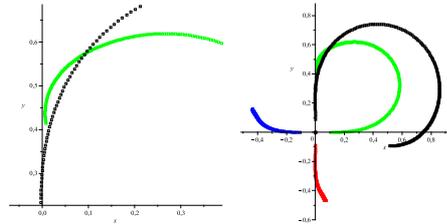


Figura 3.8: $\frac{1}{2}$ -estados para $\lambda = 0.5$.

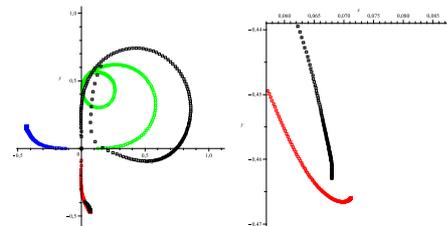


Figura 3.9: Conjuntos singulares para $\lambda = 0.5$.

3.3 Equações com infinitas soluções periódicas

Nesta seção estaremos interessados em equações que possuem infinitas soluções periódicas. O próximo exemplo mostra uma equação autônoma com coeficientes complexos que possui todas soluções periódicas.

Exemplo 3.13 A equação $z'(t) = z(t)^3 + 2\pi iz(t)$ possui infinitas soluções periódicas. De fato, resolvendo a equação explicitamente para a condição inicial $z(0) = z_*$, obtemos

$$z(t) = \frac{2\pi z_*}{\sqrt{-(-2iz_*^2 - 4\pi e^{-4i\pi t} + 2iz_*^2 e^{-4i\pi t})\pi}}$$

Uma vez que $z(1) = z_*$, concluímos que a equação possui infinitas soluções periódicas de período 1.

Os conjuntos singulares associados a essa equação são idênticos aos conjuntos singulares associados à equação do exemplo (3.11). Nesse caso também os conjuntos singulares coincidem.

Agora definiremos o segundo tipo de excepcionalidade, que ocorre quando a equação possui infinitas soluções periódicas. O exemplo (3.13) é um caso autônomo. Nesta seção mostraremos que existe uma família de equações não autônomas que possui infinitas soluções periódicas.

Definição 3.14 *Suponha que as funções $a_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 0, \dots, (n - 1)$ sejam periódicas de período 1. Dizemos que a equação (3-1) é **excepcional de 2º tipo** se possuir infinitas soluções periódicas.*

Seja $c \in \mathbb{C}$. Considere a equação

$$z'(t) = z(t)^3 + c \operatorname{sen}(2\pi t)z(t)^2. \quad (3-4)$$

Veremos que existe uma vizinhança de c , $V_c \subset \mathbb{C}$, tal que a equação acima é excepcional de 2º tipo para todo $c \in V_c$. A figura (3.10) mostra os conjuntos singulares associados à equação (3-4) quando $c = 2\sqrt{\pi}(1 - i)$. Na primeira figura, mostramos apenas o conjunto singular estável e, na segunda, o conjunto singular instável.

Esses conjuntos são bem comportados, ou seja, possuem um número finito de autointerseções, mesmo havendo uma sobreposição deles (terceira figura). Na região limitada pelos dois conjuntos singulares a Aplicação de Poincaré T é a Identidade.

A figura (3.11) mostra a trajetória de alguns pontos da região limitada pelos conjuntos singulares. Observe que as trajetórias são fechadas, o que indica a excepcionalidade da equação.

Para mostrar que a equação (3-4) possui infinitas soluções periódicas, vamos transformar o problema

$$\begin{cases} z'(t) = z(t)^3 + c \operatorname{sen}(2\pi t)z(t)^2 \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (3-5)$$

em um problema na variável complexa s pela mudança de variável $s = e^{2\pi it}$.

O lema (3.16) relaciona analiticidade numa vizinhança disco de raio 1, $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, da solução de um problema com domínio complexo com soluções periódicas de equações com domínio real. Já o lema (3.17) mostra que se a solução de um problema com domínio complexo for holomorfa numa região que contenha o disco de raio 1, uma pequena perturbação na condição inicial ou num parâmetro complexo ainda deixa a solução do problema perturbado holomorfa numa região que contém o disco unitário.

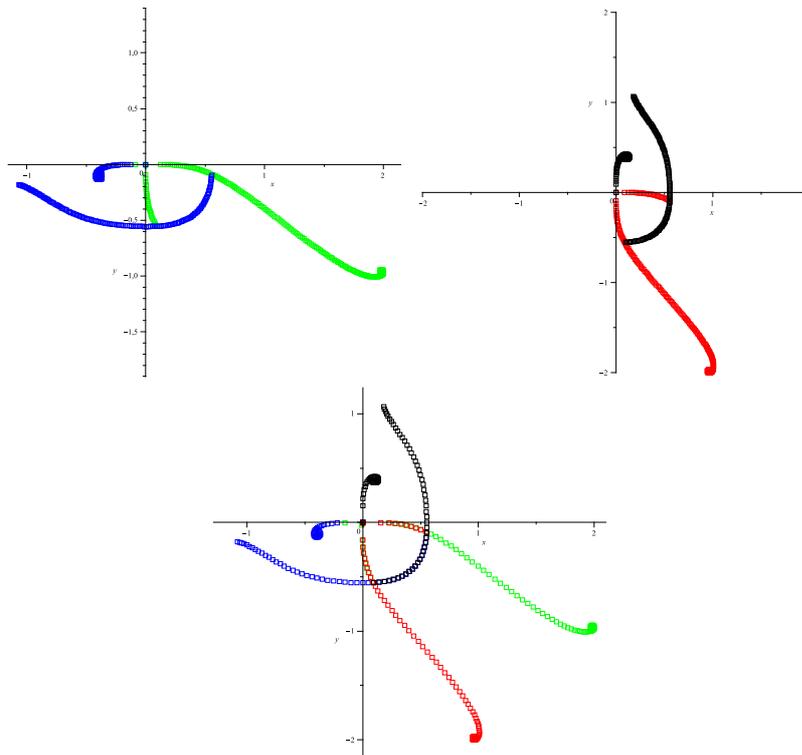


Figura 3.10: Os conjuntos singulares da equação $z' = z^3 + 2\sqrt{\pi}(1-i)\text{sen}(2\pi t)z^2$.

Uma combinação destes resultados mostra que a equação (3-4) é excepcional de 2º tipo.

Observação 3.15 Em [11] encontramos uma abordagem bastante detalhada sobre EDO's em domínios complexos. Em particular encontramos, no capítulo 2, o Teorema de Existência e Unicidade e a dependência analítica nos parâmetros.

Lema 3.16 *Considere a mudança de variável $s = e^{2\pi it}$ de forma que o problema*

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) \\ z(0) = z_0. \end{cases} \quad (3-6)$$

na variável real t possa ser transformado no problema

$$\begin{cases} u'(s) = g(s, u(s)) \\ u(1) = u_1. \end{cases} \quad (3-7)$$

na variável complexa s . Se a solução de (3-7) for holomorfa numa vizinhança do disco unitário, D_1 , então a equação associada ao problema (3-6) possui solução periódica de período 1.

Prova. Sejam u a solução do problema e A uma vizinhança de D_1 tal que u seja holomorfa em A . Considere a curva $\gamma(t) = e^{2\pi it}$. Por um lado, uma vez

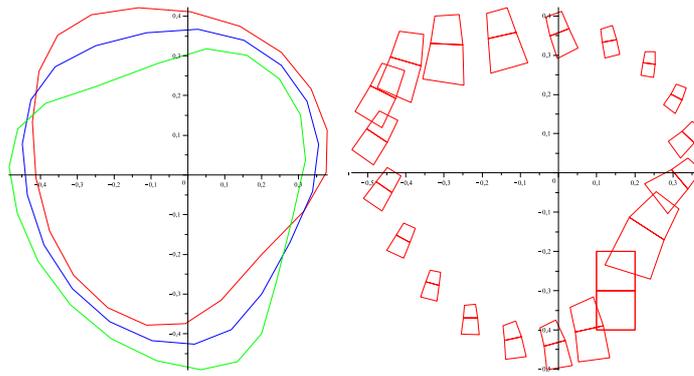


Figura 3.11: Trajetórias para a equação $z(t)' = z(t)^3 + 2\sqrt{\pi}(1-i) \text{sen}(2\pi t)z(t)^2$.

que $u(s)$ é holomorfa em A , temos $\int_{\gamma} u'(s)ds = 0$. Por outro lado, também temos que $\int_{\gamma} u'(s)ds = \int_0^1 u'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = u(\gamma(1)) - u(\gamma(0))$. Juntando as duas informações, temos $u(\gamma(1)) = u(\gamma(0))$. Pela mudança de variável dada na hipótese, essa última igualdade nos dá $z(1) = z(0)$. ■

Lema 3.17 *Seja $f : U \subset \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa numa vizinhança de $(0, u_0, c)$.*

Se a solução de

$$\begin{cases} u'(s) = f(s, u(s), c) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3-8)$$

for holomorfa numa vizinhança do disco de raio 2, existem vizinhanças $V_{u_0}, V_c \subset \mathbb{C}$, de u_0 e c respectivamente, tal que, se $\tilde{u} \in V_{u_0}$ e $\tilde{c} \in V_c$, a solução de

$$\begin{cases} u'(s) = f(s, u(s), \tilde{c}) \\ u(0) = \tilde{u} \end{cases} \quad (3-9)$$

é holomorfa numa região que contém o disco unitário.

Prova. Seja $u(s)$ a solução de (3-8) que, por hipótese, é holomorfa numa vizinhança do disco de raio 2. Se considerarmos a mudança de variáveis $s = xe^{iy}$, com $y \in [0, 2\pi]$, temos $u(s) = u(xe^{iy}) = v(x, y)$. Se fixarmos um valor de y , transformamos o problema (3-8), na variável complexa s , no problema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) = f(xe^{iy}, v(x, y), c)e^{iy} \\ v(0, y) = u_0 \end{cases} \quad (3-10)$$

na variável real x . A solução de (3-10) é suave no intervalo $[-2, 2]$, pois $u(s)$ é holomorfa no disco de raio 2.

Pela suavidade nos parâmetros, para \tilde{u} numa vizinhança V_{u_0} de u_0 e \tilde{c} numa vizinhança V_c de c e para cada y , existe δ_y (dependendo de y) tal que a

solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}v(x, y) = f(xe^{iy}, v(x, y), \tilde{c})e^{iy} \\ v(0, y) = \tilde{u}, \end{cases}$$

denotada por $\tilde{v}(x, y)$, é suave num intervalo $(-2 + \delta_y, 2 - \delta_y)$ que contém o intervalo $[-1, 1]$.

Ainda pela continuidade nos parâmetros, a função $\delta(y)$, que associa à y um valor δ_y , é contínua e, portanto, deve assumir um valor δ_{min} tal que $(-2 + \delta_y, 2 - \delta_y)$ contenha o intervalo $[-1, 1]$ desde que V_{u_0} e V_c sejam vizinhanças apropriadas.

Assim, para $\tilde{c} \in V_c$, $\tilde{u} \in V_{u_0}$ temos que $\tilde{v}(x, y)$ está definida no disco $D_{min} = \{z = xe^{iy} : |z| \leq 2 - \delta_{min}\}$. Observe que $D_{min} \supset D_1$.

Pelo teorema de existência e unicidade, [11], $\tilde{v}(x, y) = \tilde{u}(s)$ é solução holomorfa de (3-9) numa vizinhança da origem. Se mostrarmos que $\tilde{v}(x, y)$ é holomorfa em D_{min} , o lema estará provado.

Na teoria das funções complexas, temos que, se $g(x, y) = g(z)$ é uma função complexa, então

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \quad (3-11)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial g}{\partial y} \right). \quad (3-12)$$

Definimos $H(x, y, \tilde{v}(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}\tilde{v}(x, y) - i \frac{\partial}{\partial x}\tilde{v}(x, y)$. Por (3-12), \tilde{v} é holomorfa em D_{min} se, e somente se, $H \equiv 0$ em D_{min} . Como $\tilde{v}(x, y)$ é solução de (3-9), por (3-11), temos que $\frac{\partial}{\partial x}\tilde{v}(x, y) = \frac{\partial}{\partial s}\tilde{v}(s) = f(x, y, \tilde{v}(x, y), \tilde{c})$ numa vizinhança da origem; portanto,

$$H(x, y, \tilde{v}(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}\tilde{v}(x, y) - if(x, y, \tilde{v}(x, y), \tilde{c}).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}H(x, y, \tilde{v}(x, y)) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\tilde{v}(x, y) - i \frac{\partial}{\partial x}f(x, y, \tilde{v}(x, y), \tilde{c}) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}f(x, y, \tilde{v}(x, y), \tilde{c}) - i \frac{\partial}{\partial x}f(x, y, \tilde{v}(x, y), \tilde{c}) \\ &= \partial_3 f(x, y, \tilde{v}(x, y), \tilde{c}) \cdot [H(x, y, \tilde{v}(x, y))]. \end{aligned}$$

Ou seja, H satisfaz uma EDO linear e, como $H(0, 0, \tilde{v}(0, 0)) = 0$, pois $\tilde{v}(x, y)$ é holomorfa na origem, teremos $H \equiv 0$ enquanto \tilde{v} estiver definida; logo, $H \equiv 0$

em D_{min} e, portanto, \tilde{v} é holomorfa em D_{min} . ■

Considere a mudança de variável $s = e^{2\pi it}$ no problema (3-5). Então $z(t) = u(e^{2\pi it}) = u(s)$ e, portanto, o problema pode ser reescrito na variável complexa s como

$$\begin{cases} u'(s) = \left[u(s)^3 + c \left(\frac{s-s^{-1}}{2i} \right) u(s)^2 \right] \frac{1}{2\pi is} \\ u(1) = u_1 = z_0. \end{cases} \quad (3-13)$$

As mudanças de variáveis seguintes nos conduzirão a um problema cuja solução será inteira. Dessa forma, pelo lema (3.16), a EDO possuirá pelo menos uma solução periódica.

Agora, faça $v(s) = \frac{1}{u(s)}$. Assim, temos

$$\begin{cases} v'(s) = -\frac{1}{2\pi isv(s)} + \frac{c}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{s^2} \right) \\ v(1) = v_1 = \frac{1}{u_1}. \end{cases} \quad (3-14)$$

Finalmente, se considerarmos a mudança de variáveis $w(s) = v(s) - \frac{c}{4\pi} \left(s + \frac{1}{s} \right)$, o problema é reescrito como

$$\begin{cases} w'(s) = \frac{2i}{4\pi sw(s) + cs^2 + c} \\ w(1) = w_1, \end{cases} \quad (3-15)$$

onde $w_1 = v_1 - \frac{c}{2\pi}$. A partir disso, queremos encontrar uma solução inteira para o problema acima da forma $w(s) = As$, onde $A \in \mathbb{C}$ será determinado da seguinte forma:

Se $w(s) = As$, então $w'(s) = A$; logo, pela equação do problema (3-15), devemos ter $A = \frac{2i}{4\pi As^2 + cs^2 + c}$. Assim, se resolvermos o sistema

$$\begin{cases} 4\pi A^2 + c = 0 \\ A \cdot c = 2i, \end{cases} \quad (3-16)$$

encontraremos a solução inteira desejada. Facilmente podemos verificar que $A = \frac{(1-i)}{2\sqrt{\pi}}$ e $c = -2\sqrt{\pi}(1-i)$.

Com isso chegamos ao principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.18 *Existe um valor de $c \in \mathbb{C}$ tal que a equação (3-4) é excepcional do 2º tipo. Além disso, existem conjuntos abertos U e V em \mathbb{C} tais que o problema de valor inicial (3-5), com $c \in U$ e $z_0 \in V$, possui solução periódica.*

Prova. A partir do problema (3-15), com $w_1 = 0$, para $c = -2\sqrt{\pi}(1-i)$, a solução é dada por $w(s) = \frac{(1-i)}{2\sqrt{\pi}}s$. Pelo lema (3.16), podemos recuperar, por meio das mudanças de variáveis feitas em (3-5), uma solução periódica para (3-4).

Novamente pelo lema (3.16) combinado com o lema (3.17), pequenas perturbações na condição inicial ainda garantem infinitas soluções periódicas para a equação.

Como para os valores de c e A encontrados acima a equação é inteira, pequenas perturbações em c ainda implicarão soluções holomorfas em regiões que contêm D_1 . Combinando novamente os lemas (3.16) e (3.17), a equação perturbada ainda possuirá infinitas soluções periódicas. ■